Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 6 - 28 Marzo 2014

1. Una successione di funzioni $f_n(x)$ converge puntualmente ad una funzione $f(x)$ su un certo insieme Ω se $\forall\ x \in \Omega$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ .$$

In particolare $f_n(x)$ converge puntualmente alla propria funzione limite sul proprio insieme di convergenza puntuale Λ.
$f_n(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$ se

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow_{n\to\infty} 0\ .$$

Con tali concetti in mente possiamo partire con la risoluzione dell'esercizio.
NB. Nel testo del tutorato le $f_n^k(x)$ son state denominate semplicemente f_n^k per motivi grafici.

(a) $f_n^1 = e^{-nx} \longrightarrow_{n\to\infty} f^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$
La convergenza non é, dunque, uniforme su tutto $[0, +\infty)$ perché la funzione limite non é continua. Tuttavia se consideriamo un $\delta > 0$ abbiamo che la convergenza é uniforme su qualsiasi intervallo del tipo $[\delta, +\infty)$ in quanto

$$\sup_{x\in[\delta,+\infty)} |f_n^1(x) - f^1(x)| = \sup_{x\in[\delta,+\infty)} |e^{-nx}| =_{(*)} e^{-n\delta} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$$

ove $(*)$ é giustificato dal fatto che $f_n^1(x)$ é una funzione decrescente in Λ ;

(b) $f_n^2 = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]} \longrightarrow_{n\to\infty} f^2(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
La convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^2(x) - f^2(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]} \right| = \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0\ ;$$

(c) $f_n^3 = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]} \longrightarrow_{n\to\infty} f^3(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
La convergenza non é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^3(x) - f^3(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}\right| \geq \left| f_n^3\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 \not\longrightarrow_{n\to\infty} 0\ .$$

C'é tuttavia convergenza uniforme in $(-\infty, 0] \cup [\delta, +\infty)\ \ \forall\ \delta > 0$ perché

$$\sup_{x\in(-\infty,0]\cup[\delta,+\infty)} |f_n^3(x) - f^3(x)| = \sup_{x\in(-\infty,0]\cup[\delta,+\infty)} \left|\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}\right| = 0 \ \text{ se }\ n > \frac{1}{\delta}\ ;$$

(d) $f_n^4 = \frac{x}{n^2} \longrightarrow_{n\to\infty} f^4(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
La convergenza non é uniforme perché

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^4(x) - f^4(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n^2}\right| \geq |f_n^4(n^3)| = n \longrightarrow_{n\to\infty} \infty\ .$$

La convergenza é, peró, uniforme in ogni sottointervallo compatto del tipo $[-M, M] \;\; \forall \; M > 0$, perché, essendo le f_n^4 crescenti raggiungeranno il valore massimo agli estremi dell'intervallo considerato e dunque

$$\sup_{x\in[-M,M]} |f_n^4(x) - f^4(x)| = \sup_{x\in[-M,M]} \left|\frac{x}{n^2}\right| = \frac{M}{n^2} \longrightarrow_{n\to\infty} \; 0 \; ;$$

(e) $f_n^5 = \frac{x}{x^2+n} \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^5(x) = 0 \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}$.
Per calcolare

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^5(x) - f^5(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{x^2+n}\right|$$

studieremo la derivata di $f_n^5(x)$:

$$D[f_n^5(x)] = \frac{n - x^2}{(x^2+n)^2} \geq 0 \iff n - x^2 \geq 0 \iff -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n}$$

quindi $f_n^5(x)$ ha un massimo quando $x = \sqrt{n}$. Dunque

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^5(x) - f^5(x)| = |f_n^5(\sqrt{n})| = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow_{n\to\infty} \; 0 \; .$$

Pertanto la convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$;

(f) $f_n^6 = \frac{x}{x^2+n^2} \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^6(x) = 0 \;\; \forall \; x \in \mathbb{R}$.
Procediamo come fatto per l'esercizio precedente calcolando la derivata di $f_n^6(x)$:

$$D[f_n^6(x)] = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2} \geq 0 \iff n^2 - x^2 \geq 0 \iff -n \leq x \leq n$$

quindi $f_n^6(x)$ ha un massimo quando $x = n$. Dunque

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^6(x) - f^6(x)| = |f_n^6(n)| = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} \; 0 \; .$$

Pertanto la convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$;

(g) $f_n^7 = \cos^n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^7(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } \; x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$.
Essendo le $f_n^7(x)$ periodiche possiamo restringerci a studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Sicuramente non vi é convergenza uniforme su tutto l'intervallo, perché non vi é convergenza puntuale in $x = \pi$ e la funzione limite é discontinua a differenza delle $f_n^7(x)$. Peró la convergenza é uniforme se consideriamo

$$I_\delta = [\delta, \pi - \delta] \cup [\pi + \delta, 2\pi - \delta] \;\; \forall \; \delta > 0$$

perché

$$\sup_{x\in I_\delta} |f_n^7(x) - f^7(x)| = \sup_{x\in I_\delta} |\cos^n(x)| = \cos^n(\delta) \longrightarrow_{n\to\infty} \; 0 \; ;$$

(h) $f_n^8 = \frac{1}{nx^2+1} \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^8(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x \neq 0 \\ 1 & \text{se } \; x = 0 \end{cases}$.
La convergenza non é, pertanto, uniforme in quanto le $f_n^8(x)$ sono continue su

tutto $\mathbb{R}$ mentre la funzione limite non lo é. Tuttavia la convergenza é uniforme in ogni insieme del tipo $J_\delta = (-\infty,-\delta] \cup [\delta,+\infty)\ \ \forall\ \delta > 0$ in quanto

$$\sup_{x\in J_\delta} |f_n^8(x) - f^8(x)| = \sup_{x\in J_\delta} \left|\frac{1}{nx^2+1}\right| \leq \sup_{x\in J_\delta} \frac{1}{nx^2} =_{(*)} \frac{1}{n\delta^2} \longrightarrow_{n\to\infty}\ 0$$

ove $(*)$ é giustificato dal fatto che $\frac{1}{nx^2}$ é strettamente cresecente per $x < 0$ e strettamente decrescente per $x > 0$;

(i) $f_n^9 = \frac{1}{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} \longrightarrow_{n\to\infty}\ f^9(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
La convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^9(x) - f^9(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty}\ 0\ ;$$

(j) $f_n^{10} = \arctan(n^2 - x) \longrightarrow_{n\to\infty}\ f^{10}(x) = \frac{\pi}{2}\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
La convergenza non é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ poiché

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^{10}(x) - f^{10}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\arctan(n^2 - x) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \left|\arctan(n^2 - (n^2+n)) - \frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \left|\arctan(-n) - \frac{\pi}{2}\right| \longrightarrow_{n\to\infty}\ \left|-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| = \pi\ .$$

Cé peró convergenza uniforme su intervalli del tipo $(-\infty, M]\ \ \forall\ M > 0$ in qunato, essendo le $f_n^{10}(x)$ decrescenti, abbiamo che

$$\sup_{x\in(-\infty,M]} |f_n^{10}(x) - f^{10}(x)| = \sup_{x\in(-\infty,M]} \left|\arctan(n^2 - x) - \frac{\pi}{2}\right| =$$

$$= \left|\arctan(n^2 - M) - \frac{\pi}{2}\right| \longrightarrow_{n\to\infty}\ 0\ ;$$

(k) $f_n^{11} = \sin(\pi n x^2)e^{-nx^2} \longrightarrow_{n\to\infty}\ f^{11}(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. La convergenza non é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ in quanto

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^{11}(x) - f^{11}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\sin(\pi n x^2)e^{-nx^2}\right| \geq \left|\sin\left(\pi n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2\right) e^{-n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{e}}\ .$$

Tuttavia la convergenza é uniforme sui J_δ dell'esercizio (h) $\forall\ \delta > 0$ in quanto

$$\sup_{x\in J_\delta} |f_n^{11}(x) - f^{11}(x)| = \sup_{x\in J_\delta} \left|\sin(\pi n x^2)e^{-nx^2}\right| \leq \sup_{x\in J_\delta} |e^{-nx^2}| = e^{-n\delta^2} \longrightarrow_{n\to\infty}\ 0\ ;$$

(l) $f_n^{12} = \frac{\sin(n^2x^2)}{n^2x^2+1} \longrightarrow_{n\to\infty}\ f^{12}(x) = 0\ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$. La convergenza non é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^{12}(x) - f^{12}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(n^2x^2)}{n^2x^2+1}\right| \geq \left|f_n^{12}\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\sin(1)}{2}\ .$$

Vi é peró convergenza sui J_δ dell'esercizio (h) $\forall\ \delta > 0$ in quanto

$$\sup_{x\in J_\delta} |f_n^{12}(x) - f^{12}(x)| = \sup_{x\in J_\delta} \left|\frac{\sin(n^2x^2)}{n^2x^2+1}\right| \leq \sup_{x\in J_\delta} \frac{1}{n^2x^2+1} = \frac{1}{n^2\delta^2+1} \longrightarrow_{n\to\infty}\ 0\ ;$$

(m) $f_n^{13} = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2 x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & x = 0 \end{cases} \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^{13}(x) = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

La convergenza é uniforme su $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ perché

$$\sup_{x\in\Lambda} |f_n^{13}(x) - f^{13}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}} \left|\frac{\sin(nx)}{n^2 x}\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}} \frac{n|x|}{n^2|x|} = \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} \; 0 \;;$$

(n) $f_n^{14} = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^{14}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$.

La convergenza non é uniforme perché le $f_n^{14}(x)$ sono continue su tutto $\mathbb{R}$, mentre la funzione limite non é continua. Tuttavia la convergenza é uniforme su J_δ dell'esercizio (h) $\forall\, \delta > 0$ in quanto

$$\sup_{x\in J_\delta} |f_n^{14}(x) - f^{14}(x)| = \sup_{x\in J_\delta} \left|\frac{\sin(nx)}{nx}\right| \leq \sup_{x\in J_\delta} \frac{1}{n|x|} = \frac{1}{n\delta} \longrightarrow_{n\to\infty} \; 0 \;;$$

(o) $f_n^{15} = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \longrightarrow_{n\to\infty} \; f^{15}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall\, x \in (0,1]$.

Poiché la funzione $f^{15}(x)$ non é limitata in $(0,1]$ abbiamo che la convergenza delle $f_n^{15}(x)$ non é uniforme su $(0,1]$.

2. L'insieme Λ di convergenza puntuale di una serie di funzioni $f_n(x)$ é l'insieme di tutti i valori di x per cui la serie converge. Per determinare la convergenza uniforme della serie di funzioni ci avvarremo del fatto che la convergenza totale implica l'uniforme, in quanto é piú semplice verificare che una serie di funzioni converge totalmente rispetto a vedere che converge uniformemente (tuttavia vi sono degli esercizi in cui la serie di funzioni non converge totalmente : nella loro risoluzione calcoleremo a mano la convergenza uniforme.)

   Abbiamo che una serie di funzioni converge totalmente sull'insieme Λ se

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in\Lambda} |f_n(x)| < \infty \;.$$

   Partiamo con la risoluzione dell'esercizio :

   (a) $\sum_{n\geq 1} n^x$: é la serie armonica generalizzata e quindi converge per $x \in (-\infty, -1)$ in quanto

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1 \;.$$

   La convergenza non é uniforme (e quindi nemmeno totale) in tale intervallo perché se $x = -1$ la serie diverge.

   Vi é peró convergenza totale (indi uniforme) sugli intervalli del tipo $(-\infty, -1-\delta]$, $\delta > 0$, in quanto

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in(-\infty,-1-\delta]} |n^x| = \sum_{n\geq 1} n^{-1-\delta} < \infty \;;$$

   (b) $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$: é una serie geometrica di ragione e^{-x} e dunque converge se e solo se

$$|e^{-x}| < 1 \Longleftrightarrow x > 0 \;.$$

La convergenza non é uniforme (dunque nemmeno totale) su $(0,+\infty)$ perché la serie non converge ai bordi dell'intervallo. Vi é peró convergenza totale (dunque uniforme) negli intervalli del tipo $[\delta,+\infty)\ \ \forall\ \delta>0$ perché

$$\sum_{n\geq 0}\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|e^{-nx}|=\sum_{n\geq 0}e^{-n\delta}<\infty\ ;$$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x\sin(nx)}{n^2}$: La serie converge su tutto $\mathbb{R}$ perché

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right|\leq |x|\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<\infty\ .$$

La convergenza non é, peró, uniforme (e quindi nemmeno totale) su tutto $\mathbb{R}$ perché il termine n-esimo non tende uniformemente a 0 in quanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right|\geq\left|\frac{n^2\sin(n^3)}{n^2}\right|=|\sin(n^3)|\not\longrightarrow_{n\to\infty}\ 0\ .$$

Tuttavia sui sottointervalli compatti $[-M,M], M>0$, la convergenza é totale (e quindi uniforme) in quanto

$$\sum_{n\geq 1}\sup_{x\in[-M,M]}\left|\frac{x\sin(nx)}{n^2}\right|\leq\sum_{n\geq 1}\sup_{x\in[-M,M]}\frac{|x|}{n^2}=M\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<\infty\ ;$$

(d) $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{k^2}$: La successione $f_k(x)=\frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{k^2}$ é continua $\ \ \forall\ x\in[-1,1]$. Su tale intervallo la convergenza é totale (indi uniforme e puntuale) in quanto

$$\sum_{k\geq 1}\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{k^2}\right|=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}<\infty\ ;$$

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$: La serie converge $\forall\ x\in\mathbb{R}$. La convergenza é totale su tutto $\mathbb{R}$ in quanto

$$\sum_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}\right|=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}<\infty$$

e quindi anche uniforme ;

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}},\ x\geq 0$: Le $f_n(x)$ sono continue su tutto $\mathbb{R}_{\geq 0}$. La convergenza é totale (indi uniforme e puntuale) su tutto $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in quanto

$$\sum_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}_{\geq 0}}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n-1}}<\infty\ ;$$

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$: Essendo

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\cos(nx)}{n(n+1)}\right|\leq\left|\frac{1}{n^2+n}\right|\leq\frac{1}{n^2}\Longrightarrow\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|\leq\frac{1}{n^2}$$

la serie converge totalmente, uniformemente e puntualmente $\forall\ x\in\mathbb{R}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$: La serie converge totalmente su $[-M,M]$, $M>0$, (e quindi anche uniformemente e puntualmente) in quanto

$$\sum_{n\geq 1}\sup_{x\in[-M,M]}\left|\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right| =_{(*)}\sum_{n\geq 1}\frac{\arctan\left(\frac{M}{n}\right)}{n}\leq_{(**)}\sum_{n\geq 1}\frac{M}{n^2}<\infty$$

ove $(*)$ é vero in quanto l'arcotangente é una funzione crescente e $(**)$ é vero in quanto $\arctan(x)\leq x$. Per la stima $(**)$ abbiamo che la convergenza puntuale in realtá vi é $\forall\ x\in\mathbb{R}$. Tuttavia su tutto $\mathbb{R}$ non vi é convergenza uniforme in quanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right|\geq_{(***)}\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{\arctan\left(\frac{2N-1}{n}\right)}{n}\geq_{(****)}\arctan(1)\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{1}{n}>_{(*****)}$$

$$>\frac{\pi}{4}\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{1}{2N}=\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{2N}(\underbrace{1+\cdots\cdots+1}_{N\quad\text{volte}})=\frac{\pi}{8}\ .$$

Le stime sono vere in quanto

- In $(***)$ abbiamo semplicemente detto che la successione calcolata nel sup é $\geq$ della successione calcolata in un qualsiasi punto ;
- In $(****)$ abbiamo stimato $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2N-1}$ in quanto $n\leq 2N-1$;
- In $(*****)$ abbiamo adoperato la stima precedente in quanto $n\leq 2N-1$ ci dice che $n<2N\Longrightarrow\frac{1}{n}>\frac{1}{2N}$.

Dunque non vi é nemmeno convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{nx}{1+nx^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2}\right)$: E' una serie di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che la serie data é telescopica :

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)=\frac{nx}{1+nx^2}\longrightarrow_{n\to\infty}\ S(x)=\begin{cases}0 & \text{se}\quad x=0\\ \frac{1}{x} & \text{se}\quad x\neq 0\end{cases}$$

quindi la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $S(x)$. Essendo $f_n(x)$ continua su $\mathbb{R}$ anche $S_n(x)$ lo é, mentre $S(x)$ non é continua in 0. Quindi la serie non converge uniformemente (indi nemmeno totalmente) in $\mathbb{R}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2^n(\sin(x))^{2n}}{n+1}$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$: La serie di funzioni é continua nell'intervallo considerato. Siccome per $|x|\leq\frac{\pi}{6}$ abbiamo che $|\sin(x)|\leq\frac{1}{2}$ abbiamo che $2\sin^2(x)\leq\frac{1}{2}\ \forall\ x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$. Dunque

$$|f_n(x)|=\left|(-1)^{n-1}\frac{2^n(\sin(x))^{2n}}{n+1}\right|\leq\frac{1}{2^n}\Longrightarrow\sup_{x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]}|f_n(x)|\leq\frac{1}{2^n}\ .$$

Tale stima ci dice che

$$\sum_{n\geq 1}\sup_{x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]}\left|(-1)^{n-1}\frac{2^n(\sin(x))^{2n}}{n+1}\right|\leq\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}<\infty$$

dunque la serie converge totalmente, uniformemente e puntualmente $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$.

3. Abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

La convergenza delle $f_n(x)$ é uniforme in quanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \ .$$

Inoltre

$$f_n'(x) = \frac{1}{n^2+x^2} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \ .$$

Sono dunque verificate le ipotesi del teorema di derivazione per successioni di funzioni (convergenza puntuale delle $f_n(x)$ e convergenza uniforme delle $f_n'(x)$), per cui

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

Consideriamo ora $g_n(x)$: Abbiamo che $g_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Per verificare la convergenza uniforme calcoliamo il sup di $g_n(x)$ mediante la sua derivata :

$$g_n'(x) = (1-4x^2n^2)e^{-2n^2x^2} \geq 0 \iff 1-4x^2n^2 \geq 0 \iff -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n}$$

ergo la successione ha un massimo in $x = \frac{1}{2n}$, quindi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| xe^{-2n^2x^2} \right| = \frac{1}{2\sqrt{e}n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Quindi la convergenza delle $g_n(x)$ é uniforme $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Tuttavia

$$g_n'(x) = (1-4x^2n^2)e^{-2n^2x^2} \longrightarrow_{n\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

e quindi non puó esservi convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$ perché passando al limite si perde la continuitá. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} g_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\right)' \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ .$$

4. Ricordiamo che il raggio di convergenza r di una serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ é pari a

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \ .$$

Trovato il valore di tale limite avremo che la serie converge per $|x| < r$. Per vedere cosa accade sul bordo dell'intervallo di convergenza $(-r, r)$ bisogna studiare la serie con $x = \pm r$ e vedere se converge .

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$: Abbiamo che

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)!}{n^n}}{\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$$

quindi la serie converge solo se $x = 0$;

(b) $\sum_{n\geq 0}(3+(-1)^n)^n x^n$: Al solito

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3+(-1)^n)^n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 3+(-1)^n} = \frac{1}{4}$$

ci dice che la serie converge per $|x| < \frac{1}{4}$. Ai bordi dell'intervallo la serie non converge perché il termine n-esimo non tende a 0 per $n \to \infty$;

(c) $\sum_{n\geq 1}(\cos(e^{-n}) - 1)x^n$: Il raggio di convergenza é

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\cos(e^{-n} - 1|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1-\cos(e^{-n})}} =_{(*)} \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{-2n}}{2} + o(e^{-2n})}} =$$

$$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{e^{-2}}{\sqrt[n]{2}}} = e^2$$

avendo sfruttato in $(*)$ lo sviluppo di McLaurin $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Dunque la serie converge per $|x| < e^2$.
Ai bordi dell'intervallo la serie non converge in quanto il termine n-esimo non tende a 0, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(e^{-n}) - 1}{e^{-2n}} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{(\cos(e^{-n}) - 1)}{e^{-2n}} = \nexists$$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{4\log(n)}}{x^n}$: Effettuiamo la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ cosí da ottenere

$$\sum_{n\geq 1} n^{4\log(n)}\, y^n$$

il cui raggio di convergenza é

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{4\log(n)}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n^{\frac{4\log(n)}{n}}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\log\left(n^{\frac{4\log(n)}{n}}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} e^{\frac{4\log^2(n)}{n}}} = 1 \ .$$

Dunque la serie converge per $|y| < 1$. Anche in questo caso la serie non converge sul bordo dell'intervallo in quanto il termine n-esimo non tende a 0 per $n \to \infty$.
Tornando alla variabile x abbiamo che

$$-1 < y < 1 \Longrightarrow -1 < \frac{1}{x} < 1 \Longleftrightarrow x < -1 \ \wedge \ x > 1$$

quindi la serie converge per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.