Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore:Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 7 - 11 Aprile 2014

1. Ricordiamo che ogni numero complesso z puó essere scritto in forma polare nella seguente maniera :
$$z = |z|e^{i\theta}$$
ove $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$, con
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \textbf{(Formula di Eulero)}\ .$$
Dunque
$$z = |z|e^{i\theta} \Longrightarrow z^n = |z|^n\ e^{in\theta} \Longrightarrow |z^n| = ||z|^n e^{in\theta}| = ||z|^n||e^{in\theta}| = |z|^n$$
essendo $|e^{in\theta}| = \sqrt{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)} = \sqrt{1} = 1$.

2. Il modulo di un numero complesso é stato definito nell'esercizio 1. .
La definizione di |z| é data considerando che ogni numero complesso z si puó scrivere nella forma $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) := a + ib$, dunque lo scopo dei seguenti esercizi sará scrivere i numeri complessi dati in quella forma e poi calcolare il modulo secondo la definizione :

   (a) $\frac{i}{4+3i} + \frac{1}{7+i} = \frac{i(4-3i)}{25} + \frac{7-i}{50} = \frac{3+4i}{25} + \frac{7-i}{50} = \frac{13+7i}{50} = \frac{13}{50} + i\frac{7}{50}$
   quindi $\left|\frac{i}{4+3i} + \frac{1}{7+i}\right| = \sqrt{\left(\frac{13}{50}\right)^2 + \left(\frac{7}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{218}}{50}$;

   (b) $\frac{2i}{2+i} - \frac{7}{2-i} = \frac{2i(2-i)}{5} - \frac{7(2+i)}{5} = \frac{2+4i}{5} - \frac{14+7i}{5} = -\frac{12+3i}{5} = -\frac{12}{5} - i\frac{3}{5}$
   quindi $\left|\frac{2i}{2+i} - \frac{7}{2-i}\right| = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{153}}{5} = \frac{3\sqrt{17}}{5}$;

   (c) $\frac{3-i}{(1+i)^2} - \frac{4i}{(i-2)^3} = \frac{3-i}{2i} - \frac{4i}{(3-4i)(i-2)} = \frac{(i-3)i}{2} - \frac{4i(3+4i)}{25(i-2)} = -\frac{1+3i}{2} - \frac{(16-12i)(i+2)}{125} =$
   $= -\frac{1+3i}{2} - \frac{44-8i}{125} = -\frac{213+359i}{250} = -\frac{213}{250} - i\frac{359}{250}$ quindi $\left|\frac{3-i}{(1+i)^2} - \frac{4i}{(i-2)^3}\right| = \sqrt{\left(\frac{213}{250}\right)^2 + \left(\frac{359}{250}\right)^2} =$
   $= \sqrt{\frac{174250}{250^2}} = \sqrt{\frac{697}{250}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{697}{10}}$;

   (d) $\frac{(2+i)^6}{8} = \left(\frac{2+i}{\sqrt{2}}\right)^6 = \left(\sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^6$: Per l'esercizio 1. abbiamo che $|z^n| = |z|^n$
   quindi $\left|\frac{(2+i)^6}{8}\right| = \left|\sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right|^6 = \left(\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^6 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^6 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$;

   (e) $\frac{4i}{2i-1} - \left(\frac{3+2i}{2-i}\right)^2 = -\frac{4i(2i+1)}{5} - \frac{5+12i}{3-4i} = \frac{8-4i}{5} - \frac{(5+12i)(3+4i)}{25} =$
   $= \frac{8-4i}{5} + \frac{33-56i}{25} = \frac{73-76i}{25} = \frac{73}{25} - i\frac{76}{25}$ quindi $\left|\frac{4i}{2i-1} - \left(\frac{3+2i}{2-i}\right)^2\right| = \sqrt{\left(\frac{73}{25}\right)^2 + \left(\frac{76}{25}\right)^2} =$
   $= \sqrt{\frac{11105}{5^4}} = \sqrt{\frac{2221}{5^3}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2221}{5}}$;

   (f) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2 - 7i = \frac{1}{2i} - 7i = -\frac{i}{2} - 7i = -\frac{15}{2}i \Longrightarrow \left|\left(\frac{1}{1+i}\right)^2 - 7i\right| = \frac{15}{2}$.

3. Ricordiamo le formule di somma e sottrazione di $\sin(x), \cos(x), \sinh(x), cosh(x)$:

   - $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$
   - $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
   - $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
   - $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(y)\cosh(x)$

   Inoltre ricordiamo che
   $$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\sinh(iz)}{i} = -i\sinh(iz)$$
   e
   $$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh(iz)\ .$$

   Queste formule sono le uniche necessarie per la risoluzione di questo esercizio :

   - $\sin(z) = \sin(a+ib) = \sin(a)\cos(ib)+\sin(ib)\cos(a) = \sin(a)\cosh(i^2b)-i\sinh(i^2b)\cos(a) =$

     $= \sin(a)\cosh(b) + i\sinh(b)\cos(a)$ quindi
     $$\begin{cases} \mathrm{Re}(\sin(z)) = \sin(a)\cosh(b) = \sin(\mathrm{Re}(z))\cosh(\mathrm{Im}(z)) \\ \mathrm{Im}(\sin(z)) = \cos(a)\sinh(b) = \cos(\mathrm{Re}(z))\sinh(\mathrm{Im}(z)) \end{cases} ;$$

   - $\cos(z) = \cos(a+ib) = \cos(a)\cos(ib)-\sin(a)\sin(ib) = \cos(a)\cosh(i^2b)+i\sin(a)\sinh(i^2b) =$

     $= \cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)$ quindi
     $$\begin{cases} \mathrm{Re}(\cos(z)) = \cos(a)\cosh(b) = \cos(\mathrm{Re}(z))\cosh(\mathrm{Im}(z)) \\ \mathrm{Im}(\cos(z)) = -\sin(a)\sinh(b) = -\sin(\mathrm{Re}(z))\sinh(\mathrm{Im}(z)) \end{cases} ;$$

   - $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{\sin(a)\cosh(b)+i\sinh(b)\cos(a)}{\cos(a)\cosh(b)-i\sin(a)\sinh(b)} =$
     $= \frac{(\sin(a)\cosh(b)+i\sinh(b)\cos(a))(\cos(a)\cosh(b)+i\sin(a)\sinh(b))}{\cos^2(a)\cosh^2(b)+\sin^2(a)\sinh^2(b)} = \frac{\sin(2a)+i\sinh(2b)}{2(\sinh^2(b)+\cos^2(a))}$ quindi
     $$\begin{cases} \mathrm{Re}(\tan(z)) = \frac{\sin(2a)}{2(\sinh^2(b)+\cos^2(a))} = \frac{\sin\left(2\mathrm{Re}(z)\right)}{2\left(\sinh^2\left(\mathrm{Im}(z)\right)+\cos^2\left(\mathrm{Re}(z)\right)\right)} \\ \mathrm{Im}(\tan(z)) = \frac{\sinh(2b)}{2(\sinh^2(b)+\cos^2(a))} = \frac{\sinh\left(2\mathrm{Im}(z)\right)}{2\left(\sinh^2\left(\mathrm{Im}(z)\right)+\cos^2\left(\mathrm{Re}(z)\right)\right)} \end{cases} ;$$

   - $\sinh(z) = \sinh(a+ib) = \sinh(a)\cosh(ib) + \sinh(ib)\cosh(a) =$
     $= \sinh(a)\cos(b) + i\sin(b)\cosh(a)$ quindi
     $$\begin{cases} \mathrm{Re}(\sinh(z)) = \sinh(a)\cos(b) = \sinh(\mathrm{Re}(z))\cos(\mathrm{Im}(z)) \\ \mathrm{Im}(\sinh(z)) = \cosh(a)\sin(b) = \cosh(\mathrm{Re}(z))\sin(\mathrm{Im}(z)) \end{cases} ;$$

   - $\cosh(z) = \cosh(a+ib) = \cosh(a)\cosh(ib) + \sinh(a)\sinh(ib) =$
     $= \cosh(a)\cos(b) + i\sinh(a)\sin(b)$ quindi
     $$\begin{cases} \mathrm{Re}(\cosh(z)) = \cosh(a)\cos(b) = \cosh(\mathrm{Re}(z))\cos(\mathrm{Im}(z)) \\ \mathrm{Im}(\cosh(z)) = \sinh(a)\sin(b) = \sinh(\mathrm{Re}(z))\sin(\mathrm{Im}(z)) \end{cases} ;$$

- $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} = \frac{\sinh(a)\cos(b)+i\sin(b)\cosh(a)}{\cosh(a)\cos(b)+i\sinh(a)\sin(b)} =$
$= \frac{(\sinh(a)\cos(b)+i\sin(b)\cosh(a))(\cosh(a)\cos(b)-i\sinh(a)\sin(b))}{\cosh^2(a)\cos^2(b)+\sinh^2(a)\sin^2(b)} = \frac{\sinh(2a)+i\sin(2b)}{2(\sinh^2(a)+\cos^2(b))}$ quindi

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\tanh(z)) = \frac{\sinh(2a)}{2(\sinh^2(a)+\cos^2(b))} = \frac{\sinh\big(2\mathrm{Re}(z)\big)}{2\big(\sinh^2\big(\mathrm{Re}(z)\big)+\cos^2\big(\mathrm{Im}(z)\big)\big)} \\ \mathrm{Im}(\tanh(z)) = \frac{\sin(2b)}{2(\sinh^2(a)+\cos^2(b))} = \frac{\sin\big(2\mathrm{Im}(z)\big)}{2\big(\sinh^2\big(\mathrm{Re}(z)\big)+\cos^2\big(\mathrm{Im}(z)\big)\big)} \end{cases}.$$

NB. Per semplificare i denominatori di $\tan(z)$ e $\tanh(z)$ sono state usate le formule fondamentali, cioé

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Notiamo che le formule di duplicazione si possono ottenere dalle formule di addizione.

4. (a) $\begin{cases} (\overline{z} - i)^3 = z + i \\ z^5 + 4z = 0 \end{cases}$: Partiamo con l'analisi della seconda riga del sistema :

$$z^5 + 4z = 0 \iff z(z^4+4) = 0 \iff \begin{cases} z = 0 \\ \textit{oppure} \\ z^4 = -4 = 4e^{i\pi} \end{cases}$$

Notiamo subito che se $z = 0$ il sistema é risolto perché $(-i)^3 = -i(i^2) = i$.
Consideriamo dunque l'equazione $z^4 = 4e^{i\pi}$: le sue soluzioni sono

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{k\pi}{2}}, \quad k = 0,1,2,3, \quad \text{cioé} \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i \\ z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = -1+i \\ z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi} = -1-i \\ z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} = 1-i \end{cases}.$$

Vediamo quali di queste soluzioni risolvono la prima riga del sistema :

$$(\overline{z}_1 - i)^3 = z_1 + i \iff (1-2i)^3 = 1+2i \implies z_1 \text{ non risolve il sistema ;}$$
$$(\overline{z}_2 - i)^3 = z_2 + i \iff (-1-2i)^3 = -1+2i \implies z_2 \text{ non risolve il sistema ;}$$
$$(\overline{z}_3 - i)^3 = z_3 + i \iff (-1)^3 = -1 \implies z_3 \text{ risolve il sistema ;}$$
$$(\overline{z}_4 - i)^3 = z_4 + i \iff (1)^3 = 1 \implies z_4 \text{ risolve il sistema .}$$

Dunque le soluzioni del sistema sono $z = 0$ e $z = \pm 1 - i$;

(b) $\begin{cases} \exp(w)\exp(z) = i - 1 \\ \exp(w) + \exp(z) = -1 - 2i \end{cases}$: Ricordiamo che se abbiamo un polinomio di secondo grado $x^2 - ax + b$ allora, chiamate α_1 ed α_2 le due radici del polinomio avremo che

$$\begin{cases} a = \alpha_1 + \alpha_2 \\ b = \alpha_1\alpha_2 \end{cases}.$$

Detto questo, $\exp(z)$ ed $\exp(w)$ saranno le due radici del polinomio di secondo grado

$$x^2 - (\exp(w) + \exp(z)) + \exp(z)\exp(w) = x^2 - (-1-2i)x + i - 1, \quad \text{cioé}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1-2i \pm \sqrt{(-1-2i)^2+4-4i}}{2} = \frac{-1-2i\pm 1}{2} = \begin{cases} -i \\ -1-i \end{cases}$$

quindi abbiamo che (possiamo anche invertire z con w)

$$\begin{cases} \exp(w) = -i = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right) \\ \exp(z) = -1-i = \sqrt{2}\,\exp\left(i\frac{\pi}{4}+2k\pi i\right) \end{cases} \iff \begin{cases} w = i\frac{\pi}{2}(4k-1) \\ z = \frac{\ln(2)}{2}+i\frac{\pi}{4}(8k+1) \end{cases} \qquad k\in\mathbb{Z}\,;$$

(c) $z^2 - \frac{1}{4}(z-\overline{z})^2 - 4 = 8i$: Poniamo $z = a+ib$ per ottenere l'equazione

$$(a+ib)^2 - \frac{1}{4}(a+ib-a+ib)^2 - 4 = 8i \iff a^2+2iab = 4+8i \iff \begin{cases} a^2 = 4 \\ 2ab = 8 \end{cases}$$

Dalla prima riga otteniamo che $a = \pm 2$ e, sostituendo nella seconda, questo ci dice che $b = \pm 2$. Pertanto le due soluzione dell'equazione iniziale risultano essere $z = 2+2i$ e $z = -2-2i$.

5. Abbiamo giá scritto nella risoluzione dell'esercizio 1. quale é la forma polare di un numero complesso. Applichiamo la definizione data ai seguenti esercizi:

(a) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \sqrt{3}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = -1-\sqrt{3}i = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\; e^{i\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)+2k\pi i} = 2e^{i\frac{4}{3}\pi+2k\pi i} =$

$= 2e^{i\frac{2}{3}\pi(3k+2)}, \quad k\in\mathbb{Z}\;;$

(b) $-4\sqrt{3}-4i = 4(-\sqrt{3}-i) = 4\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}e^{i\arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)+2k\pi i} = 8e^{i\frac{7}{6}\pi+2k\pi i} =$
$= 8e^{i\frac{\pi}{6}(7+12k)}, \quad k\in\mathbb{Z}\;;$

(c) $\frac{5-5i}{5+5\sqrt{3}i}\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right) = \left(\frac{(5-5i)(5-5\sqrt{3}i)}{100}\right)e^{i\frac{5}{12}\pi+2k\pi i} =$
$\left(\frac{-25(\sqrt{3}-1)-25(\sqrt{3}+1)i}{100}\right)e^{i\frac{5}{12}\pi+2k\pi i} = \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}-\frac{\sqrt{3}+1}{4}i\right)e^{i\frac{5}{12}\pi+2k\pi i} =$

$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}\right)^2}\; e^{i\frac{5}{12}\pi+2k\pi i+i\arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}+1}{4}}{-\frac{\sqrt{3}-1}{4}}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5}{12}\pi+2k\pi i+i\arctan(2+\sqrt{3})} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5}{12}\pi+2k\pi i+i\frac{17}{12}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}+2k\pi i} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}(12k-1)}, k\in\mathbb{Z}\;;$

(d) $4+7i = \sqrt{(4)^2+(7)^2}e^{i\arctan\left(\frac{7}{4}\right)+2k\pi i} = \sqrt{65}e^{i\left(\arctan\left(\frac{7}{4}\right)+2k\pi\right)}, \quad k\in\mathbb{Z}$.

NB. Per calcolare $\arctan\left(2+\sqrt{3}\right)$ é stata utilizzata l'uguaglianza

$$\arctan(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{2}\arctan(x) = \frac{\pi}{4} \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

che, calcolata in $x = \sqrt{3}$ ci dice che

$$\arctan(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \arctan(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi\;.$$

Essendo, tuttavia, il rapporto $\frac{b}{a} = 2+\sqrt{3}$, con $a, b < 0$, a tale angolo va aggiunto π per farlo arrivare nel terzo quadrante; indi $\arctan(2+\sqrt{3}) = \frac{17}{12}\pi$ nel nostro caso. Se l'uguaglianza utilizzata ci risulta arcana si provi a dimostrarla per esercizio.

6. Il raggio di convergenza R di una serie di potenze $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ in $\mathbb{C}$ é dato da

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Per vedere la convergenza sul bordo del disco di convergenza basterá vedere se converge $\sum_{n\geq 0} |a_n||z|^n$:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(2-i)^n}$: In questo caso abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2-i}\right|^n}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5} \Longrightarrow |z| < \sqrt{5} .$$

Sul bordo del disco di convergenza la serie diverge perché

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{z^n}{(2-i)^n} \right| = \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty ;$$

(b) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(n^2+2)2^n}$: Abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(n^2+2)2^n}\right|}} = 2 \Longrightarrow |z| < 2 .$$

Sul bordo del disco di convergenza abbiamo che

$$\sum_{n\geq 0} \left| \frac{z^n}{(n^2+2)2^n} \right| = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+2} < +\infty$$

ergo la serie converge per $|z| \leq 2$.

(c) $\sum_{n\geq 0} (3+i^n)^n z^n$: Essendo

$$|3+i^n| = \left|3 + e^{in\frac{\pi}{2}}\right| = \left|3 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| = \sqrt{10 + 6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt{10 + 6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow |z| < \frac{1}{4} .$$

Sul bordo del disco di convergenza la serie diverge essendo

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{10 + 6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \right)^n \frac{1}{4^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \sum_{n\equiv 0(4)} \left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n}{2}} + \sum_{n\equiv 1(4)} \left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n}{2}} +$$

$$+ \sum_{n\equiv 2(4)} \left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n}{2}} + \sum_{n\equiv 3(4)} \left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \sum_{n\geq 0}(1)^{2n} + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{4n+1}{2}} + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1} + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{4n+3}{2}} = +\infty$$

perché la prima delle quattro serie diverge ;

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2+e^{in}}$: Essendo

$$\left|\frac{1}{2+e^{in}}\right| = \left|\frac{1}{2+\cos(n)+i\sin(n)}\right| = \left|\frac{2+\cos(n)-i\sin(n)}{5+4\cos(n)}\right| = \frac{1}{\sqrt{5+4\cos(n)}}$$

abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt{5+4\cos(n)}}}} = 1 \Longrightarrow |z| < 1 \ .$$

Sul bordo del disco di convergenza la serie diverge perché il termine n-esimo non tende a 0 per $n \to \infty$;

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{i^n n^2}$: Il raggio di convergenza della serie é

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{1}{i^n n^2}\right|}} = 1 \Longrightarrow |z| < 1 \ .$$

Se $|z| = 1$ abbiamo che

$$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{z^n}{i^n n^2}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < \infty$$

quindi la serie converge per $|z| \leq 1$;

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin(in)z^n = \sum_{n\geq 1} i\sinh(n)z^n$: Abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sinh(n)}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^n\dfrac{1-e^{-2n}}{2}}} = \frac{1}{e\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1-e^{-2n}}{2}}} = \frac{1}{e}$$

quindi $|z| < \frac{1}{e}$. Sul bordo del disco di convergenza la serie diverge perché

$$\sum_{n\geq 1}|i\sinh(n)z^n| = \sum_{n\geq 1}\frac{\sinh(n)}{e^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{e^{2n}-1}{2e^{2n}}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{2e^{2n}} = \frac{1}{2} \neq 0 \ .$$

7. Abbiamo che

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\ \arg(z)$$

con $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se $z = x + iy$.
Con questa unica nozione possiamo risolvere i seguenti esercizi :

(a) $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}+2k\pi i}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} = e^{-\frac{\pi}{2}(4k+1)}, \quad k \in \mathbb{Z}$;

(b) $\mathrm{Log}(2i-3) = \ln(\sqrt{2^2+3^2}) + i\left(\arctan\left(\frac{-3}{2}\right) + 2k\pi\right) =$
$= \frac{\ln(13)}{2} + i\left(2k\pi - \arctan\left(\frac{3}{2}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$;

(c) $\mathrm{Log}\left(\frac{2i}{(1+i)^6}\right) = \mathrm{Log}\left(-\frac{1}{4}\right) = \mathrm{Log}(-1) + \mathrm{Log}\left(\frac{1}{4}\right) = \mathrm{Log}(e^{i\pi+2ki\pi}) - 2\ln(2) =$
$= i\pi(2k+1) - 2\ln(2), \quad k \in \mathbb{Z}$;

(d) $\mathrm{Log}\left(\frac{4i}{2+i} - \frac{(i-1)^2}{3+2i}\right) = \mathrm{Log}\left(\frac{4i(2-i)}{5} + \frac{2i(3-2i)}{13}\right) = \mathrm{Log}\left(\frac{72}{65} + i\frac{134}{65}\right) =$
$= \ln\left(\sqrt{\left(\frac{72}{65}\right)^2 + \left(\frac{134}{65}\right)^2}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{\frac{134}{65}}{\frac{72}{65}}\right) + 2k\pi\right) =$
$= \ln\left(2\sqrt{\frac{89}{65}}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{67}{36}\right) + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}$;

(e) $\mathrm{Log}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) + i\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) + 2k\pi\right) =$
$= \ln\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right) + i\left(2k\pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$;

(f) $\mathrm{Log}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{i^n t^n}{n!}\right) = \mathrm{Log}(e^{it}) = \ln\left|e^{it}\right| + i(\arctan(e^{it}) + 2k\pi) = i(t + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$.