Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Tutorato 6 - 28 Marzo 2014

1. Stabilire la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti successioni di funzioni:

   (a) $f_n^1 = e^{-nx}$

   (b) $f_n^2 = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$

   (c) $f_n^3 = \chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right]}$

   (d) $f_n^4 = \frac{x}{n^2}$

   (e) $f_n^5 = \frac{x}{x^2+n}$

   (f) $f_n^6 = \frac{x}{x^2+n^2}$

   (g) $f_n^7 = \cos^n(x)$

   (h) $f_n^8 = \frac{1}{nx^2+1}$

   (i) $f_n^9 = \frac{1}{n}\chi_{\left[n,n+\frac{1}{n}\right]}$

   (j) $f_n^{10} = \arctan(n^2 - x)$

   (k) $f_n^{11} = \sin(\pi n x^2)e^{-nx^2}$

   (l) $f_n^{12} = \frac{\sin(n^2x^2)}{n^2x^2+1}$

   (m) $f_n^{13} = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{n^2x} & x \neq 0 \\ \frac{1}{n} & x = 0 \end{cases}$

   (n) $f_n^{14} = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{nx} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   (o) $f_n^{15} = \begin{cases} \sqrt{n} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

2. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^x$

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x\sin(nx)}{n^2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{k^2}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}},\ x \geq 0$

   (g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2}\right)$

   (j) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{2^n(\sin(x))^{2n}}{n+1},\ x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

3. Sia $f_n(x) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ e $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$. Stabilire se $f_n(x)$ e $f_n'(x)$ convergono uniformemente e dire per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha che
$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)'.$$
Svolgere l'esercizio in maniera analoga per $g_n(x) = xe^{-2n^2x^2}$.

4. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (3+(-1)^n)^n x^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (\cos(e^{-n})-1) x^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^{4\log(n)}}{x^n}$