AM210 2013-2014: II Esonero

TEMA/ESERCIZIO 1

1.1 Sia $f \in C^1((a,b) \times (0,+\infty))$. Mostrare che, sotto opportune ipotesi (da formulare) $I(x) := \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt$ é definita ed é in $C^1(a,b)$, e vale la formula

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{df}{dx}(x,t)\, dt$$

1.2 Dedurre che se $f \in C([a,+\infty) \times [a,+\infty))$ ed $\exists h, k \in C((a,+\infty))$:

$$|f(x,y)| \le |h(x)|\,|k(y)| \qquad \forall x, y \in (a,+\infty) \qquad e \qquad \int_a^{+\infty} |h(x)| + |k(x)| dx < \infty$$

allora le funzioni $F_2(x) := \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy$, $F_1(y) := \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ sono continue ed assolutamente integrabili e si ha

$$\int_a^{\infty} F_2(x)dx = \int_a^{\infty} F_1(y)dy$$

1.3 Calcolare, usando 1.2, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *(Suggerimento:* $\frac{\sin t}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st}\, ds$ *)*

TEMA/ESERCIZIO 2

2.1 Sia $\epsilon_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt$. Provare che $\epsilon_k \to_k 0$ e

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \left| f(t) \;-\; \frac{1}{2\pi\epsilon_k} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) \left(\frac{1+\cos s}{2}\right)^k ds \right| \to_{k \to +\infty} 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$$

Spiegare perché ció implica la densitá dei polinomi trigonometrici in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$.

2.2 Dedurre il principio di identitá e la sviluppabilitá in serie di Fourier delle funzioni $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ che sono C^1 a tratti.

2.3 Scrivere la serie di Fourier della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ottenuta prolungando con periodicità la funzione

$$g(x) = \chi_{(0,\pi)} - \chi_{(-\pi,0)}$$

Studiarne la convergenza puntuale ed, eventualmente, uniforme.

TEMA/ESERCIZIO 3

3.1 Sia $\mathcal{A}(t)$ matrice $n \times n$ di funzioni $a_{ij} \in C^{\infty}(\mathbf{R})$. Provare che

(i) ogni soluzione del sistema differenziale lineare $\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t)$ é definita in tutto $\mathbf{R}$ ed é C^{∞} e addirittura analitica se i coefficenti a_{ij} sono costanti

(ii) che l'insieme delle soluzioni, $\mathcal{N}$, é un sottospazio lineare di dimensione n di $C^{\infty}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$

(iii) che $x^1, \ldots, x^n$ é base per $\mathcal{N}$ se e solo se il loro wronskiano é diverso da zero in ogni punto.

3.2 Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + \alpha e^{2t} \sin 2t \\ \\ y' = -x + 2y - \alpha e^{2t} \sin^2 t \end{cases} \tag{1}$$

per $\alpha = 0, 1$ e determinare le soluzioni limitate su $(-\infty, 0]$

TEMA/ESERCIZIO 4 .

4.1 Sia f Lipschitziana di costante L in $\mathbf{R}^n$. Sia $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Provare che

$$\exists \quad \gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : \quad \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad e \quad \gamma(0) = x_0$$

Siano $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$. Provare che $\dot{\gamma}_i(t) = f(\gamma_i(t)), \quad \forall t \in \mathbf{R}, i = 1, 2$

$$\Rightarrow \quad \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|_2 \leq e^{L|t|} \|\gamma_1(0) - \gamma_2(0)\|_2 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

4.2 Sia $F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ limitata. Stabilire se le soluzioni del sistema $\dot{x}(t) = -\nabla F(x(t))$ sono definite per tutti i tempi.

TEMA/ESERCIZIO 5 .

5.1 Enunciare e dimostrare il principio delle contrazioni. Mostrare il carattere essenziale delle ipotesi.

5.2 Mostrare che $C([a, b]$, munito della norma della convergenza uniforme, é completo. Mostrare che $C([a, b])$, munito della norma integrale non é completo.

5.3 Sia $C_0(\mathbf{R}^n)$ lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto. Stabilire se $C_0(\mathbf{R}^n)$, munito della norma della convergenza uniforme, é o no completo.

5.4 Sia c_0 lo spazio delle successioni convergenti a zero. Stabilire se c_0, munito della norma della convergenza uniforme, é o no completo.