AM210/2013-14: Tracce delle lezioni- Settimana XI

PROBLEMA DI CAUCHY
Esistenza e unicitá locale, unicitá globale, soluzione massimale.

Teorema di Picard (locale) *(esistenza/unicitá locale in ipotesi Lip_{loc})*
Dati $t_0 \in \mathbf{R}, x_0 \in \mathbf{R}^n$ ed $r > 0$, siano $\quad I_r := [t_0 - r, t_0 + r], \quad B_r := B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^n$.
Data $\quad f \in C(B_{2r} \times I_\rho, \mathbf{R}^n), \quad$ *sia* $\quad M := \sup\limits_{\overline{B}_{2r} \times I_\rho} \|f(x,t)\|$. *Supponiamo che*

$$\exists L > 0 : \qquad \|f(x,t) - f(y,t)\| \le L\|x - y\| \qquad \forall x, y \in \overline{B}_{2r}, \quad \forall t \in I_\rho$$

Sia $\quad \delta \in (0, \rho) \quad$ *tale che* $\quad \delta L < 1, \quad \delta M < r$. *Allora: per ogni* $x \in B_r$,

$$(i) \quad \exists\,!\, \gamma^x \in C^1(I_\delta, B_{2r}) : \qquad \gamma^x(t_0) = x, \quad \dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t), t) \quad \forall t \in I_\delta$$

$$(ii) \quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_{\infty,\delta} = \sup_{t \in I_\delta} \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \le \frac{1}{1 - \delta k}\,\|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r$$

Prova. $C(I_\delta, \mathbf{R}^n)$, munito della norma $\|\gamma\|_{\infty,\delta}$ é un Banach, e quindi

$$X := \{\gamma \in C(I_\delta, \mathbf{R}^n) : \quad \|\gamma(t) - x_0\| \le 2r \qquad \forall t \in I_\delta\}$$

é spazio metrico completo (rispetto alla metrica indotta) e, fissato $x \in B_r(x_0)$,

$$se \qquad T^x\gamma : t \to x + \int_{t_0}^t f(\gamma(\tau), \tau)d\tau, \quad t \in I_\delta, \qquad \text{é} \qquad T^x\gamma \in C(I_\delta, \mathbf{R}^n)$$

Poi, $\gamma \in X \Rightarrow \|(T^x\gamma)(t) - x_0\| \le \|x - x_0\| + \left|\int_{t_0}^t \|f(\gamma(\tau), \tau)\|d\tau\right| \le r + \delta M < 2r$

$\Rightarrow \qquad T^x(X) \subset X. \qquad$ Infine $\qquad \gamma, \beta \in X \quad \Rightarrow \quad \|T^x\gamma - T^x\beta\|_{\infty,\delta} \le$

$$\sup_{t \in I_\delta}\left|\int_{t_0}^t \|f(\gamma(\tau), \tau) - f(\beta(\tau), \tau)\|d\tau\right| \le \sup_{t \in I_\delta}\left|\int_{t_0}^t L\|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\|d\tau\right| \le L\delta\|\gamma - \beta\|_{\infty,\delta}$$

Siccome $\quad \delta L < 1, \quad T^x$ é una contrazione di $\quad X \quad$ in sé e quindi

$$\exists\,!\,\gamma^x \in X : \qquad T^x\gamma^x = \gamma^x. \qquad\qquad \text{Notiamo che} \quad (T\gamma^x)(0) = x.$$

Dunque, γ^x é l'unica soluzione, definita in I_δ , del problema di Cauchy

$$\dot\gamma^x(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in I_\delta, \qquad \gamma^x(0) = x$$

Infine, $\quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \le \|x - y\| + \sup\limits_{t \in [-\delta, \delta]} \left|\int_{t_0}^t \|f(\gamma^x(\tau)) - f(\gamma^y(\tau))\|d\tau\right| \le$

$$\|x - y\| + \delta k\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|\gamma^x - \gamma^y\|_{\infty,\delta} \le \frac{1}{1 - \delta k}\|x - y\| \qquad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

Proposizione 1. *Sia* $f \in C^1(O \times I, \mathbf{R}^n)$*,* $O \times I$ *aperto in* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$*. Siano* $\gamma \in C^1((a,b))$ *e* $\beta \in C^1((\tilde{a},\tilde{b}))$ *soluzioni dello stesso problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t), \qquad x(t_0) = x_0$$

Se $(a,b) \subset (\tilde{a},\tilde{b})$*, allora* $\gamma \equiv \beta$ *in* (a,b)*:* β *é un prolungamento della soluzione* γ*.*

Prova. Per il Teorema di Picard, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma \equiv \beta$ per $|t - t_0| \leq \delta$.

Quindi $\qquad \bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [t_0, t]\} \geq \delta$

Sia, per assurdo, $\bar{t} < b$; per continuitá é anche $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$. Dunque $\gamma(t), \beta(t)$ sono soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t),t) \qquad t \in (t_0, b) \qquad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$ per un $\sigma > 0$ piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \quad \gamma(\tau) = \beta(\tau),\ \forall \tau \in [0, t]\} \geq \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque $\gamma \equiv \beta$ in $[0, b)$ e, analogamente, $\gamma \equiv \beta$ in $(a, 0]$).

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale é, per via della Prop. 1, unica. Il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica $(t^-(x_0), t^+(x_0))$, o semplicemente, se non vi é ambiguitá, (t^-, t^+).

Se $\quad t^-(x_0) = -\infty, \quad$, diremo che (PC) ha soluzione per tutti i tempi negativi.
Se $\quad t^+(x_0) = +\infty, \quad$, diremo che (PC) ha soluzione per tutti i tempi positivi.
Se $\quad t^-(x_0) = -\infty, \quad t^+(x_0) = +\infty, \quad$ diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = x_0$ ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

ESEMPI.

Il problema di Cauchy $\quad \dot{x} = x, \quad x(0) = x_0 \quad$ ha come soluzione massimale $x(t) = x_0 e^t, \quad t \in \mathbf{R}$

mentre il problema $\quad \dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0 > 0 \quad$ ha come soluzione massimale $x(t) = \frac{x_0}{1 - t x_0}, \quad t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$.

Proposizione 2. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times I, \mathbf{R}^n)$*,* $\quad \dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)), \quad t \in [t_0, T)$*.*

Allora $\qquad M := \sup_{t \in [t_0, T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \gamma$ é prolungabile oltre T

Dunque, $\sup_{t \in (t^-, t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$ *(ad es. se* γ *é limitata)* $\Rightarrow t^\pm = \pm\infty$*.*

Prova. É $\|\gamma(t)-\gamma(s)\| = \|\int\limits_s^t f(\gamma(\tau))d\tau\| \leq M|t-s| \quad \forall s,t \in [t_0,T)$ e quindi γ é uniformemente continua in $[0,T)$. Ne deriva che

$$\exists \quad \gamma(T) := \lim_{t\to T^-} \gamma(t) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(T) = f(\gamma(T))$$

Detta allora $\hat{\gamma}$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $\hat{\gamma}(T) = \gamma(T)$, la funzione uguale a γ in $[0,T)$ ed uguale a $\hat{\gamma}$ in $[T, T+\delta]$ é di classe C^1 ed é soluzione del sistema differenziale in $[0,T+\delta]$.

Corollario 1. *Sia* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *tale che*

(i) $\{x : g(x) \leq g(x_0)\}$ é limitato $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ $\quad (ii)$ $< \nabla g(x), f(x) > \ \leq 0 \quad \forall x$

Allora le soluzioni del sistema $\dot{x} = f(x)$ *sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti,

$$\frac{d}{dt} g(x(t)) \ = < \nabla g(x(t)), \dot{x}(t) > = < \nabla g(x(t)), f(x(t)) > \quad \leq \ 0 \quad \forall t$$

e quindi la traiettoria $x(t)$ si mantiene, per tutti i tempi positivi, nella regione limitata $\{g(x) \leq g(x_0)\}$ e quindi $t^+ = +\infty$.

Corollario 2. *Data* $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *siano* $g^M := \{x : \ g(x) \leq M\}$ *e* $\Sigma^M := \{x : \ g(x) = M\}$. *Se*

(i) $g^M := \{x : g(x) \leq M\}$ é limitato $\quad (ii)$ $< \nabla g(x), f(x) > \ < 0 \quad \forall x \in \Sigma^M$

allora la soluzione del problema di Cauchy $\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$ *con* $g(x_0) \leq M$ *é definita per tutti i tempi positivi.*

Infatti $g(x(t)) \leq M \quad \forall t \in [0, t^+(x_0))$, giacché, se no, é ben definito

$T := \inf\{t > 0 : \quad g(x(t)) \geq M\}$ e quindi $g(x(t)) \leq M \forall t \leq T$ e $g(x(T)) = M$

Ma questo é assurdo perché, se $t < T$, $T - t$ piccolo, allora

$$(g \circ x)'(T) \ = < \nabla g(x(T)), x'(T) > = < \nabla g(x(T)), f(x(T)) > \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow$$

$$g(x(t)) = g(x(T)) + (t - T)\,[< \nabla g(x(T)), f(x(T)) > + \circ(1)] \quad > \quad g(x(T)) = M$$

Due esempi importanti: Sistemi Conservativi, Sistemi Hamiltoniani

Sistemi gradiente: $\dot{x} = -\nabla F(x) \qquad F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

Per applicare i Corollari, basta prendere $g = F$: $\quad < \nabla g(x), f(x) > \quad = -\|\nabla F\|^2$ e dedurre che se $\quad \{x \in \mathbf{R}^n : \quad F(x) \leq F(x_0)\}\quad$ é limitato per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$, allora le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si puó dire di piú:

se F é inferiormente limitata le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi.

Infatti, $\quad \int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))' \, d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \leq F(x(0)) - \inf F \Rightarrow \|x(t) - x(s)\| = \|\int_s^t \dot{x}(\tau) d\tau\| \leq \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\| d\tau \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \left(F(x(0)) - \inf F\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s < t$ e quindi $x(t)$ é uniformemente continua. Si conclude come nella dimostrazione della Proposizione 2.

Sistemi Conservativi, Hamiltoniani

Il sistema $\qquad \dot{x} = f(x) \qquad$ si dice *conservativo* se esiste un *integrale primo* , ovvero una $G \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tale che

$$< \nabla G(x), f(x) > \quad = 0 \quad \forall x, \quad \textit{e quindi} \quad \dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} G(x(t)) = 0 \quad \forall t$$

cioé G é costante lungo le traiettorie (*G si conserva durante il moto*). Se le superfici di livello $\{G = cost\}$ sono limitate, le soluzioni del sistema sono definite per tutti i tempi. Un caso importante é dato dai *sistemi Hamiltoniani* a n gradi di libertá:

$$\dot{x} = H_y(x, y), \qquad \dot{y} = -H_x(x, y)$$

ove $\quad H \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, $H = H(x, y)$, $x, y \in \mathbf{R}^n \quad$ é *funzione Hamiltoniana, o energia totale*; l'Hamiltoniana é un integrale primo:

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = H_x(x(t), y(t))\dot{x} + H_y(x(t), y(t))\dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} \equiv 0$$

Una importante classe di sistemi Hamiltoniani é data dai *sistemi Newtoniani conservativi*

$$(*) \qquad \ddot{x} = -\nabla U(x) \qquad x \in C^2(I, \mathbf{R}^n)$$

che descrivono il moto di un corpo sollecitato da un *campo di forze conservativo* $F = -\nabla U$. Posto $p = \dot{x}$, il *sistema del secondo ordine* $(*)$ si riscrive in forma Hamiltoniana, con *energia totale (=cinetica+potenziale)* $\quad H(x, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + U(x)$. Se $n = 1$, le traiettorie nel *piano delle fasi* (x, p) hanno equazione (cartesiana)

$$p = \pm\sqrt{2(c - U(x))}, \qquad c = H(x_0, p_0) \quad (x_0, p_0) \in \mathbf{R}^2$$

DISEGUAGLIANZA DI GRONWALL

Sia $0 \leq \varphi \in C([0,T),\mathbf{R})$. $\exists A_i > 0 :$ $\varphi(t) \leq A_0 + A_1 t + A_2 \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau \qquad \forall t \in [0,T)$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(t) \leq (A_0 + A_1 A_2^{-1})e^{A_2 t} - A_1 A_2^{-1} \quad \forall t \in [0,T)$$

Prova. $\varphi(t) \leq \psi(t) := A_0 + A_1 t + A_2 \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$, $\qquad \psi'(t) = A_1 + A_2\varphi(t) \leq$

$$\leq A_1 + A_2\psi(t) \quad \Rightarrow \quad \left(e^{-A_2 t}\psi(t)\right)' = e^{-A_2 t}\left(\psi'(t) - A_2\psi(t)\right) \leq A_1 e^{-A_2 t} \quad \overset{integrando}{\Longrightarrow}$$

$$e^{-A_2 t}\varphi(t) \ \leq \ e^{-A_2 t}\psi(t) \ \leq \psi(0) + \int_0^t A_1 e^{-A_2\tau}d\tau = A_0 - A_2^{-1}A_1 e^{-A_2 t} + A_2^{-1}A_1$$

Problema di Cauchy: esistenza globale. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$. *Se*

$$\forall T, \exists A_1(T), A_2(T) > 0 : \qquad \|f(x,t)\| \leq A_1(T) + A_2(T)\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n, |t| \leq T$$

allora le soluzioni di $\quad \dot{x}(t) = f(x(t),t) \quad$ *sono definite globalmente.*
PROVA. Sia $\gamma'(t) = f(\gamma(t))$ $\quad t \in (t^-,t^+)$ (soluzione massimale). Allora, $\forall T < t^+$,

$$\|\gamma(t)\| \leq \|\gamma(t_0)\| + \int\limits_{t_0}^t \|f(\gamma(\tau))\|d\tau \leq \|\gamma(t_0)\| + A_1 t + A_2 \int\limits_{t_0}^t \|\gamma(\tau)\|d\tau \quad \forall t \leq T \qquad \overset{Gronwall}{\Longrightarrow}$$

$\|\gamma(t)\| \leq (\|\gamma(t_0)\| + A_1 A_2^{-1})e^{A_2 t} - A_1 A_2^{-1}, \quad \forall t \leq T \qquad \overset{Proposizione\ 2}{\Longrightarrow} t^+ = +\infty$. E cosí pure $t^- = -\infty$.

Problema di Cauchy: DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI INIZIALI

Sia $f \in Lip_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *e* $\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in [0,T], \quad \gamma^x(0) = x.$ *Sia* $R := \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\gamma^x(t) - x\|$. *Esiste* $L > 0$ *tale che, se* $\|x - y\| \leq Re^{-LT}$, *allora*

$$t^+(\gamma^y) > T \quad e \quad \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \leq \|x-y\|\, e^{Lt} \quad \forall t \in [0,T]$$

Prova. Ricordiamo che se $\exists L > 0 :$ $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x-y\|$ $\forall x,y \in \mathbf{R}^n$ e $\dot{\beta}(t) = f(\beta(t))$, $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ allora $\|\gamma(t) - \beta(t)\| \leq \|\gamma(0) - \beta(0)\|e^{Lt}$ $\forall t \geq 0$. Dunque, se $\varphi \in C_0^\infty(B_{3R}(x))$, $\varphi \equiv 1$ in $B_{2R}(x)$, la $\widetilde{f} := \varphi f$ é Lipschitziana di costante, diciamo, L e $\widetilde{\gamma^y}$, soluzione del problema di Cauchy $\dot{\eta} = \widetilde{f}(\eta), \eta(0) = y$, é definita per tutti i tempi e $\|\widetilde{\gamma^y}(t) - \widetilde{\gamma^x}(t)\| \leq \|y-x\|e^{LT}$. Notiamo che $f \equiv \widetilde{f}$ in $B_{2R}(x)$, $\gamma^x([0,T]) \subset B_R(x)$ $\Rightarrow$ $\gamma^x \equiv \widetilde{\gamma^x}$ in $[0,T]$ e quindi

$$\|x-y\| \leq Re^{-Lt} \quad \Rightarrow \quad \|\widetilde{\gamma^y}(t)\| \leq \|\widetilde{\gamma^y}(t) - \widetilde{\gamma^x}(t)\| + \|\widetilde{\gamma^x}(t)\| \leq \|y-x\|e^{LT} + R \leq 2R$$

$\forall\, t \in [0,T]$ e quindi $\widetilde{f}(\widetilde{\gamma^y}(t)) = f(\widetilde{\gamma^y}(t))$ e quindi $\gamma^y \equiv \widetilde{\gamma^y}$ in $[0,T]$. Di qui la tesi.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $\quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t)),\ a_{ij} \in C(\mathbf{R}), \quad i,j = 1, \ldots, n \quad$ matrice $n \times n$.
Siccome, per ogni $T > 0$ risulta $\quad \|\mathcal{A}(t)x\| \leq \left(\sup_{|t|\leq T} \|\mathcal{A}(t)\|\right) \|x\|,\quad$ **le soluzioni** del *sistema differenziale lineare a coefficenti variabili* di n equazioni nelle n incognite $x_i(t)$

$$(*) \qquad \dot{x} = \mathcal{A}(t)x, \quad \text{ovvero} \quad \dot{x}_i(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{in}(t)x_n(t), \quad i = 1, \ldots, n$$

sono definite per tutti i tempi (segue dal Teorema di esistenza globale).

Proposizione L'insieme $\mathcal{N} := \{x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : \quad Lx := \dot{x} - \mathcal{A}x = 0\}$ di tutte le soluzioni di $(*)$ é un sottospazio linare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione n.

Prova. Dobbiamo provare tre fatti:
1. $\mathcal{N}$ é un sottospazio lineare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, ovvero **combinazioni lineari** $\alpha x(t) + \beta y(t)$ di soluzioni sono ancora soluzioni.
Ed infatti $\mathcal{N}$ é il **nucleo dell' operatore lineare** L.
2. Esistono $x^i \in \mathcal{N}, \quad i = 1, \ldots, n$ **linearmente indipendenti**, (in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ cioé esistono n soluzioni x^i tali che $\quad \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \quad \forall i$.
Infatti, presi $v^i \in \mathbf{R}^n, \quad i = 1, \ldots, n$ linearmente indipendenti e detta x^i la soluzione di $(*)$ tale che $x^i(0) = v^i$, le x^i sono n soluzioni linearmente indipendenti.
3. Tali x^i **generano** $\mathcal{N}$: $\quad \forall x \in \mathcal{N}, \quad \exists \quad c = (c_1, \ldots, c_n) : \quad x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) \quad \forall t$.
Infatti, se x é soluzione, siano $c_i \in \mathbf{R}$ tali che $x(0) = \sum_{i=1}^n c_i v^i = \sum_{i=1}^n c_i x^i(0)$ e sia $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$. Siccome x e $\hat{x}$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy, allora $x \equiv \hat{x}$ (per il Teorema di Picard).

Definizione. Un sistema di n *soluzioni linearmente indipendenti* x^i di $(*)$ si chiama **sistema fondamentale** per $(*)$. Se x^i é sistema fondamentale, la matrice

$$\mathcal{X}(t) = \left(x^1, \ldots, x^n\right) = (x^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$$

avente per colonne i vettori x^i si dice **matrice fondamentale**.

Notiamo che se $\dot{\mathcal{X}} := (\dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n) = (\dot{x}^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ é la matrice che ha per elementi le derivate degli elementi di $\mathcal{X}$, allora, con tale notazione,

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\mathcal{X}$$

Se $\mathcal{X}(t)$ é matrice fondamentale e $\mathcal{X}(0)$ é la matrice identitá, cioé $\mathcal{X}(0) = (e_1, \ldots, e_n)$ ovvero $x^i_j(0) = \delta_{ij}$, $\mathcal{X}$ é **matrice principale**.

Se $\mathcal{X}$ é matrice fondamentale allora le soluzioni di $(*)$ si scrivono nella forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(t) = \mathcal{X}(t)c \qquad c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n \qquad \textbf{(Integrale Generale)}$$

Se x é matrice principale $\quad \mathcal{X}(t)c, \quad c \in \mathbf{R}^n \quad$ é la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = c$.

Definizione. Date $\quad x^i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), i = 1, \ldots, n \quad$ sia $\quad \mathcal{X}(t) := (x^i_j(t))$. $W(t) := \det \mathcal{X}(t) \qquad$ si dice determinante **Wronskiano** delle x^i.

Se $\quad \exists t_0 : \quad W(t_0) \neq 0 \quad$ allora $\quad x^i(t_0) \quad$ sono n vettori di $\mathbf{R}^n$ linearmente indipendenti e quindi le funzioni x^i sono linearmente indipendenti (in $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$). Il viceversa é falso in generale, : $\quad x^i$ linearmente indipendenti non implica $\quad \det(x^i_j(t)) \neq 0$ (anche solo per qualche t). $\quad$ Ad esempio, $\quad x^1(t) = (1, t), \quad x^2(t) = (t, t^2) \quad$ sono funzioni (vettori di $C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^2)$) linearmente indipendenti, ma $\quad x^2(t) = t x^1(t) \quad \forall t$, cioé, per ogni t, $x^1(t)$ e $x^2(t)$ sono vettori (di $\mathbf{R}^2$) linearmente dipendenti e quindi il Wronskiano di x^1, x^2, $\det(x^i_j(t)$ é nullo per ogni t! $\quad$ Tuttavia

Proposizione 1. Siano $x^i, i = 1, \ldots, n$ soluzioni di $(*)$, $\mathcal{X}(t) := (x^i_j(t))$.

$\mathcal{X}(t)$ é matrice fondamentale $\quad \Leftrightarrow \quad \det \mathcal{X}(t) \neq 0 \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{X}(t))^{-1} \quad$ esiste $\quad \forall t$

Prova. $\quad$ C'é solo da provare la prima $\Rightarrow$. $\quad$ Supponiamo, per assurdo, che esista t_0 tale che $W(t_0) = 0$ e quindi che i vettori $x^i(t_0)$ siano linearmente dipendenti: esistono c_i costanti non tutte nulle tali che $\quad \sum_{i=1}^n c_i x^i(t_0) = 0$. $\quad$ Ora, se $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t), \quad \hat{x}$ é soluzione che si annulla in t_0, e quindi, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy, $\quad \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = \hat{x} \equiv 0, \quad$ cioé le x^i sono linearmente dipendenti.

Proposizione 2. Sia $\mathcal{X}$ matrice fondamentale. Allora

$$(\dot{\mathcal{X}^{-1}}) = -\mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}$$

Infatti, come si vede subito, se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono matrici $n \times n$ di funzioni C^1, allora $\quad \dot{\overbrace{\mathcal{A}\mathcal{B}}} = \dot{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \mathcal{A}\dot{\mathcal{B}}$, e quindi (detta $\quad \mathcal{O} \quad$ la matrice nulla) $\quad \mathcal{O} = \dot{\mathcal{I}d} = \dot{\overbrace{\mathcal{X}^{-1}\mathcal{X}}} \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{O} = \dot{\overbrace{\mathcal{X}^{-1}}}\mathcal{X} + \mathcal{X}^{-1}\dot{\mathcal{X}} = (\dot{\mathcal{X}^{-1}})\mathcal{X} + \left(\mathcal{X}^{-1}\right)\mathcal{A}\mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad (\dot{\mathcal{X}^{-1}}) + \left(\mathcal{X}^{-1}\right)\mathcal{A} = \mathcal{O}$$

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

LA FORMULA DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Siano $a_{ij}, b_i \in C(\mathbf{R})$, $\quad i,j = 1,\dots,n$, $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $\quad b = (b_1,\dots,b_n)$.
Sia $\overline{x}$ soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b \qquad\qquad (**)$$

Allora , se $\mathcal{N} = KerL$ é lo spazio delle soluzioni del **sistema lineare omogeneo associato** $\dot{x} = \mathcal{A}x$, si ha che

$$x \in \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad (\dot{\overline{x} + x}) = \mathcal{A}(\overline{x} + x) + b \quad \Rightarrow \quad \overline{x} + \mathcal{N} \subset \{x : \dot{x} = \mathcal{A}x + b\}$$

Viceversa, se y é soluzione di $(**)$, allora

$$\dot{y} = \mathcal{A}y + b \quad \Rightarrow \quad (\dot{y - \overline{x}}) = \mathcal{A}(y - \overline{x}) \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{x} + \mathcal{N}$$

e quindi

$$\{x : \dot{x} = \mathcal{A}x + b\} = \overline{x} + \mathcal{N} \qquad (\textbf{integrale generale di}) \quad (**)$$

Vogliamo ora dare una formula per ottenere una soluzione particolare del sistema non omogeneo a partire da una matrice fondamentale per il sistema omogeneo associato; in effetti, troveremo l'integrale generale di $(**)$. Sia $\mathcal{X}$ matrice principale del **sistema lineare omogeneo associato** $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Allora

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b, \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{X}^{-1}b = \mathcal{X}^{-1}\dot{x} - \mathcal{X}^{-1}\mathcal{A}x =$$

$$= \mathcal{X}^{-1}\dot{x} + (\dot{\mathcal{X}^{-1}})x(t) = \overbrace{\mathcal{X}^{-1}x}^{\cdot} \;\Rightarrow \quad \mathcal{X}^{-1}x(t) = \mathcal{X}^{-1}(0)x(0) + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}b\,d\tau =$$

$$= x(0) + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}b\,d\tau \quad \Rightarrow \quad x(t) = \mathcal{X}x_0 + \mathcal{X}\int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau)$$

Verifichiamo che tale $x(t)$ é soluzione: $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{X}x_0 + \mathcal{X}\int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau\right) = \dot{\mathcal{X}}x_0 +$

$$+\dot{\mathcal{X}}\int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau + \mathcal{X}(t)\mathcal{X}^{-1}(t)b(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}\left(x_0 + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau\right) + b = \mathcal{A}x + b$$

Quindi, se $\mathcal{X}(0) = \mathcal{I}d$, la soluzione di $(**)$ tale che $x(0) = x_0$ é data dalla

$$x(t) = \mathcal{X}(t)\left(x_0 + \int_0^t \mathcal{X}^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau\right) \qquad \textbf{formula della variazione delle costanti}$$

ESERCIZI ED ESEMPI

Esempio 1. Le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3y^2 \\ \dot{y} &= -2y^3x^2 \end{aligned}$$

sono definite per tutti i tempi positivi: basta prendere $g(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ per ottenere

$$\frac{d}{dt}g(x(t),y(t)) = \frac{d}{dt}(\frac{x^2+y^2}{2}) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4y^2 - 2y^4x^2 \leq 0 \qquad \forall t$$

Invece, $t^- > -\infty$ quale che sia la condizione iniziale. Questo si puó vedere cosi':

$$\frac{d}{dt}[x(t)^2y(t)^2] = 2xy^2\dot{x} + 2yx^2\dot{y} = -2xy^2(x^3y^2) - 2yx^2(2y^3x^2) = -6(x^2y^2)^2$$

cioé $\quad z(t) := x(t)^2y(t)^2 \quad$ risolve $\quad \dot{z} = -6z^2 \quad$ e quindi

$$z(t) = \frac{z(0)}{1+6z(0)t} \qquad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$$

Siccome $\quad z(0) = x(0)^2y(0)^2 \quad$ e

$$\dot{x} = -x(x^2y^2) = -x\frac{z(0)}{1+6z(0)t} \qquad\qquad \dot{y} = -2y(x^2y^2) = -2y\frac{z(0)}{1+6z(0)t}$$

troviamo $\quad \log\frac{x(t)}{x(0)} = -\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \qquad \log\frac{y(t)}{y(0)} = -2\int\limits_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s}ds, \quad$ ovvero

$$x(t) = \frac{x(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{6}}} \qquad y(t) = \frac{y(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{3}}} \qquad t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$$

Notiamo anche che

$$\frac{\dot{y}}{y} = -2x^2y^2 = 2\frac{\dot{x}}{x} \quad \Rightarrow \quad \log\frac{y(t)}{y(0)} = 2\log\frac{x(t)}{x(0)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{y(0)}{x(0)^2}x(t)^2$$

Esempio 2. Le soluzioni di

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy^2(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= -yx^4(x^2+y^2) \end{aligned}$$

sono definite $\forall t$:

$$\frac{d}{dt}(\frac{x^4}{2} + y^2) = 2x^3\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^4y^2(x^2+y^2) - 2y^2x^4(x^2+y^2) \equiv 0$$

e quindi g *é costante lungo le traiettorie,* ovvero le traiettorie sono contenute negli insiemi di livello di g, che sono visibilmente limitati.

OSSERVAZIONE. Sia $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ un campo di vettori in $\mathbf{R}^n$. Se

$$\exists\, F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) : \qquad f = \nabla F$$

F si dice **potenziale di** f e si dice che f deriva dal potenziale F (che, se $n = 1$, abbiamo chiamato primitiva) od anche che f **é un campo conservativo** .

Notare che se un potenziale cé é anche unico, a meno di costanti additive. Inoltre, se $n = 1$, ogni f ammette primitiva, e cioé deriva da un potenziale. Tuttavia ció non é piú vero in generale se $n > 1$.

Infatti, se $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ e $f = \nabla F$, allora $J_f = \mathcal{H}_F$, e quindi dal Lemma di Schwartz segue che J_f é matrice simmetrica, ovvero che

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Osserviamo che la condizione necessaria data da Schwartz é anche sufficente. Verifichiamolo nel caso $n = 2$.

Sia $a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, e quindi $a_y = b_x$. Determiniamo F.

Da $a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, troviamo, integrando, $F(x, y) = F(0, y) + \int_0^x a(s, y)ds$.

Ma $F(0, y) = F(0, 0) + \int_0^y F_y(0, t)dt = F(0, 0) + \int_0^y b(0, t)dt$ e quindi

$$F(x, y) = F(0, 0) + \int_0^y b(0, t)dt + \int_0^x a(s, y)ds$$

Siccome non abbiamo usato l'ipotesi $a_y = b_x$, una funzione siffatta non avrá in generale per gradiente il campo (a, b). Mostriamo che ció accade se $a_y = b_x$: per il TFC, risulta subito che $F_x(x, y) = a(x, y)$, mentre, per il teorema di derivazione sotto segno di integrale, da $a_y = b_x$ e, di nuovo, dal TFC, otteniamo

$$F_y(x, y) = b(0, y) + \int_0^x a_y(s, y)ds = b(0, y) + \int_0^x b_x(s, y)ds = b(0, y) + [b(x, y) - b(0, y)]$$

A FUTURA MEMORIA

Non é in generale vero che, se Ω é un aperto connesso in $\mathbf{R}^2$, allora

$$a_y \equiv b_x \quad \text{in} \quad \Omega \quad \Rightarrow \quad \exists F \in C^1(\Omega, \mathbf{R}) : \quad \nabla F(x, y) = (a(x, y), b(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

FORMULA DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI. UN ESEMPIO: oscillazioni armoniche forzate

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

Posto $\quad p = \dot{x}, \quad$ l'equazione si scrive equivalentemente, in forma di sistema,

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & p \\ \dot{p} & = & -x + f(t) \end{array}$$

La matrice principale del sistema omogeneo associato é

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \qquad \textit{mentre} \qquad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Dunque l'Integrale Generale della equazione non omogenea é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x(0) \\ p(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\int\limits_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau \\ \int\limits_0^t f(\tau)\cos\tau d\tau \end{pmatrix} \right] =$$

e quindi

$$x(t) = x(0)\cos t + p(0)\sin t - \cos t \int\limits_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau + \sin t \int\limits_0^t f(\tau)\cos\tau d\tau \qquad (IG)$$

Osserviamo che le soluzioni dell'oscillatore armonico (cioé con $f = 0$) sono tutte 2π periodiche. La situazione é ovviamente diversa in presenza del termine forzante $f \neq 0$. Da (IG) si legge che

- se f non é 2π periodica le soluzioni non sono piú periodiche

-se f é 2π periodica le soluzioni sono periodiche se e solo se $\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\cos\tau d\tau = \int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\sin\tau d\tau = 0.$