AM210/2013-14: Tracce delle lezioni- Settimana XII

SISTEMI LINEARI A COEFFICENTI COSTANTI

Esponenziale di una matrice, matrice principale. Siano , $a_{ij} \in \mathbf{R}$.

$$\text{Se} \quad \mathcal{A} = (a_{ij})_{|i,j=1,\dots,n}, \qquad \text{é} \qquad e^{\mathcal{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\mathcal{A}^n}{n!}$$

Tale serie converge nello spazio (di Banach) delle matrici $\mathcal{M}_{n\times n}$ dotato della norma $\|\mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|_2\le 1} \|\mathcal{A}x\|_2$ perché $\|\sum_{n=N}^{N+p} \frac{\mathcal{A}^n}{n!}\| \le \sum_{n=N}^{N+p} \frac{\|A\|^n}{n!} \le \epsilon$ se $N \ge N_\epsilon, p \in \mathbf{N}$. Argomentando come per la serie esponenziale in $\mathbf{C}$ si vede che

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A}} e^{\mathcal{B}}$$

Ne consegue che $e^{\mathcal{A}} e^{-\mathcal{A}} = \mathcal{I}d$ e quindi $e^{\mathcal{A}}$ é invertibile e $(e^{\mathcal{A}})^{-1} = e^{-\mathcal{A}}$. Inoltre,

$$\frac{d}{dt} e^{t\mathcal{A}} := \lim_{\tau\to 0} \frac{e^{(t+\tau)\mathcal{A}} - e^{t\mathcal{A}}}{\tau} = e^{t\mathcal{A}} \lim_{\tau\to 0} \frac{e^{\tau\mathcal{A}} - \mathcal{I}}{\tau} = e^{t\mathcal{A}} \lim_{\tau\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{n-1} \frac{\mathcal{A}^n}{n!} = \mathcal{A}\, e^{t\mathcal{A}}$$

Siccome $e^{t\mathcal{A}}$ é invertibile per ogni t, $e^{t\mathcal{A}}$ é matrice fondamentale (anzi, principale) per $\dot{x} = \mathcal{A}x$, che genera quindi il

$$\textbf{flusso} \quad '\textbf{lineare}' \qquad t \to e^{t\mathcal{A}} x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n$$

ESEMPI.

$$(i) \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad \text{Se} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{allora} \quad \mathcal{B}^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k \beta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \beta^{2k} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \beta^{2k+1} \\ (-1)^k \beta^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi}$$

$$e^{\mathcal{B}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{2k!} & \frac{(-1)^{k+1} \beta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \frac{(-1)^k \beta^{2k+1}}{(2k+1)!} & \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{2k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad \text{e se}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha\mathcal{I} + \mathcal{B} \qquad \text{é} \qquad e^{t\mathcal{A}} = e^{t\alpha\mathcal{I}} e^{t\mathcal{B}} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

RIDUZIONE A FORMA CANONICA

Sistemi lineari $n \times n$. Data $\mathcal{A} := (a_{ij})$ matrice $n \times n$, le resta associato il sistema di n (EDO) in n incognite $x_i = x_i(t)$:

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \qquad \text{ovvero} \qquad \dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (EDO)$$

Sia $\dot{x} = \mathcal{A}x$, $\mathcal{P}$ matrice $n \times n$ invertibile. Allora

$$\dot{\overbrace{\mathcal{P}^{-1}x}} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} = \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{A}x) = [\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}]\mathcal{P}^{-1}x$$

Ovvero, posto $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$, (EDO) si riscrive nella forma equivalente

$$\dot{y} = [\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}]y$$

Come noto, scelte opportune di $\mathcal{P}$ permettono di portare $\mathcal{A}$ in forme piú semplici, le *forme canoniche*. Ad esempio, se $\mathcal{A}$ ha n autovettori ξ^j linearmente indipendenti, corrispondenti ad autovalori λ_j, e $\mathcal{P}$ é la matrice che ha per colonne gli autovettori, allora $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é matrice diagonale, con elementi della diagonale dati dai λ_j.

IL CASO GENERICO: autovalori distinti, sistemi diagonalizzabili

Sia e_i, $i = 1, \ldots, n$ base canonica di $\mathbf{R}^n$. Sia $\mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n)$ (matrice diagonale avente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ come elementi sulla diagonale principale). Il (piú semplice) sistema differenziale

$$\dot{x} = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x \qquad\qquad x(t) = ((x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

é formato dalle n equazioni disaccoppiate $\quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$
Il sistema ammette quindi le soluzioni

$$x^i = e^{\lambda_i t}e_i, \qquad \text{o, in forma matriciale,} \qquad x(t) = e^{t\mathcal{D}}x(0)$$

Queste soluzioni sono a Wronskiano diverso da zero e quindi **formano un sistema fondamentale** e ogni altra soluzione é della forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t}\right), \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad \textbf{(Integrale Generale)}$$

Se tra i λ_j ve ne é uno complesso, diciamo $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$, a questo corrisponde l'equazione (per la funzione incognita -complessa- $z(t) = x(t) + iy(t)$)

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) = \lambda z(t) = (\alpha + i\beta)(x(t) + iy(t)) = (\alpha x(t) - \beta y(t)) + i(\beta x(t) + \alpha y(t))$$

ovvero il sistema di due equazioni nelle funzioni incognite-reali- x ed y:

$$\begin{array}{rcll} \dot{x} &=& \alpha x - \beta y & \quad * \\ \dot{y} &=& \beta x + \alpha y & \quad * \end{array}$$

L'equazione $\quad \dot{z} = \lambda z, \quad$ ha le soluzione -complesse-

$$z(t) = x(t) + iy(t) = (x(0) + iy(0))e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}(x(0) + iy(0))(\cos\beta t + i\sin\beta t) =$$

$$= e^{\alpha t}[(x(0)\cos\beta t - y(0)\sin\beta t) + i(y(0)\cos\beta t + x(0)\sin\beta t)]) \qquad \text{ovvero}$$

$$\begin{array}{rcll} x(t) &=& e^{\alpha t}\,(x(0)\cos\beta t - y(0)\sin\beta t) & \quad \heartsuit \\ y(t) &=& e^{\alpha t}\,(y(0)\cos\beta t + x(0)\sin\beta t) & \quad \heartsuit \end{array}$$

Se $\mathcal{A}$ ha n **autovalori reali distinti**, allora $\mathcal{A}$ **ha una base di autovettori** $v^i \in \mathbf{R}^n$ (vedi in Appendice). L'Integrale Generale del sistema $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ si scrive

$$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v^i, \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad (Integrale\ Generale)$$

Per provarlo, introduciamo la matrice (invertibile) con colonne gli autovettori v^i:

$$\mathcal{P} := \left(v^1, \ldots, v^n\right) = \left(v^i_j\right)_{i,j=1,\ldots,n} = (\mathcal{P}e_1, \ldots, \mathcal{P}e_n)\,, \qquad \mathcal{P}^{-1}v^i = e_i$$

É $\quad \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_i = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v^i = \lambda_i\mathcal{P}^{-1}v^i = \lambda_i e_i \quad$ ovvero $\lambda_i e_i$ é la i-esima colonna di $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$. $\quad$ Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad \textbf{(forma canonica)}$$

e, se $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ e $\quad y := \mathcal{P}^{-1}x\,, \quad$ é $\quad x = \mathcal{P}y \quad$ e $\quad \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}x \quad$ e quindi

$$\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y \qquad \text{e quindi} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i$$

e **l'integrale generale di** $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ si scrive $\quad \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v^i$.

Piú in generale, supponiamo che $\mathcal{A}$ abbia n autovalori semplici, diciamo q **autovalori reali** $\mu_i, \quad i = 1, \ldots, q \quad$ **e** $\quad 2p \geq 2$ **autovalori complessi,** $q + 2p = n$ (notiamo che se $\lambda = \alpha + i\beta$ é autovalore complesso allora anche $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo é, perché $\mathcal{A}$ é matrice di numeri reali e quindi il suo polinomio caratteristico é a coefficenti reali).
Siano $\lambda_j,\ \overline{\lambda}_j\ \ j = 1, \ldots, p\ $ gli autovalori complessi e $\ \mu_i,\ i = 1, \ldots, q\ $ gli autovalori reali di $\mathcal{A}$. A tali autovalori corrispondono n autovettori linearmente indipendenti,

diciamo $\quad v^j, \overline{v}^j, \; j = 1, \dots, p, \quad u^i, \quad i = 1, \dots, q$: $\quad$ notiamo che mentre $u^i \in \mathbf{R}^n$, $v^j := \xi^j + i\eta^j, \quad \xi^j, \eta^j \in \mathbf{R}^n$ $\quad$ sono vettore in $\mathbf{C}^n$ e compaiono in coppie complesse coniugate giacché $\quad \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}\overline{v}^j = \overline{\lambda}_j \overline{v}^j$. $\quad$ Si ha

$$\mathcal{A}\xi^j + i\mathcal{A}\eta^j = \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j = (\alpha_j + i\beta_j)\,(\xi^j + i\eta^j) = \alpha_j\xi^j - \beta_j\eta^j + i(\beta_j\xi^j + \alpha_j\eta^j) \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}\xi^j = \alpha_j\xi^j - \beta_j\eta^j, \qquad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j\xi^j + \alpha_j\eta^j$$

Sia ora
$$\mathcal{P} := \left(\xi^1, \eta^1, \dots, \xi^p, \eta^p, u^1, \dots u^q\right)$$

la matrice ($n \times n$ reale) avente le prime $2p$ colonne formate dai vettori parte reale e coefficente dell'immaginario degli autovettori corrispondenti ai λ_i e le rimanenti q colonne formate dagli autovettori reali. Ovviamente tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi $\mathcal{P}$ é invertibile. Mostriamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} =$$

$$(\alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2, \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \dots, \alpha_p e_p - \beta_p e_{p+1}, \beta_p e_p + \alpha_p e_{p+1}, \quad \mu_1 e_{2p+1}, \dots, \mu_q e_n)$$

($\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é qui, come altrove, descritta come n-upla di vettori colonna). É questa la **forma canonica di $\mathcal{A}$ in presenza di autovalori distinti, reali o complessi**. Verifichiamolo:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\xi^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\alpha_1\xi^1 - \beta_1\eta^1\right) = \alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\eta^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\beta_1\xi^1 + \alpha_1\eta^1\right) = \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2$$

e cosí via fino alle colonne di posto $2p-1$ e $2p$. $\quad$ Per le altre si trova invece

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_{2p+i} = \mu_i e_{2p+i}$$

Posto $y = (x, \xi, \eta) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, il sistema $\quad \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y \quad$ si disaccoppia nelle q equazioni e nei p sistemi 2×2

$$\dot{x}_i = \mu_i x_i \qquad i = 1, \dots, q \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \dot{\xi}_j &=& \alpha_j\xi_j - \beta_j\eta_j \\ \dot{\eta}_j &=& \beta_j\xi_j + \alpha_j\eta_j \end{array}$$

le cui soluzioni sono

$$x_i = x_i(0)e^{\mu_i t} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} x_j(t) &=& e^{\alpha_j t}\,(x_j(0)\cos\beta_j t - y_j(0)\sin\beta_j t) \qquad \heartsuit \\ y_j(t) &=& e^{\alpha_j t}\,(y_j(0)\cos\beta_j t + x_j(0)\sin\beta_j t) \qquad \heartsuit \end{array}$$

Ecco $2p + q$ soluzioni che, come si vede subito, sono a Wronskiano diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale per il sistema in forma canonica e che, applicando $\mathcal{P}$, fornisce un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Comportamento asintotico del flusso lineare $t \to e^{t\mathcal{A}}x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Dalla espressione esplicita delle soluzioni, vediamo che se gli autovalori λ_j di $\mathcal{A}$, $\alpha_j \pm i\beta_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, p \quad \mu_j \in \mathbf{R}$, $j = 2p+1, \ldots, q$, sono tutti semplici, allora

$$e^{t\mathcal{A}}x_0 \to_{t\to+\infty} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Re e\, \lambda_j < 0 \quad \forall j$$

Diamo una dimostrazione di questo fatto, ancora basata sulla semplicitá degli autovalori, ovvero sul fatto che $\mathcal{A}$ abbia (vedi sopra) una base $\quad (\xi^1, \eta^1, \ldots, \xi^p, \eta^p, u^1, \ldots u^q)$ di 'autovettori'. Partiremo dal fatto ben noto che, se f_j é base in $\mathbf{R}^n$, allora

$$\left\langle \sum_i x_i f_i, \sum_j y_j f_j \right\rangle := \sum_j x_j y_j \qquad \text{é un prodotto scalare su } \mathbf{R}^n \text{con norma associata}$$

$|\sum_i x_i f_i|^2 := \sum_i x_i^2$. Sia ora $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare associato agli 'autovettori' di $\mathcal{A}$. Siccome $\quad \mathcal{A}\xi^j = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j, \qquad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j \qquad$ si ha

$$\left\langle \mathcal{A}\xi^j, \xi^j \right\rangle = \alpha_j, \quad \left\langle \mathcal{A}\xi^j, \eta^j \right\rangle = -\beta_j, \quad \left\langle \mathcal{A}\eta^j, \xi^j \right\rangle = \beta_j, \quad \left\langle \mathcal{A}\eta^j, \eta^j \right\rangle = \alpha_j$$

e quindi $\left\langle \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^p x_j' \xi^j + x_j'' \eta^j + \sum_{i=2p+1}^n x_j u^j\right), \sum_{i=1}^p x_j' \xi^j + x_j'' \eta^j + \sum_{i=2p+1}^n x_j u^j \right\rangle =$

$$\sum_{i=1}^p \alpha_j (x_j'^2 + x_j''^2) - \sum_{i=1}^p \beta_j x_j' x_j'' + \sum_{i=1}^p \beta_j x_j' x_j'' + \sum_{i=2p+1}^n \mu_j x_j^2 \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{A}x, x \rangle \le \max_j \Re e \lambda_j |x|^2$$

Ma allora, se $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x, \quad$ posto $\quad \varphi(t) := \frac{1}{2}|x(t)|^2$, risulta $\quad \varphi'(t) = \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle =$
$= \langle \mathcal{A}x(t), x(t) \rangle \le -\frac{1}{2}\delta |x(t)|^2 = -\delta\varphi(t) \quad$ e quindi

$$(\log \varphi(t))' \le -\delta \quad \text{e quindi} \quad \frac{1}{2}|x(t)|^2 \le \varphi(t) \le \varphi(0)e^{-\delta t}$$

Lemma Sia $\mathcal{A}$ matrice reale $n \times n$, $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ i suoi autovalori. Esiste un prodotto scalare in $\mathbf{R}^n \quad \langle \ldots, \ldots \rangle$ tale che

$$min_j \ \alpha_j \le \langle Lx, x \rangle \le \ max_j \ \alpha_j \langle x, x \rangle \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

Tale Lemma assicura, come sopra, che se gli autovalori di $\mathcal{A}$ hanno tutti parte reale negativa allora lo zero é **equilibrio asintoticamente stabile** per il sistema $\dot{\mathcal{A}}x$.

Teorema Sia $\mathcal{A}$ matrice reale $n \times n$. Se ogni autovalore di $\mathcal{A}$ ha parte reale negativa allora ogni soluzione del sistema $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ tende esponenzialmente a zero al tendere di t a piú infinito.

STABILITÁ/INSTABILITÁ DI UN EQUILIBRIO

Data $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto, sia

$$\dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t)) \qquad in \quad (t^-(x), t^+(x)), \qquad \gamma^x(0) = x \qquad (PC)$$

La funzione

$$\varphi_t(x) = \varphi(x,t) := \gamma^x(t), \quad x \in O, \quad t \in (t^-(x), t^+(x))$$

si chiama **flusso generato dal campo** f: $\forall x \in O$, $t \to \varphi_t(x) = \gamma^x(t)$ é la traiettoria passante per x al tempo $t=0$. Se $t^{\pm}(x) = \pm\infty$ $\forall x \in O$, la $x \to \varphi_t(x)$ é una famiglia di omeomorfismi di O in sé dipendente (in modo continuo) dal 'parametro' t. Infatti $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. É questo un caso particolare della seguente proprietá (*di gruppo*) della famiglia di omeomorfismi φ_t :

$$\varphi_t \circ \varphi_\tau = \varphi_{t+\tau}$$

Ció segue dalla unicitá della soluzione del Problema di Cauchy. Infatti, $\varphi_t(\varphi_\tau(x))$ é la soluzione, al tempo t, passante per $\varphi_\tau(x) = \gamma^x(\tau)$ al tempo $t=0$. Ma, detta $\tilde\gamma(t) := \gamma^x(t+\tau)$, si ha

$$\dot{\tilde\gamma}(t) = \dot\gamma^x(t+\tau) = f(\gamma^x(t+\tau)) = f(\tilde\gamma(t)), \quad \tilde\gamma^x(0) = \gamma^x(\tau)$$

cioé, anche $\tilde\gamma$ é soluzione del problema di Cauchy passante per $\gamma^x(\tau)$ al tempo $t=0$. Quindi, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy,

$$\varphi_t(\varphi_\tau(x)) = \tilde\gamma(t) = \gamma^x(t+\tau) = \varphi_{t+\tau}(x)$$

Equilibrio di un sistema dinamico.

Se $f(\overline{x}) = 0$, allora $x(t) = \overline{x}$ $\forall t \in \mathbf{R}$ é (l'unica) soluzione del problema di Cauchy

$$\dot x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = \overline{x} \qquad (*)$$

ovvero $\varphi_t(\overline{x}) = \overline{x}$ per ogni t. Tale $\overline{x}$ si dice **equilibrio** per il sistema differenziale $\dot x = f(x)$.

- $\overline{x}$ **é equilibrio stabile** se per ogni $B_R(\overline{x}) \subset O$, $\exists \rho \le R$ tale che

$$x' = f(x), \quad x(0) \in B_\rho(\overline{x}) \quad \Rightarrow \quad t^+(\overline{x}) = +\infty \quad e \quad x(t) \in B_R(\overline{x}) \quad \forall t \ge 0$$

-x_0 **é equilibrio asintoticamente stabile** se esiste $B_\rho \subset O$ tale che

$$x' = f(x), \quad x(0) \in B_\rho(x_0) \quad \Rightarrow \quad t^+(x_0) = +\infty \quad e \quad x(t) \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$$

Il Teorema di stabilitá di Lyapunov

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. *Sia* $f(\overline{x}) = 0$.
Supponiamo esista una $g \in C(B_r(\overline{x}) \cap C^1(B_r(\overline{x}) \setminus \overline{x})$ *funzione di Lyapunov, cioé tale che*

(i) $g(x) > g(\overline{x}) \quad \forall x \in B_r(\overline{x}) \setminus \overline{x}$ *(cioé* $\overline{x}$ *é minimo locale stretto per* g*)*

(ii) $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in B_r(\overline{x}) \setminus \overline{x}$

Allora $\overline{x}$ *é equilibrio stabile per il sistema* $\dot{x} = f(x)$.
Se, di piú, in (ii) vale la diseguaglianza stretta, allora tale equilibrio é asintoticamente stabile.

Prova. Sia $m := \inf_{\{\|x-x_0\|=r\}} g$. Dalle ipotesi segue che $m > g(\overline{x})$.
Sia $\rho < r$ tale che $g(x) \leq \tilde{m} := \frac{m+g(\overline{x})}{2} \quad \forall x \in B_\rho(\overline{x})$ e sia

$$\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)), \quad \gamma^x(0) = x \in B_\rho(\overline{x})$$

Siccome $\gamma^x(t) \in B_r(\overline{x})$ per tempi piccoli, é definito

$$T =: \sup\{t > 0 : \|\gamma^x(\tau) - \overline{x}\| < r \quad \forall \tau \leq t\}$$

Se T é finito, γ^x é definita in T e, per continuitá, $\|\gamma^x(T) - \overline{x}\| = r$ e quindi $g(\gamma^x(T) \geq m > \tilde{m}$ e questo é impossibile perché

$$\gamma^x(t) \in B_r(\overline{x}) \quad \forall t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad g(\gamma^x(t)) \quad \text{é decrescente in} \quad [0, T]$$

e quindi $g(\gamma^x(T)) \leq g(x) \leq \tilde{m}$. Dunque $T = +\infty$, ovvero $\overline{x}$ é stabile.
Proviamo ora che se vale la diseguaglianza stretta in (ii) allora

$$x \in B_\rho \quad \Rightarrow \quad \gamma^x(t) \stackrel{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

(possiamo supporre, senza perdere in generalitá, che $\overline{x} = 0$ e $g(0) = 0$). Sia $\varphi_t(x) = \gamma^x(t)$ il flusso generato dal campo f. Basta provare che

$$x \in B_\rho, \quad x_n := \varphi_{t_n}(x) = \gamma^x(t_n) \stackrel{t_n \to +\infty}{\longrightarrow} x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

Osserviamo innanzi tutto che, siccome $\gamma^x([0, \infty)) \subset B_r$ e g decresce strettamente lungo le traiettorie, si ha

$$g(\gamma^x(t_n)) > \lim_n g(\gamma^x(t_n)) = g(x_0) = \lim_{t \to +\infty} g(\gamma^x(t)) = \inf_{t \geq 0} g(\gamma^x(t)).$$

Supponiamo poi, per assurdo, che $x_0 \neq 0$. Siccome zero é l'unico equilibrio in B_r, perché $\langle \nabla g(x), f(x)\rangle < 0 \quad \forall x \in B_r \setminus 0$, e giacché g decresce strettamente lungo le traiettorie, si ha che

$$g(\gamma^{x_0}(t)) < g(x_0) \quad \forall t > 0$$

Fissato $t_0 > 0$, per la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale, si ha che

$$\gamma^{x_n} \to_n \gamma^{x_0} \quad in \quad [0, t_0] \quad \text{e quindi} \quad g(\gamma^{x_n}(t_0)) \to g(\gamma^{x_0}(t_0)) < g(x_0)$$

Ma

$$x_n = \varphi_{t_n}(x) = \gamma^x(t_n) \quad \Rightarrow \quad \gamma^x(t_n + t_0) = \varphi_{t_n+t_0}(x) = \varphi_{t_0}(\varphi_{t_n}(x)) = \gamma^{x_n}(t_0)$$

e quindi

$$g(x_0) = \lim_n g(\gamma^x(t_n + t_0)) = \lim_n g(\gamma^{x_n}(t_0)) = g(\gamma^{x_0}(t_0)) < g(x_0)$$

Corollario: in un campo di forze conservativo i minimi locali stretti dell'energia potenziale sono equilibri stabili

In un campo di forze conservativo $F = -\nabla V, \quad V \in C^2(\mathbf{R}^3)$ la dinamica é regolata dalla legge

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)) = -\nabla U(x(t)) \qquad ovvero \qquad \dot{x} = p, \qquad \dot{p} = -\nabla U$$

L'energia totale (o Hamiltoniana) é data da $\quad H(x,p) = \frac{1}{2}p^2 + U(x)$

Gli equilibri del sistema, ovvero i punti critici dell'Hamiltoniana, sono $(x, 0)$ ove $\nabla U(x) = 0$; ad esempio x punto di minimo locale per U.

Supponiamo che $x = 0$ sia un minimo (locale stretto) per l'energia potenziale U.

Allora H é funzione di Lyapunov per l'equilibrio $(0,0)$, perché $(0,0)$ é minimo locale stretto per H, che é costante lungo le traiettorie.

Dunque $(0,0)$ é equilibrio stabile.

Stabilitá lineare. *Sia* $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, $f(0) = 0$.
Se gli autovalori di $df(0)$ *hanno tutti parte reale negativa lo zero é equilibrio asintoticamente stabile per il sistema* $\dot{x} = f(x)$.

Prova. Come visto, esiste un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tale che $\langle df(0)x, x\rangle \leq -\delta |x|^2$, ove $|x|^2 := \langle x, x\rangle$. Dalla differenziabilitá di f segue che

$$\langle f(x), x\rangle = \langle df(0)x + \circ(x), x\rangle \leq -\frac{\delta}{2}|x|^2 \qquad per \quad x \quad piccolo$$

Dunque $g(x) := |x|^2$ é funzione di Lyapunov in zero, perché $\quad g(x) > g(0) = 0 \forall x \neq 0$

$$e \qquad \nabla g(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \langle \nabla g(x), df(x)\rangle = 2\,\langle \nabla g(x), df(x)\rangle < 0 \quad se \quad 0 < |x| << 1$$

COMPLEMENTI

Abbiamo osservato ch se $\mathcal{P}$ é matrice invertibile e $\sum_{i=1}^{n} c_i y^i$ é Integrale Generale di $\dot{y} = \mathcal{P}\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1}y$, allora

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{P} y^i$$

é Integrale Generale di $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Si tratta allora di trovare una matrice $\mathcal{P}$ che riduca $\mathcal{A}$ nella forma piú semplice possibile, la sua **forma canonica**.
Cosí abbiamo proceduto nel caso diagonalizzabile. Si puó procedere in questo modo anche quando, a causa della presenza di autovalori multipli, fosse impossibile diagonalizzare $\mathcal{A}$ (ricordiamo che anche in presenza di autovalori multipli $\mathcal{A}$ puó avere n autovettori linearmente indipendenti e quindi essere diagonalizzabile: é questo il caso se $\mathcal{A}$ é simmetrica).
In tali casi la forma canonica risulterá peró piuttosto complicata (forme di Jordan).

Ci limitiamo a considerare il caso

$\mathcal{A}$ ha **un solo autovalore, reale, cui corrisponde un unico autovettore**.

Cominciamo dalla situazione piú semplice, cioé $n = 2$.
Sia dunque λ zero di molteplicitá 2 (**molteplicitá algebrica** di λ) del polinomio caratteristico di $\mathcal{A}$, matrice 2×2 . Se la **molteplicitá geometrica** di λ, ovvero $\dim(\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}))$ é uguale alla molteplicitá algebrica di λ (cioé é 2) cioé a λ corrispondono due autovettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{A}$ é, come sopra, diagonalizzabile.
Supponiamo quindi che λ abbia **un unico autovettore** v. Ció implica che

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{h \in \mathbf{R}^2 : \quad \exists u \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tale che} \quad \mathcal{A}u - \lambda u = h\}$$

é un sottospazio di dimensione 1: $Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tu : t \in \mathbf{R}\}$ per qualche $u \neq 0$.
Di piú,

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tv : t \in \mathbf{R}\}$$

Questo perché $\mathcal{A}u - \lambda u = tu \Rightarrow \mathcal{A}u - (\lambda + t)u = 0$ e quindi $t = 0$ (λ é l'unico autovalore !) e quindi u é un multiplo di v (v é l'unico autovettore !)
Dunque esiste u tale che $\mathcal{A}u - \lambda u = v$. In particolare, $u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2$ ed u si dice **autovettore generalizzato**. Sia ora

$$\mathcal{P} = (v, u)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore e l'autovettore generalizzato; ovviamente $\mathcal{P}$ é invertibile. Si ha

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v = \mathcal{P}^{-1}\lambda v = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u + v) = \lambda e_2 + e_1$$

Dunque
$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2)$$

É questa la **forma canonica** di $\mathcal{A}$. Il sistema associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{x} = \lambda x + y, \qquad \dot{y} = \lambda y$$

Una soluzione di tale sistema é $y \equiv 0, x = e^{\lambda t}$. Una seconda soluzione é $y = e^{\lambda t}$ e quindi $(xe^{-\lambda t})' = 1$ e quindi $x = te^{\lambda t}$. Tali soluzioni sono a Wronskiano non nullo e quindi formano un sistema fondamentale. Dunque un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$ é dato da

$$\mathcal{P}\left(e^{\lambda t}e_1\right) = e^{\lambda t}v, \qquad \mathcal{P}\left(te^{\lambda t}e_1 + e^{\lambda t}e_2\right) = te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$$

Argomenti analoghi si applicano al caso piú generale in cui la matrice $n \times n$ $\mathcal{A}$ **ha un unico autovalore** λ (avente quindi **molteplicitá algebrica** n) avente **molteplicitá geometrica** 1, cioé $\mathcal{A}u = \lambda u$ ha una sola soluzione u_1 (a meno di multipli).
La proprietá chiave (che sussiste in effetti senza ipotesi sulla molteplicitá geometrica di λ e che diamo senza dimostrazione) é la seguente:

$$(!) \qquad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n = \mathbf{R}^n \qquad (!)$$

1. Una conseguenza di (!) é che

$$Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k = \mathbf{R}^n$$

Infatti, $u \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2} \Rightarrow 0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+2}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\mathcal{A}u - \lambda u)$
$\Rightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u - \lambda u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1} = Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$.

2. Una conseguenza di $\quad dim\,[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})] = 1 \quad$ é che

$$(+) \qquad dim\left[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] = dim\left[Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k\right] + 1$$

se $\quad Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$ é sottospazio proprio di $Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}$. Infatti, da

$$\exists u : \qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = 0, \qquad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(u) \neq 0$$

segue

$$0 = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(u) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\alpha u) = u_1$$

per qualche $\alpha \neq 0$. Ugualmente $\quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{k+1}(\overline{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k(\beta\overline{u}) = u_1$ per qualche $\beta \neq 0$ e quindi $\quad \alpha u + \beta\overline{u} \in Ker\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k$.

In particolare, da (!) e 1., segue che allora (+) vale per ogni $k < n$.

3. Una conseguenza di 2. é che

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] = Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}$$

Intanto, $u \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}(\mathcal{A}u-\lambda u) = 0$ cioé $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] \subset Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}$. Poi, usando 2.,

$$dim\,[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})] = 1 \Rightarrow dim\left[(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left(Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right)\right] =$$

$$= dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] - 1 = dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k}\right]$$

Da 3. segue che esiste u_2 tale che $\mathcal{A}u_2 - \lambda u_2 = u_1$, e poi, iterando, per ogni $k < n$ esiste $u_{k+1} \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}$ tale che $\mathcal{A}u_{k+1} - \lambda u_{k+1} = u_k$.
Sia ora

$$\mathcal{P} = (u_1, \ldots, u_n)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore u_1 e gli **autovettori generalizzati** $u_k \quad k = 2, \ldots, n$. Siccome

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_1 = \mathcal{P}^{-1}\lambda u_1 = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_k = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_k = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u_k + u_{k-1}) = \lambda e_k + e_{k-1}, \qquad k = 2, \ldots, n$$

concludiamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, \lambda e_2 + e_1, \ldots, \lambda e_n + e_{n-1})$$

ove $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é descritta come riga di vettori colonna. É questa la **forma canonica** per $\mathcal{A}$.

Ora, il sistema differenziale associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3, \quad \ldots \quad , \dot{y}_{n-1} = \lambda y_{n-1} + y_n, \qquad \dot{y}_n = \lambda y_n$$

Iterando il calcolo effettuato nel caso $n = 2$ troviamo per tale sistema le n soluzioni

$$(e^{\lambda t} \;, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots, 0)$$

$$(te^{\lambda t} \;, e^{\lambda t}, 0, \ldots\ldots\ldots, 0)$$

$$(t^2e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, e^{\lambda t}, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(t^{n-1}e^{\lambda t}, t^{n-2}e^{\lambda t}, \ldots\ldots, e^{\lambda t})$$

Tali n soluzioni hanno Wronskiano evidentemente diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale da cui, applicando $\mathcal{P}$, si ottiene un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Base di autovettori. Ricordiamo qui un fatto ben noto: se una matrice $n \times n$ complessa $\mathcal{A}$ ha tutti gli autovalori distinti allora ammette una base di autovettori. Sia $n = 2$ e sia $\xi = \lambda\xi, \quad \mathcal{A}\eta = \mu\eta$. Se $\xi = \alpha\eta$, allora

$$\lambda\xi = \mathcal{A}\xi = \alpha\mathcal{A}\eta = \alpha\mu\eta = \mu\xi \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu$$

Supponiamo, induttivamente, che l'affermazione sia vera per le matrici $n-1 \times n-1$. Siano $\mathcal{A}\xi^j = \lambda_j\xi_j$, $\xi^j \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Supponiamo che gli ξ^j non siano linearmente indipendenti, diciamo $\quad \xi^n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j\xi^j$. Possiamo supporre, eventualmente sostituendo ad $\mathcal{A}$ la matrice $\mathcal{A} - \lambda_n\mathcal{I}$ che $\lambda_n = 0$ e quindi

$$0 = \mathcal{A}\xi^n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j\xi^j = \sum_{j=1}^{n-1} c_j\lambda_j\xi^j \qquad \text{e quindi gli} \quad \xi^j \quad \text{sono linearmente dipendenti}$$

contraddicendo l'ipotesi induttiva.