AM210 2013-14: Tracce delle lezioni- III Settimana

COMPATTEZZA, Teoremi di Weierstrass e di Heine Cantor

Sia (X,d) spazio metrico. $K \subset X$ si dice **compatto** (sequenzialmente compatto) se ogni successione $x_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di K, ovvero

$$x_n \in K \quad \Rightarrow \quad \exists n_k \uparrow \infty,\ x \in K \quad \text{tali che} \quad x_{n_k} \to_k x$$

NOTA.
(i) Se K é compatto e $x_n, y_n \in K$ sono due successioni in K, allora esistono $x, y \in K$ ed n_k, successione strettamente crescente di indici, tale che $x_{n_k} \to_k x$ $y_{n_k} \to_k y$. Basta infatti trovare dapprima una selezione n_k^1 di indici lungo la quale converge la prima successione. Occorre poi prendere una selezione della n_k^1, diciamo n_k^2, lungo la quale converga la y_n; ovviamente lungo tale 'sottoselezione', anche la prima successione converge. Ripetendo il procedimento, si puó ottenere la stessa conclusione a partire da un numero finito qualsiasi di successioni in K.

(ii) Se K é compatto, allora K é chiuso e $diam(K) := \sup_{x,y\in K} d(x,y) < \infty$.
Infatti, se $x_n \in K$, esiste $\overline{x} \in K$ e $x_{n_k} \to_k \overline{x}$. Se $x_n \to x$, necessariamente $x = \overline{x} \in K$. Dunque K é chiuso. Poi, supponiamo per assurdo che esistano $x_n, y_n \in K$ tali che $d(x_n, y_n) \to \infty$. Per compattezza, esistono n_k ed x, y tali che $x_{n_k} \to_k x, y_{n_k} \to_k y$ e quindi (continuitá della distanza!) $d(x_{n_k}, x_{n_k}) \to d(x,y)$ e quindi $\sup_k d(x_{n_k}, x_{n_k}) < \infty$, mentre $d(x_{n_k}, x_{n_k}) \to \infty$ al pari di $d(x_n, y_n)$.
Queste due proprietá (K chiuso e 'limitato') non sono peró sufficenti a garantire che K sia compatto.
Ad esempio, la successione $e_i :\ e_i(j) = \delta_{ij}$ appartiene alla palla unitaria di in l^2 (dotato della norma $\|.\|_2$), non ha sottosuccessioni convergenti perché $\|e_i - e_j\| = 1$ se $i \neq j$. Tuttavia...

Definizione. $A \subset V$, spazio normato, si dice **limitato** se $\exists r > 0 :\ A \subset B_r$

Prop. $K \subset \mathbf{R}^n$, dotato della norma euclidea, é compatto sse é chiuso e limitato.

Proviamo che ogni K, chiuso e limitato, é compatto: $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty \ \ \forall\, j = 1, \ldots, n \Rightarrow \exists\ u := (x_1, \ldots, x_n) :\ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \ldots, n$ ovvero $u_{k_i} \to_i u$; infine, $u \in K$ perché K é chiuso.

Teorema. Siano $(X,d), (Y,\rho)$ sono spazi metrici e $f \in C(X,Y)$. Se $K \subset X$ é compatto, lo é anche $f(K)$, ovvero l'immagine continua di un compatto é compatta.

Prova. Sia $y_n \in f(K)$, ovvero $y_n = f(x_n)$ per certi $x_n \in K$. Siccome K é compatto, esiste $x_{n_k} \to_k x \in K$. Per continuitá, $\quad y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to_k f(x) \in f(K)$.

Corollario (Weierstrass 1). Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ e $K \subset X$ é compatto allora

$$\exists \underline{x}, \overline{x} : \quad f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x}) \qquad \forall\, x \in K$$

Segue dal fatto che $f(K)$ é compatto, e quindi chiuso e limitato: siccome é limitato, $-\infty < \inf_K f \le \sup_K f < +\infty$; poi, in quanto chiuso, $f(K)$ contiene sia il suo sup che il suo inf, che sono quindi il massimo e il minimo valore di f in K.

Weierstrass 2 Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F, \mathbf{R})$ tale che

(i) **(coercivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \;\Rightarrow\; f(u_n) \to_n +\infty$

(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \;\Rightarrow\; \liminf_n f(u_n) \ge f(u)$.

$$\text{Allora} \qquad \exists\, \underline{u} \in C \quad \text{tale che} \qquad f(\underline{u}) = \inf_C f$$

Sia infatti $u_n \in C$ *successione minimizzante*, ovvero

$$f(u_n) \to_n \inf_C f$$

Allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue quindi che

$$\inf_C f = \lim_n f(u_n) \ge f(u) \ge \inf_C f$$

NOTA. Una funzione f é semicontinua inferiormente in x_0 sse

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x, x_0) \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) \ge f(x_0) - \epsilon$$

Ad esempio, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0\, \forall x \ne 0$, $f(0) = c$ é semicont. inf. sse $c \le 0$.
χ_A, la funzione caratteristica di A (ovvero $\chi_A(x) = 1 \quad \forall x \in A$, χ_A é nulla altrove) é inf. semicontinua sse A é aperto

Uniforme continuitá.

Siano $(X, d), (Y, \rho)$ spazi metrici, $A \subset X$.

$f : A \to Y$ é **uniformemente continua** in $A \subset X$ se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \;\; d(u, v) \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(f(u), f(v)) \le \epsilon)$$

Lipschitzianitá. f si dice Lipschitziana (o Lip) di costante $L > 0$ se

$$\rho(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

Una funzione si dice localmente Lipschitziana in A se, per ogni $x \in A$, é Lip su qualche $B_{r(x)}(x) \cap A$. O, equivalentemente (vedi Es. 7), se é Lip sui compatti.

Chiaramente, ogni funzione Lip é anche uniformemente continua, ma non viceversa. Ad esempio, $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in R$ é uniformemente continua (in $\{|x| \leq 1\}$ per Heine-Cantor, ed in $\{|x| \geq 1\}$, perché $x, y \geq 1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$) ma non é Lip, perché $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = +\infty$.

Teorema di Heine-Cantor

$$f \in C(K, Y), \quad K \subset X \qquad \text{compatto} \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ é uniformemente continua in } K.$$

Prova Se no, $\exists\, \epsilon_0 > 0$, $u_n, v_n \in K$, $d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n}$ tale che $\rho(f(u_n), f(v_n)) \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $\rho(f(u), f(v)) \geq \epsilon_0$. Ma $d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v) \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad u = v$, contraddizione.

Una caratterizzazione della compattezza

PROPOSIZIONE

Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. L'insieme K é compatto sse da ogni ricoprimento aperto di K, $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in \mathcal{A}$, si puó estrarre un sottoricoprimento finito, cioé

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \quad \textit{tali che} \quad K \subset \bigcup_{j=1,\ldots,l} O_{\alpha_j}$$

Prova.

Sufficenza. Basta provare che la proprietá del ricoprimento finito implica che K é chiuso e limitato. Limitatezza: siccome $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, ove D_i é la palla di raggio $i \in \mathbf{N}$ e centro l'origine, $K \subset D_{\hat{i}}$ per qualche $\hat{i}$. Per provare che K é chiuso, supponiamo che non lo sia: esiste $x_k \in K$, $\hat{x} \notin K$ con $x_k \to_k \hat{x}$. Siccome $K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ si ha che
$K \subset \bigcup\limits_k \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} = \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ e quindi $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} =$ $= \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{N}\}$. Ma $x_k \in K$ e $\|x_k - \hat{x}\| < \frac{1}{N}$ se k é grande.

Necessitá . Premettiamo un

Lemma.

(i) Ogni aperto in $\mathbf{R}^n$ é unione numerabile di palle aperte (o chiuse)

(ii) Se O_α sono sottinsiemi aperti in $\mathbf{R}^n$, esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_j O_{\alpha_j}$ *(da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento numerabile).*

Prova del Lemma

(i) Se $\mathcal{B}_O := \{B_r(x) \subset O : \quad r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}$, $\mathcal{B}_O$ é numerabile. É $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_O} B$. Infatti, dato $x \in O$, siano $r \in \mathbf{Q}^+, \xi \in \mathbf{Q}^n$ tali che $B_{2r}(x) \subset O$ e $\xi \in B_r(x)$. Allora $x \in B_r(\xi) \subset B_{2r}(x) \subset O$.

(ii) Sia $\mathcal{B} := \{B_r(x) : \quad r \in \mathbf{Q},\ x \in \mathbf{Q}^n,\ B_r(x) \subset O_\alpha \text{ per qualche } \alpha\}$. $\mathcal{B}$ é famiglia numerabile di palle aperte, che si puó quindi indicare come $\{B_j : \ j \in \mathbf{N}\}$. Come sopra, $\cup_\alpha O_\alpha = \bigcup_j B_j$. Sia, per ogni j, α_j tale che $B_j \subset O_{\alpha_j}$. Allora

$$\cup_\alpha O_\alpha \subset \cup_j B_j \subset \cup_j O_{\alpha_j} \subset \cup_\alpha O_\alpha$$

Prova della necessitá. Dal Lemma (ii) sappiamo che possiamo supporre $\mathcal{A} = \mathbf{N}$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $k \in \mathbf{N}$ esista $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k} O_i$. Sia $x_{k_j} \to_j x \in K$. Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, esiste k_0 tale che $x \in O_{k_0}$ e quindi $x_{k_j} \in O_{k_0}$ per j grande, mentre $x_{k_j} \notin O_i$ se $i \leq k_j$.

NOTA.
La sufficenza si puó anche provare usando la proprietá 'duale' a quella del ricoprimento: F_J chiusi tali che $\cap_{j=1}^m F_j \neq \emptyset \quad \forall m \quad \Rightarrow \quad \cap_{j=1}^\infty F_j \neq \emptyset$. Questa infatti implica che, se $x_n \in K \quad \forall n \in N$, allora $Ad(x_n) \neq \emptyset$. Ma allora, *in qualsiasi spazio metrico* la proprietá del ricoprimento finito assicura la compattezza sequenziale.

Viceversa, la proprietá del ricoprimento finito segue, in $\mathbf{R}^n$, dalla compattezza sequenziale via il Lemma. Siccome si puó dimostrare che uno spazio metrico compatto ha le proprietá del Lemma, si puó concludere che 'compattezza sequenziale' e proprietá del ricoprimento finito' sono equivalenti in ogni spazio metrico.

CONNESSIONE

OSSERVAZIONE Sia $A \subset \mathbf{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $a, b \in A \quad \Rightarrow \quad tb + (1-t)a \in A \quad \forall t \in [0,1]$ (ovvero A é un intervallo)
(ii) $\forall\, u, v \in A,\ \exists\, \gamma \in C([0,1], A): \quad \gamma(0) = u,\ \gamma(1) = v$
(iii) $O_i, i = 1, 2$ aperti t.c. $(A \cap O_i) \neq \emptyset, (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap A \cap O_2 \neq \emptyset$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Basta prendere $\gamma(t) = tv + (1-t)u$. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Vedi Esercizio 8. (iii) $\Rightarrow$ (i). Se no, esistono $a < c < b$ con $a, b \in A$, $c \notin A$. Ma allora $A = [(-\infty, c) \cap A] \cup [(c, +\infty) \cap A]$, $a \in A \cap (-\infty, c)$, $b \in A \cap (c, +\infty)$ e $(-\infty, c) \cap A \cap (c, +\infty) = \emptyset$.

Se $A \subset E \neq \mathbf{R}$ spazio normato, le implicazioni $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ continuano a valere, ma nessuna delle tre equivalenze sussiste.

Definizione. Sia E spazio normato. Sia $A \subset X$. Si dice che
(K) A é **convesso** se vale la (i)
(kk) A é **connesso per archi** (c.p.a) se vale (ii)
(kkk) A é **connesso** se vale (iii) (cioé se A non é unione di due aperti disgiunti)

ESEMPI. Ogni intervallo é connesso; $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y): \ y = ax + b\}$ non é connesso , la sfera $S_r = \{x \in E: \quad \|x\| = r\}$ é connessa, S_r^c non é connesso.

Piú in generale, X metrico é connesso per archi se $\forall u, v \in X,\ \exists \gamma \in C([0,1], X):$ $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Si dice che X é connesso se $X = O_1 \cup O_2$, aperti $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ mentre $A \subset X$ é connesso per archi/connesso se lo é $(A, d_{A \times A})$.
Anche qui X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso. Vediamolo:
$X = O_1 \cup O_2$, $x_i \in O_i$, $\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2 \quad \Rightarrow [0,1] = \gamma^{-1}(O_1) \cup \gamma^{-1}(O_2)$ unione di aperti disgiunti! $\Rightarrow$ (perché $[0,1]$ é connesso) $\emptyset \neq \gamma^{-1}(O_1) \cap \gamma^{-1}(O_2) = \gamma^{-1}(O_1 \cap O_2) \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, ovvero X é connesso.

Teorema del valore intermedio. Siano X, Y spazi metrici, $f \in C(X, Y)$.
(i) X connesso per archi $\Rightarrow f(X)$ connesso per archi,
(ii) X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso.
In particolare, se X é connesso e $f \in C(X, \mathbf{R})$, allora $f(X)$ é un intervallo.

Prova di (i). Se $y_i = f(x_i), i = 0, 1$, $\gamma \in C([0,1], X)$ tale che $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$, allora $\eta := f \circ \gamma \in C([0,1], f(X))$, $\eta(0) = y_0$, $\eta(1) = y_1$.
(ii) $f(X) = O_1 \cup O_2$ aperti $\Rightarrow$ $X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ $\Rightarrow \emptyset \neq = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = f^{-1}(O_1 \cap O_2)$ $\Rightarrow$ $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

DIFFERENZIABILITÁ E MATRICE JACOBIANA

Siano E, F spazi normati, O aperto in E, $f : O \to F$, $x \in O$.
Si dice che f é **differenziabile** in x se

$$\exists\, L \in \mathcal{L}(E,F) : \qquad f(x+h) \;=\; f(x) + Lh + \circ(\|h\|) \qquad (*)$$

(per definizione, $\frac{\circ(h)}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0$). Tale L, *se esiste é unica.* Infatti:

$(L_1 - L_2)(h) = \circ(\|h\|) \quad \Rightarrow \quad t(L_1 - L_2)(h) = (L_1 - L_2)(th) = \circ(|t|) \quad \Rightarrow$ $(L_1 - L_2)(h) = \circ(1) \quad \Rightarrow (L_1 - L_2)(h) = 0 \quad \forall h.$

La trasformazione L in $(*)$ si chiama **differenziale** di f in x e si indica $df(x)$.

Proprietá delle funzioni differenziabili. Sia f differenziabile in x. Allora

i) f **é continua in** x. Segue dalla continuitá di $h \to df(x)h$.
ii) Per ogni $h \in E$, esiste la **derivata direzionale**

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = df(x)h$$

(*valore* di $df(x)$ lungo *l'incremento* h) giacché $\frac{f(x+th)-f(x)}{t} = df(x)h + \circ(1)$.

Se $E = \mathbf{R}^n$ ed e_j é base canonica, scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_j) - f(x)}{t} = df(x)e_j$$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (che si scrive anche $f_{x_j}, \partial_j f, D_j f, \ldots$) si chiama **derivata parziale** di f fatta rispetto alla j-esima variabile.

Se $F = \mathbf{R}$ il differenziale in x, $df(x)$, é forma lineare su E; se é anche $E = \mathbf{R}^n$, il vettore

$$\nabla f(x) \;:=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

si chiama **gradiente** di f in x, ed é il vettore che rappresenta $df(x)$ nella base e_j:

$$df(x)h \;=\; df(x)(\sum_{j=1}^n h_j e_j) \;=\; \sum_{j=1}^n h_j df(x) e_j \;=\; \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_i \;=< \nabla f(x)\,,\, h >= \frac{\partial f}{\partial h}(x)$$

Se $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}^m$, la matrice rappresentativa di $df(x)$ nelle basi canoniche e_j, $\hat{e}_i$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, é la **matrice Jacobiana** $J_f(x)$:

$$df(x)(h) = J_f(x)h \qquad \forall h \in \mathbf{R}^n$$

Se $m=1$, $J_f(x)$ é il vettore (riga) $\nabla f(x)$.
Se $\mathbf{m}>\mathbf{1}$, $\quad f$ differenziabile in $\quad x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\|f(x_0+h)\ -[\ f(x_0)+df(x_0)h]\|}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0$
$\Leftrightarrow \quad \frac{f_i(x_0+h)\ -[\ f_i(x_0)+<df(x_0)h,\hat{e}_i>]}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0 \quad \forall i \quad \Leftrightarrow \quad f_i$ sono differenziabili con

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = df_i(x_0)e_j =< df(x_0)e_j, \hat{e}_i > \quad \text{e quindi} \quad J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$$

ovvero, $J_f(x_0)$ é la matrice che ha per righe i vettori $\nabla f_i(x_0)$ e per colonne i vettori $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ che sono i 'vettori tangenti' alle 'curve coordinate' $x_j \to f(\overline{x}_1,\ldots,x_j,\ldots,\overline{x}_n)$:

n=1: Cammini differenziabili.

Date $\quad \gamma_i:(a,b)\to\mathbf{R}, \quad i=1,\ldots,m. \quad \gamma := \sum_{i=1}^m \gamma_i\hat{e}_i \quad$ é *cammino* in $\mathbf{R}^m$. Siccome una funzione lineare $L:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$ é completamente determinata dal suo valore in $1: L(t)=L(t1)=tL(1)$, il cammino (o 'traiettoria') γ risulta differenziabile in $t\in(a,b)$ se

$$\text{esiste} \quad v=\textstyle\sum_{i=1}^m v_i\hat{e}_i \quad \text{tale che} \quad \gamma(t+\tau)=\gamma(t)+\tau v+\circ(\tau)$$

ovvero

$$\forall i=1,\ldots,m \qquad \exists \quad \dot{\gamma}_i(t) := \lim_{\tau\to 0}\frac{\gamma_i(t+\tau)-\gamma_i(t)}{\tau} = v_i$$

Il vettore $\dot{\gamma}(t):=v$ é il **vettore tangente** (e, se $\|\dot{\gamma}(t)\|\neq 0$, $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$, é il **versore tangente**) al cammino γ in $\gamma(t)$; $\|\dot{\gamma}(t)\|$ é la velocitá con cui il punto che 'percorre' il cammino γ passa per $\gamma(t)$. I cammini (o 'traiettorie') dotati di vettore tangente si chiamano differenziabili.

DUE ESEMPI

(i) $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $\quad t\in[0,2\pi)$ (equazione parametrica della circonferenza unitaria) é cammino differenziabile con $\dot{\gamma}(t)=(-\sin t,\cos t)$. Notiamo che $<\gamma(t),\dot{\gamma}(t)>\equiv 0$ e quindi, come si vede subito, $\dot{\gamma}(t)$, applicato in $\gamma(t)$, é il *versore*) alla circonferenza nel punto $\gamma(t)$.

(ii) $(\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,\sin\phi)$, $\quad \theta\in[0,2\pi),\phi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ é rappresentazione parametrica di $\mathcal{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2=1\}$, sfera unitaria in $\mathbf{R}^3$: ogni punto della sfera, a parte i poli, sta esattamente su di un meridiano (di longitudine θ_0) e su di un parallelo (di latitudine ϕ_0) di equazione parametrica rispettivamente $(\cos\phi\cos\theta_0,\cos\phi\sin\theta_0,\sin\phi)$ e $(\cos\phi_0\cos\theta,\cos\phi_0\sin\theta,\sin\phi_0)$. I vettori tangenti a tali curve $(-\sin\phi_0\cos\theta_0,-\sin\phi_0\sin\theta_0,\cos\phi_0)$, $(-\cos\phi_0\sin\theta_0,\cos\phi_0\cos\theta_0,0)$, generano il piano tangente alla sfera nel punto $(\cos\phi_0\cos\theta_0,\cos\phi_0\sin\theta_0,\sin\phi_0)$.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

1. Provare il Teorema di Heine-Cantor usando il Teorema di Weierstrass.

$$\forall\epsilon > 0, \forall x \in K, \qquad \omega(f, x, \delta) := \sup\{\rho(f(x'), f(x'')) : \quad x', x'' \in K \cap B_\delta(x)\}$$

$$\delta_\epsilon(x) := \sup\{\delta > 0 : \quad \omega(f, x, \delta) < \epsilon\}$$

La funzione $x \to \delta_\epsilon(x)$ é inferiormente semicontinua, perché, se $\delta < \delta_\epsilon(x)$, si ha

$$y \in K, d(y, x) < \delta_\epsilon(x) - \delta \quad \Rightarrow B_\delta(y) \subset B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \Rightarrow \omega(f, y, \delta) \le \epsilon \quad \Rightarrow \delta_\epsilon(y) \ge \delta$$

Per Weierstrass, esiste $\underline{x} \in K$ tale che $\delta_\epsilon(x) \ge \delta_\epsilon(\underline{x}) \quad \forall x \in K$. Dunque

$$d(x, y) < \delta_\epsilon(\underline{x}) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \le \epsilon$$

2. Provare il Teorema di Heine-Cantor usando il Teorema del ricoprimento finito.

$$\forall\epsilon > 0, \forall\, x \in K\ \exists\delta_\epsilon(x) \qquad x'\,,\ x'' \in B_{\delta_\epsilon(x)}(x) \quad \Rightarrow \rho(f(x'), f(x'')) < \epsilon$$

K compatto $\Rightarrow \exists x_j \in K,\ j = 1, \ldots, p :\ K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}}(x_j)$. Se $\delta_\epsilon := \min_j\ \delta_\epsilon(x_j)$,

$$d(x, y) < \frac{\delta_\epsilon}{2},\ x \in B_{\frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2}} \Rightarrow d(y, x_j) < \frac{\delta_\epsilon}{2} + \frac{\delta_\epsilon(x_j)}{2} < \delta_\epsilon(x_j) \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \epsilon$$

3. Tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti

Sia $\|\cdots\|$ una norma su $\mathbf{R}^n$. Indichiamo con $\|.\|_2$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$. Proviamo che $\exists\, C \ge c > 0 : \quad c\|x\| \le \|x\|_2 \le C\|x\| \qquad \forall x \in E.$
Da $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ segue

$$\|x\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|\, \|e_j\| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 = C\|x\|_2$$

In particolare, ció assicura che $x \to \|\cdots\|$ é funzione continua in $\mathbf{R}^n$ (munito della norma $\|\cdots\|_2$) e quindi é dotata di minimo sul compatto $\{\|x\|_2 = 1\}$, ovvero

$$\text{esiste } \underline{x}, \text{ con } \|\underline{x}\|_2 = 1 \text{ tale che:} \qquad \|x\| \ge \|\underline{x}\| \text{ se } \|x\|_2 = 1$$

e quindi $\|\frac{x}{\|x\|_2}\| \ge \|\underline{x}\| \quad \forall x \neq 0$ e quindi $\|x\| \ge \|\underline{x}\|\, \|x\|_2 = c\|x\|_2 \quad \forall x.$

4. Provare che, se $f \in C(A, \mathbf{R})$ é localmente costante in A (cioé $\forall x \in A, \exists B_r(x) :$ f é costante in $B_r(x) \cap A$) ed A é connesso, allora f é costante in A.

5. Def.: $f \in C(E, \mathbf{R}^m)$ é $Lip_{loc}(E)$ se $\forall x \in E, \exists B_{r(x)}(x)$ tale che $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$.

Provare che $\quad f \in Lip_{loc}(K), \quad K$ compatto $\quad \Rightarrow \quad f \in Lip(K)$

Se no, $\exists x_j, y_j \in K : \|f(x_j) - f(y_j)\| \; \|x_j - y_j\|^{-1} \to +\infty$. *Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che* $x_j \to_j x \in K, y_j \to_j y \in K$. *Siccome* f *é limitata, necessariamente* $\|x_j - y_j\| \to 0$ *e quindi* $x = y$. *Ma* $x_j, y_j \in B_{r(x)}(x)$ *per* j *grande e* $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$, *contraddizione.*

6. Provare con un esempio che non é vero in generale che da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento numerabile.

Sia $X = l^\infty$ *dotato della metrica* $\|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$. *Sia* $E = 2^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \{0,1\}$. *Questo insieme é non numerabile. Siccome* $\alpha \neq \beta \in l^\infty \Rightarrow \|\alpha - \beta\|_\infty = 1$, *la famiglia (non numerabile) di aperti disgiunti* $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$ *é un ricoprimento di* E *e, chiaramente, cessa di essere tale non appena si lasci da parte anche un solo* $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$.

7. Mostrare, con un esempio, che non é vero in generale che ogni successione limitata in uno spazio normato ammette una estratta convergente.

Sia $E = l^2$ *dotato della norma* $\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Siano* $e_j(i) := \delta_{ij}$. *Allora* $\|e_n - e_m\| = 2$ *se* $n \neq m$ *e quindi* e_n *non ha estratte convergenti, dato che nessuna sua sottosuccessione é di Cauchy (una successione* x_n *in uno spazio metrico é di Cauchy se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* n_ϵ *tale che* $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ *se* $n, m \geq n_\epsilon$*; ovviamente ogni successione convergente é di Cauchy).*

8 . A connesso per archi $\Rightarrow A$ connesso.

Siano $O_i, i = 1,2$ aperti tali che $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ con $A \cap O_i \neq \emptyset$ per $i = 1,2$. Sia γ cammino continuo in A, con $\gamma(0) \in O_1, \gamma(1) \in O_2$. Siccome, per continuitá, $\gamma(t) \in O_1$ se t é vicino a $t = 0$, l'intervallo $I := \{t \in [0,1] : \gamma(\tau) \in O_1 \; \forall \tau \in [0,t)\}$ é un intervallo non vuoto e $\bar{t} := \sup I < 1$. Siccome, sempre per continuitá, $\gamma(\bar{t}) \notin O_1$, si ha che $\gamma(\bar{t}) \in O_2$ e quindi, per continuitá, $\gamma(t) \in O_2$ per $t < \bar{t}$ vicino a $\bar{t}$. Dunque $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ e cioé A é connesso.

NOTA. Il viceversa é vero se A é aperto, ma non é vero in generale.

9 Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$ uniformemente continua in $A \subset X$.

Allora esiste $\overline{f} : \overline{A} \to \mathbf{R}$ continua e tale che $\overline{f}(x) = f(x)\, \forall x \in A$.

Prova. Caso $m = 1$. Fissato $\epsilon > 0$, sia δ_ϵ tale che $d(x, y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Dato $x \in \overline{A}$, esistono $x_k \in A$ tali che $x_k \to_k x$. In particolare, x_k é di Cauchy, cioé $d(x_h, x_k) \leq \delta_\epsilon$ per h, k grandi. Quindi, per uniforme continuitá, $|f(x_k)-f(x_h)| \leq \epsilon$ e quindi $f(x_h)$ é di Cauchy e quindi converge a qualche y. Notiamo che tale y dipende solo da x e non dalla 'approssimante' x_k. Infatti, se $x'_k \to x$ e quindi, come sopra, $f(x'_k) \to y'$ per qualche y', si ha $|y-y'| \leq |y-f(x_k)|+|f(x_k)-f(x'_k)|+|f(x'_k-y'| \to_k 0$ e quindi $y = y'$. Dunque $\overline{f}(x) := \lim_k f(x_k)$ é ben definita su $\overline{A}$.
Resta da provare che $\overline{f}$ é continua. Ma questo si vede subito: $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow$ $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(y_n)|+|f(y_n)-f(y)| \leq 2\epsilon+|f(x_n)-f(y_n)|$ se n é abbastanza grande. Siccome poi, se $d(x, y) \leq \delta_\epsilon$, risulta $d(x_n, y_n) \leq 3\delta$ se n é grande, si ha che $|f(x_n)-f(y_n)| \leq \epsilon$ se n é grande. In conclusione, $|f(x)-f(y)| \leq 3\epsilon$. Se $m > 1$, l'argomento precedente assicura che ogni componente ha una estensione continua a $\overline{A}$ e quindi f si prolunga a tutto $\overline{A}$.

10. Sia $f : E \to \mathbf{R}$. f si dice *localmente costante in* E se

$$\forall x \in E, \quad \exists B_r(x) \quad \text{tale che} \quad f \text{ é costante in } B_r(x) \cap E$$

Notiamo che una funzione siffatta é necessariamente continua in E.

11. f localmente costante in E connesso per archi $\Rightarrow f$ é costante in E.

Prova. Sia, per ogni $x \in E$, $B_{r(x)}(x)$ tale che f sia costante in $B_{r(x)}(x)$. Siano $x, y \in E$ e sia γ cammino da x a y. Notiamo che $(f \circ \gamma)([0, 1])$ é un intervallo, perché $f \circ \gamma$ é continua. Estraendo da $\{B_{r(x)}(x) : \quad x \in \gamma([0, 1])\}$, ricoprimento aperto del compatto $\gamma([0, 1])$, un sottoricoprimento finito, deduciamo che $(f \circ \gamma)([0, 1])$ é un insieme finito di punti, che, trattandosi di un intervallo, deve ridursi a un punto.

12. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ 'curva parametrica' in $\mathbf{R}^n$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ biiezione. Allora $\tilde{\gamma}(\varphi(\tau)) : \tau \in [\alpha, \beta]$ é riparametrizzazione della 'curva' (o 'cammino') γ. Ovviamente le immagini ('sostegno' delle 'curve' γ e $\tilde{\gamma}$) $\gamma([a, b])$ e $\tilde{\gamma}([\alpha, \beta])$ coincidono: le due curve descrivono (percorrono..) in modo diverso lo stesso insieme di $\mathbf{R}^n$. Mostrare che, se γ é cammino differenziabile e φ é derivabile, con $\varphi(\tau) > 0 \quad \forall \tau$, allora γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso versore tangente in ogni punto.