AM210 2012-13- V Settimana

ESEMPI DI DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

1. Dalla regola della catena: $\gamma : (a,b) \to \mathbf{R}^n$, $\quad f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di classe $C^1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\,\frac{d\gamma_j}{dt}(t) = < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) >$$

Rivediamo la dimostrazione in questo caso: dalla differenziabilitá di γ, f segue che

$$h(\tau) := \gamma(t+\tau) - \gamma(t) = \tau\dot\gamma(t) + \circ_\gamma(\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{h(\tau)}{\tau} \to_{\tau\to 0} \dot\gamma(t)$$

$$\frac{f(\gamma(t+\tau)) - f(\gamma(t))}{\tau} = \frac{f(\gamma(t) + h(\tau)) - f(\gamma(t))}{\tau} = \frac{< \nabla f(\gamma(t), h(\tau) > + \circ_f(\|h\|)}{\tau}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\tau\to 0} \frac{f(\gamma(t+\tau)) - f(\gamma(t)}{\tau} = < \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) >$$

perché $\quad \frac{\circ_f(\|h\|)}{\tau} = \frac{\circ_f(\|h\|)}{\|h\|}\,\frac{\|h\|}{\tau} \to_{\tau\to 0} 0.$

NOTA Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ e sia $\gamma \in C^1((0,1), \mathbf{R}^2)$.

$$f(\gamma(t)) = 1\ \forall t \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) >= 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

Tale proprietá si descrive dicendo che 'se γ é contenuta su di una superfice di llivello di f allora in ogni $x = \gamma(t)$ si ha che: $\dot\gamma$ é ortogonale a $\nabla f(x)$.

2. Se $g = (g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_p(x_1,\ldots,x_n))$ é in $C^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, ed e_j é base canonica in $\mathbf{R}^n$, allora

$\gamma^j : t \to g(x + te_j)$ é cammino differenziabile e $\dot\gamma^j_l(0) = \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x), \qquad l = 1,\ldots,p$

Scriviamo $\frac{\partial g}{\partial x_j} = (\frac{\partial g_1}{\partial x_j},\ldots,\frac{\partial g_p}{\partial x_j})$. Da 1.), se $f = f(y_1,\ldots,y_p) \in C^1(\mathbf{R}^p, \mathbf{R})$, segue:

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_j} = \frac{d}{dt}f(g(x+te_j))_{t=0} = \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_l}(g(x))\,\frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x) = < \nabla f(g(x)), \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) >$$

3. Deriviamo da 1. e 2. la regola della catena: se $g \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^p), \Omega$ aperto in $\mathbf{R}^n, g(\Omega) \subset O, O$ aperto in $\mathbf{R}^p$ ed $\quad f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$, allora $\quad f\circ g \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m)$ e

$$J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x))\,J_g(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Infatti, l'elemento di posto i,j della matrice $J_{f\circ g}(x)$, dato da $\frac{\partial(f_i\circ g)}{\partial x_j}$ é uguale a $< \nabla f_i(g(x)), \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) >$ che é appunto l'elemento di posto i,j della matrice prodotto $J_f(g(x))\,J_g(x)$, giacché la $i-$esima riga di $J_f(g(x))$ é $\nabla f_i(g(x))$ mentre la j-esima colonna di $J_g(x)$ é $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se esistono $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_j}$ allora

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n \qquad \textit{sono le derivate seconde}$$

$$H_f(x) := \left(f_{x_i x_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} \text{ é la } \quad \textit{matrice Hessiana} \quad \text{e}$$

$$f \in C^2(O) \qquad \textit{se e solo se} \qquad f_{x_i x_j} \in C(O), \ \forall i, j$$

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, \quad \forall x \in O$$

Lemma di Schwartz: una osservazione ed idea della prova ($n = 2$). Per definizione $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ esistono se e solo se esistono i limiti

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} [\tfrac{\partial f}{\partial y}(x + h, y) - \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)}{hk} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \lim_{k \to 0} \tfrac{1}{k} [\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y + k) - \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)] =$$

$$= \lim_{k \to 0} \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y)}{hk} \right]$$

Inoltre, $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se e solo se i due limiti sono uguali.

Ció suggerisce che, in generale, risulti $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ (quando entrambe esistano), ma che possa anche accadere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ esistano entrambe ma siano diverse perché *due successivi passaggi al limite non si possono sempre scambiare.* Ad esempio, se

$$r(h, k) := \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \qquad \forall (h, k) \neq (0, 0) \qquad \text{si ha}$$

$$\lim_{h \to 0} [\lim_{k \to 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}] = \lim_{h \to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{k \to 0} [\lim_{h \to 0} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}] = \lim_{k \to 0} (-1) = -1$$

Notiamo che f non ha limite per (h, k) tendente a zero; ma é viceversa vero che se esistono $\lim_{k\to 0} q(h,k) \quad \forall h,$ e $\lim_{k\to 0} q(h,k) \quad \forall k$ allora é vero che

$$\exists \quad l := \lim_{h^2+k^2\to 0} q(x,y) \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \lim_{h\to 0}[\lim_{k\to 0} q(h,k)] \quad e \quad \lim_{k\to 0}[\lim_{h\to 0} q(x,y)]$$

(e sono ovviamente uguali ad l) giacché

$$|q(h,k) - l| \le \epsilon \quad per \quad |h| + |k| \le \delta \quad \Rightarrow$$

$$|\lim_{k\to 0} q(h,k) - l| \le \epsilon \quad per \quad |h| \le \delta, \quad |\lim_{k\to 0} q(h,k) - l| \le \epsilon \quad per \quad |h| \le \delta$$

Prova Lemma di Schwartz. Posto

$$q(h,k) := \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)}{hk}$$

si ha che

$$q(h,k) \overset{h\to 0}{\to} \frac{f_x(x,y+k) - f_x(x,y)}{k}, \quad q(h,k) \overset{k\to 0}{\to} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h}$$

Basta dunque provare che $\exists \lim_{h^2+k^2\to 0} q(h,k).$ In effetti si ha

$$\lim_{h^2+k^2\to 0} \left| q(h,k) - \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| =$$

$$= \lim_{h^2+k^2\to 0} \left| \frac{1}{hk} \int_x^{x+h} [f_x(t,y+k)dt - f_x(t,y)]\,dt - \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| =$$

$$= \lim_{h^2+k^2\to 0} \left| \frac{1}{hk} \int_x^{x+h} \left[\int_y^{y+k} \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(t,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) d\tau \right] dt \right| = 0$$

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;<\nabla f(u)\,,\, h>\; + \frac{1}{2} < H_f(u)\,h,\; h>\; + \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u + th)$, é

$$\varphi(0) = f(u), \quad \varphi(1) = f(u+h), \qquad \frac{d\varphi}{dt}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u+th)h_i h_j = < H_f(u + t\,h)\,h,\ h >$$

Ma $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$ e quindi

$$f(u+h) - [\ f(u) + < \nabla f(u)\ ,\ h > + \frac{1}{2} < H_f(u)h, h >] =$$

$$\int_0^1 (1-t) < [H_f(u+th) - H_f(u)]\,h, h > dt$$

Stima del resto: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ |t| \le \delta_\epsilon \Rightarrow |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \Rightarrow$

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right] h_i h_j\,| \le n^2 \epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \Leftrightarrow \exists \delta > 0 :\ f(u) \le f(v)\ \ \forall v \in B_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora
(i) $f \in C^1(B_r(u)) \Rightarrow \nabla f(u) = 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)
(ii) $f \in C^2(B_r(u)) \Rightarrow < H_f(u)\,h,\ h > \ge 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n$, $|t| \le \delta_h \Rightarrow f(u) \le f(u+th) \Rightarrow$
$0 = \frac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} = < \nabla f(u), h > \Rightarrow \nabla f(u) = 0.$
(ii) Dalla formula di Taylor: $\nabla f(u) = 0$, $0 \le f(u+th) - f(u) =$

$$\nabla f(u) + t^2 [< H_f(u)\,h,\ h > + \circ(1)] \Rightarrow < H_f(u)\ h,\ h > \ \ge\ 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(B_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:
$< H_f(u)\,h, h > \ > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \ne 0, \Rightarrow u$ é minimo locale

Prova. $h \to < H_f(u)h, h >$ continua, $< H_f(u)h, h > \; > \; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\, h \neq 0, \;\Rightarrow$

$$\exists\, m := \; \min_{\|h\|=1} \; < H_f(u)\, h, h > \; > \; 0$$

Quindi, $\quad < H_f(u)\, h, h > \; \geq \; m\, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n.$ Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $\quad 0 < \|h\| \; << \; 1 \;\Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) \; = \; \|h\|^2 \; [< H_f(u) \, \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > \; + \; \circ(1)] \; \geq \; \|h\|^2 \; [m \, + \circ(1)] \; > \; 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \; f(u) \geq f(v) \;\; \forall v \in B_\delta(u), \;\; u$ si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $\quad < H_f(u)\, h, \; h > \leq \; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n.$

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(B_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \; < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \; h \neq 0$$

Forme quadratiche La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \ldots, x_n)$ di f dipende dal segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h, \; h > \; = \; \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \qquad\qquad h = (h_1, \ldots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Il segno forma quadratica dipende dal segno degli autovalori.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\;\, h, \, h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n \qquad\qquad \text{si dice}$$

definita positiva (negativa) se $\; < \mathcal{A}\;\, h, \, h > \; > \; 0\, (< 0), \;\; \forall\, h \neq (0,0)$
semidefinita positiva (negativa) se $\; < \mathcal{A}\;\, h, \, h > \geq \; 0\, (\leq 0), \;\; \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\quad \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\; h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\; h, h >$$

Corollario
(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\;\Leftrightarrow\; \lambda_1 > 0 \;\, (\lambda_n < 0)$
(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = 0 \;\, (\lambda_n = 0)$

ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Lemma di Schwartz: un controesempio. Vediamo un esempio in cui l'invertibilitá nell'ordine di derivazione non vale. Sia

$$g(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{e, quindi,} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^5-y^4x-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Si vede subito che g, g_x, g_y hanno limite zero in $(0,0)$, e quindi g ha un prolungamento C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$. Poi, in $(0,0)$, troviamo $g_{xx} = g_{yy} = 0$ e

$$[\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial x}](0,0) = \lim_{y\to 0}\tfrac{1}{y}\tfrac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -1 \quad \text{mentre} \quad [\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial y}](0,0) = \lim_{x\to 0}\tfrac{1}{x}\tfrac{\partial g}{\partial y}(x,0) = 1$$

Coerentemente, g non é di classe C^2. Infatti

$$\tfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = \tfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{non é continua in } (0,0), \text{ perché}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,0) \;=\; -1 \quad \forall x \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(0,y) \;=\; 1 \quad \forall y \neq 0$$

2. Campi conservativi. Una $F \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ si chiama anche 'campo vettoriale' in $\mathbf{R}^n$. Tale 'campo' si dice conservativo se

$$\exists U \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) : \quad F = \nabla U$$

Tale U, se esiste, é anche unica (a meno di una costante additiva), e si chiama **'potenziale'** del campo F. L'unicitá sussiste anche nel caso $F \in C(O, \mathbf{R}^n)$, O aperto connesso di $\mathbf{R}^n$.
Se $n = 1$, ogni F ammette potenziale (ovvero una primitiva). Dal Lemma di Schwartz segue che ció non é piú vero, in generale, se $n \geq 2$:

$$F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), \quad F(x) = \nabla U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n \qquad (*)$$

Tale condizione é anche sufficente per l'esistenza *locale* : se $O = B_r(0) \subset \mathbf{R}^2$ (piú in generale, se O é *semplicemente connesso*) e vale $(*)$ in B_r, allora:

$$U(x,y) := \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt \quad \Rightarrow \quad U_x = F_1, U_y = F_2$$

Infatti, $U_y = F_2(x,y)$ (TFC) e, 'derivando sotto segno di integrale'

$$U_x = F_1(x,0) + \int_0^y \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,t)dt = F_1(x,0) + \int_0^y \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,t)dt = F_1(x,0) + F_1(x,y) - F_1(x,0)$$

3. Il laplaciano in coordinate polari. Sia $f \in C^2(\Omega)$, $\quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto.

$$\text{Laplaciano di} f : \qquad \Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sia $n = 2$. Sia $g(\rho, \theta) := f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ (g é f in coordinate polari). Allora

$$(\Delta f)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho}$$

Infatti, risulta $\quad g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$

$$g_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\sin^2\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \left[f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{\rho}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \right]$$

Da $f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = g_\rho$ segue $g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho} = (f_{xx} + f_{yy})(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

4. Calcolare ΔU, ove $U(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $\quad x^2 + y^2 > 0$.

5. Sia $N \geq 3$. Sia $U(x) = \frac{1}{\|x\|^{N-2}}$, $\quad x \in \mathbf{R}^N$, $\quad \|x\| > 0$. Calcolare ΔU.

6. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare che

$$\exists c > 0 : \quad < H_f(x)h, h > \geq c\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \forall y \in \mathbf{R}^n \ \exists! x \in \mathbf{R}^n : \quad \nabla f(x) = y$$

Prova. Fissati x, y, poniamo $\varphi(t) :=< \nabla f(tx + (1-t)y), x - y >$. É

$$\varphi'(t) \ = < H_f(tx + (1-t)y)\,(x - y), x - y > \geq \ c\,\|x - y\|^2$$

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y >= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \geq c\|x - y\|^2$$

Ció implica in particolare l'unicitá: $\quad \nabla f(x) = \nabla f(y) \Rightarrow \|x - y\| = 0$. Inoltre

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \tfrac{d}{dt} f(tx)dt = f(0) + \int_0^1 < \nabla f(tx) - \nabla f(0) + \nabla f(0), x > dt \geq$$

$$f(0)+ < \nabla f(0), x > + \frac{c}{2}\|x\|^2$$

e quindi per ogni fissato y la funzione $x \to f(x)- < x, y >$ é coerciva e continua e quindi ha un minimo globale. Dunque l'equazione $\nabla(f(x)- < x, y >) = 0$ ha soluzione, e cioé l'equazione $\nabla f(x) = y$ ha soluzione.

7. Massimi e minimi

7.1 Sia $\qquad f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$. $\qquad$ É

$$f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad\qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$$

$$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 1,0))$; $\det H(\pm 1,0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$; $(\pm 1,0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

7.2 Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Notiamo che

$$\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$$

e quindi $(0,0),(1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi

$$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3 \qquad\qquad \text{e quindi}$$

- $H_g(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_g(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo locale (e non assoluto, perché $\inf_{\mathbf{R}^2} = -\infty$)

8. Forme quadratiche Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata é

$$< \mathcal{A}\ h, h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n \qquad\qquad \text{si dice}$$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora
$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\ h, h >$

Prova. Sia $\overline{h}$ di norma 1 tale che $m := < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >= \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h >$.
Sia $f(h) = \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2} =< \mathcal{A}\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} >$, $h \neq 0$ e quindi $f(\overline{h}) = \min_{h\neq 0} f(h)$ e quindi

$$0 = \frac{d}{dt} f(\overline{h}+th)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > +t(< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h >) + t^2 < \mathcal{A}h, h >}{1 + 2t < \overline{h}, h > +t^2\|h\|^2}\right]_{|t=0} =$$

$< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h > -2 < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >= 2[< \mathcal{A}\overline{h}, h > - < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >]$
$\forall h \in \mathbf{R}^n$perché $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$. Dunque

$$\mathcal{A}\overline{h} =< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \ \overline{h} = m\overline{h}$$

cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, ed é necessariamente il piú piccolo, giacché

$$\mathcal{A}h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda =< \mathcal{A}h, h > \geq\ m$$