AM210 2013-2014: VI Settimana

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Sia Λ un insieme, I un intervallo e $f : \Lambda \times I \to \mathbf{R}$ una famiglia di funzioni reali di variabile reale dipendente da un 'parametro' $\lambda \in \Lambda$. Ad esempio, se $\Lambda = \mathbf{N}$, si tratta di una successione di funzioni in I. Se la funzione $x \to f(\lambda, x)$ é, per ogni λ, integrabile (eventualmente in senso improprio) in $I = (a, b), -\infty \le a < b \le +\infty$, resta definita la funzione (o *integrale dipendente da parametro*, il parametro λ)

$$\lambda \to \int_a^b f(\lambda, t) dt$$

Un esempio importante é dato dalla **funzione Γ di Eulero**, definita dall'integrale

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} \, dt, \qquad s > 0$$

per la quale vale la seguente formula asintotica o **Formula di Stirling**

$$\Gamma(s+1) = s^{s+\frac{1}{2}} e^{-s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt + \circ(1) \right], \qquad \circ(1) \to_{s \to +\infty} 0$$

Tale formula dá in particolare il comportamento asintotico del fattoriale, giacché $\Gamma(n+1) = n!$
Rientrano nella fattispecie di integrali dipendenti da parametro importanti *trasformazioni integrali*:

$$\lambda \to \mathcal{L}(f)(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt \qquad (trasformata \quad di \quad Laplace)$$

$$\omega \to \mathcal{F}(f)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \qquad (trasformata \quad di \quad Fourier)$$

Nel caso $\Lambda = \mathbf{N}$, una importante trasformazione integrale é data da

$$n \to \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

$\hat{f}$ é la successione dei coefficenti di Fourier di f. Attraverso $\hat{f}$ si puó ricostruire completamente la funzione f (almeno in 'qualche senso' e/o in 'certi casi').
Se $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$, potremo chiederci quale 'regolaritá' (continuitá, derivabilitá..) abbia la funzione $\lambda \to \int_a^b f(\lambda, t) dt$, ovvero con quale regolaritá l'integrale dipenda dal parametro λ.

DIPENDENZA CONTINUA

Sia $\overline{B_r(x_0)} \subset \mathbf{R}^n$. Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a,b], \mathbf{R})$. Allora

$$x \to \int_a^b f(x,t)\,dt \qquad \text{é continua in} \quad \overline{B_r(x_0)}$$

ovvero $\quad x_k \to x \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x_k,t)\,dt \to_k \int_a^b f(x,t)\,dt$

Prova. Segue dalla uniforme continuitá di f in $\overline{B_r(x_0)} \times [a,b]$. Infatti,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 \quad \text{tale che:} \qquad \|x' - x''\| \le \delta_\epsilon, \quad t \in [a,b] \quad \Rightarrow$$

$$|f(x',t) - f(x'',t)| \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \int_a^b f(x',t)\,dt - \int_a^b f(x'',t)\,dt \right| \le \epsilon(b-a).$$

Dipendenza continua nel caso di integrali impropri dipendenti da parametro.

Una $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times (a,b), \mathbf{R})$, $\quad -\infty \le a < b \le +\infty$ si dice **equidominata** in (a,b) (dominata, in (a,b), *uniformemente* rispetto a $x \in \overline{B_r(x_0)}$), se

$$\exists \quad g \in C((a,b)) \quad \text{tale che} \quad \int_a^b |g(t)|dt < +\infty \quad \text{che } \textit{domini} \text{ la } f \text{ in } (a,b)), \quad \text{cioé}$$

$$|f(x,t)| \ \le \ g(t) \qquad \forall x \in \overline{B_r(x_0)}, \quad t \in (a,b)$$

Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times (a,b))$ equidominata. Allora $\quad x \to \int_a^b f(x,t)\,dt$ é continua :

$$x_j \in \overline{B_r(x_0)}, \quad x_j \to_j x \quad \Rightarrow \quad \lim_j \int_a^b f(x_j,t)\,dt = \int_a^b \lim_j f(x_j,t)\,dt$$

Prova. Notiamo innanzi tutto che $\int_a^b |f(x,t)|\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt < +\infty \quad \forall x \in \overline{B_r(x_0)}$, cioé, per ogni $x \in \overline{B_r(x_0)}$, la funzione $\quad t \to f(x,t) \quad$ é (assolutamente) integrabile (in senso generalizzato) in (a,b). Fissiamo ora $\epsilon > 0$. Da $\int_a^b g(t)\,dt < +\infty$ segue:

$$\exists\, a < a_\epsilon < b_\epsilon < b,\ \delta_\epsilon > 0 : \qquad \int_a^{a_\epsilon} g(t)dt \ + \ \int_{b_\epsilon}^b g(t)dt \ \le \ \frac{\epsilon}{2}$$

Inoltre, giá sappiamo che $\int_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f(x_j,t) - f(x,t)|\,dt \to_j 0$ e quindi

$$\limsup_j \int_a^b |f(x_j,t) - f(x,t)| \ dt \ \le 2\int_a^{a_\epsilon} g(t)dt + 2\int_{b_\epsilon}^b g(t)dt \le \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

NOTA. L'equidominatezza é essenziale. Sia ad esempio

$$f(x,t) = \frac{\sin(x^2 t)}{t}, \quad t \in \mathbf{R}, t \neq 0, \quad x \in \mathbf{R}, \qquad f(x,0) = x^2$$

f é continua, ma non equidominata: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\sin(x^2 t)}{t}| dt = +\infty$. Posto $I(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x^2 t)}{t} dt$, I non é continua in $x = 0$, perché $I(0) = 0$, mentre, posto $\tau = x^2 t$, troviamo

$$\lim_{x\to 0} I(x) = \lim_{x\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x^2 t)}{x^2 t} x^2 dt = \lim_{x\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \quad = \pi$$

DERIVAZIONE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

Sia $\overline{B_r(x_0)} \subset \mathbf{R}^n$. Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a,b], \mathbf{R})$. Supponiamo inoltre che per ogni $t \in [a,b]$ esiste $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $\overline{B_r(x_0)}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(\overline{B_r(x_0)} \times [a,b])$. Allora

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt \quad \text{esiste in} \quad B_r(x_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt$$

Qui useremo la uniforme continuitá di $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in $\overline{B_r(x_0)} \times [a,b]$:

$$|s| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{s} \left[\int_a^b f(x + s e_j, t)\, dt - \int_a^b f(x,t)\, dt \right] - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{s} \int_a^b \left[\int_0^1 \frac{d}{d\sigma} f(x + \sigma s e_j, t) d\sigma - s \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \right] dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^b \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x + \sigma s e_j, t) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t) \right) d\sigma \right] dt \right| \leq \epsilon(b-a)$$

Derivazione sotto segno di integrale: il caso degli integrali impropri .

Sia $f \in C(\overline{B_r(x_0)} \times (a,b), \mathbf{R})$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ esiste ed é continua ed inoltre f e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono equidominate (cioé $\exists g$ integrabile in (a,b) tale che $|f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)| \leq g(t)$ $\forall x \in \overline{B_r(x_0)}, \quad t \in (a,b)$), allora

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt \quad \text{esiste in} \quad B_r(x_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_a^b f(x,t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\, dt$$

Prova. Dalla equidominatezza di f e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ segue che $\forall\epsilon>0, \exists a_\epsilon, b_\epsilon$ tali che

$$|s|\le\delta_\epsilon \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{1}{s}\left[\int\limits_a^{a_\epsilon} f(x+se_j,t)\,dt-\int\limits_a^{a_\epsilon} f(x,t)\,dt\right]-\int\limits_a^{a_\epsilon}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt\right| =$$

$$=\left|\int\limits_a^{a_\epsilon}\left[\int\limits_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+\sigma se_j,t)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\right)d\sigma\right]dt\right|\le 2\int\limits_a^{a_\epsilon} g(t)dt\le 2\epsilon \qquad \text{ed anche}$$

$\left|\frac{1}{s}\left[\int\limits_{b_\epsilon}^{b} f(x+se_j,t)\,dt-\int\limits_{b_\epsilon}^{b} f(x,t)\,dt\right]-\int\limits_{b_\epsilon}^{b}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt\right| \le\epsilon$ se $|s|\le\delta_\epsilon$. mentre giá sappiamo che $\lim\limits_{s\to0}\left|\frac{1}{s}\left[\int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f(x+se_j,t)\,dt-\int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} f(x,t)\,dt\right]-\int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,t)\,dt\right| =0.$

Un esempio: la funzione Γ di Eulero e la formula di Stirling

$$\Gamma(s) := \int\limits_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt, \quad s>0$$

La funzione Γ é definita in $(0,+\infty)$ perché $\int\limits_0^1\frac{dt}{t^{1-s}}<+\infty \ \ \forall s>0$ e $e^{-t}\,t^{s-1}$ va a zero, per t che va all'infinito, piú rapidamente di ogni potenza di $\frac{1}{t}$.
Inoltre, $(t,s)\to t^{s-1}e^{-t}$ é equidominata per $s\in[\underline{s},\overline{s}]$, $0<\underline{s}<1<\overline{s}$, dalla funzione

$$f(t)=t^{\underline{s}-1}\,e^{-t} \text{ per } t\le1, \qquad f(t)=t^{\overline{s}-1}\,e^{-t} \text{ per } t\ge1.$$

Quindi $\Gamma(s)$ é continua. Poi, siccome $\frac{\partial}{\partial s}t^{s-1}\,e^{-t}=t^{s-1}\log t\,e^{-t}$ é ugualmente continua ed equidominata, Γ é derivabile, con $\Gamma'(s)=\int\limits_0^\infty t^{s-1}\log t\,e^{-t}\,dt, \quad s>0.$
Γ é infatti C^∞. Ad esempio, $\Gamma''(s)=\int\limits_0^\infty t^{s-1}\,(\log t)^2\,e^{-t}\,dt>0.$

Esempio 1. Effettuando il cambio $t=\tau^2$ e quindi integrando per parti, troviamo

$$\Gamma(\frac{3}{2})=\int_0^\infty\sqrt{t}e^{-t}dt=2\int_0^\infty\tau e^{-\tau^2}\tau d\tau=\int_0^\infty e^{-\tau^2}d\tau=\sqrt{\pi}$$

Esempio 2. Integrando per parti,

$$\Gamma(s+1)=\int\limits_0^\infty t^s\,e^{-t}\,dt=s\int\limits_0^\infty t^{s-1}\,e^{-t}\,dt=s\Gamma(s)$$

In particolare, siccome $\Gamma(1)=1$,

$$\Gamma(n+1)=n!$$

Il *comportamento asintotico di* $n!$ é descritto dalla

Formula di Stirling

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+\frac{1}{2}}\, e^{-s}\, \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;+\; \circ(1)\right], \qquad \circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$$

Dimostrazione della Formula di Stirling.: Posto $t = s\tau$, troviamo

$$\Gamma(s+1) := \int\limits_0^\infty t^s\, e^{-t}\, dt = s^s \int\limits_0^\infty \tau^s e^{-s\tau} s d\tau \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int\limits_0^\infty e^{s-s(\tau-\log\tau\,)}\, d\tau \; \overset{t=\tau-1}{1}$$

$$\Gamma(s+1) \;=\; s^{s+1}\, e^{-s} \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-sh(t)}\, dt \qquad \text{ove} \quad h(t) = t - \log(t+1).$$

Si ha (i) $h(t) = \frac{t^2}{2}(1+\epsilon(t))$ ove $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t) = 0$ e $h(x) \geq \frac{x^2}{4}$ se $|x| \leq \beta << 1$ (ii) $h''(t) > 0 \quad \forall t,$ e) $(\frac{h(t)}{t})' = \frac{(t+1)\log(t+1)-t}{t^2(t+1)} \geq 0 \quad \forall t \geq -1$. Quindi

$$h(t) \geq \frac{h(\beta)}{\beta}|t| \geq \frac{\beta}{4}|t| \quad \forall |t| \geq \beta$$

Per determinare il comportamento asintotico di $\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-sh(t)}\, dt$ osserviamo che

$$\int\limits_{-1}^{-\beta} e^{-sh(t)}\, dt \leq \int\limits_{-1}^{-\beta} e^{s\frac{\beta}{4}t}\, dt \leq \frac{4}{\beta s} e^{-s\frac{\beta^2}{4}} \qquad \text{e} \qquad \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-sh(t)}\, dt \leq \int\limits_{\beta}^{\infty} e^{-s\frac{\beta}{4}t}\, dt = \frac{4}{s\beta} e^{-s\frac{\beta^2}{4}}$$

decadono esponenzialmente a zero (per s che va a $+\infty$) mentre, effettuando il cambio di variabile $t\sqrt{s} = x$, troviamo

$$\int\limits_{-\beta}^{\beta} e^{-sh(t)}\, dt = \frac{1}{\sqrt{s}} \int\limits_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})}\, dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \circ(1)\right]$$

con $\circ(1) \to_{s\to+\infty} 0$ perché

$$\int\limits_{-\sqrt{s}\beta}^{\sqrt{s}\beta} e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})]}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]} \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \circ(1)$$

giacché la famiglia di funzioni $x \to e^{-s[\frac{x^2}{2s}(1+\epsilon(\frac{x}{\sqrt{s}})]} \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]}$, $x \in \mathbf{R}$ converge (uniformemente sui compatti al tendere di s all'infinito) alla funzione $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ed é equidominata:

$$h(x) \geq \frac{x^2}{4} \quad se \quad |x| \leq \beta \quad \Rightarrow \quad e^{-sh(\frac{x}{\sqrt{s}})}\, \chi_{[-\beta\sqrt{s},\beta\sqrt{s}]} \leq e^{-\frac{x^2}{4}} \quad se \quad |x| \leq \sqrt{s}\beta$$

Un bell'esercizio: calcolo dell'integrale di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \textbf{(integrale di Dirichlet)}$$

Siccome $\quad f(x,t) := \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}, \quad f_x = -e^{-tx}\sin t \quad$ sono continue ed equidominate da $\quad g(t) := e^{-t\underline{x}} \quad$ in $[\underline{x}, +\infty) \times (0,\infty)$ per ogni $\underline{x} > 0$, si ha

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}\, \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t\, dt = -\frac{1}{1+x^2}$$

come si vede integrando (due volte) per parti. Da qui

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx} dt - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi} dt \;=\; \arctan \xi - \arctan x.$$

Ma $\quad \sup_{t\in K} |f(x,t) - f(t)| \to_{\|x\|\to\infty} 0 \quad \forall K \subset I$ compatto ed $f(x,t)$ é equidominata in $\{\|x\| \geq R\} \times I \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x,t)dt \to_{\|x\|\to\infty} \int_a^b f(t)dt$, e quindi $\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t\xi} dt \overset{\xi\to+\infty}{\to} 0$.

Ció implica, per quanto sopra, che $\quad \lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt \;=\; \frac{\pi}{2}$. Resta da provare che

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t}\, e^{-tx}\, dt$$

cioé che $\quad h(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt$ é continua in $x = 0$. Il Teorema sulla dipendenza continua non si applica tuttavia in questo caso, perché $\exists g \geq 0 : \int_0^\infty g < \infty$ e $|\frac{\sin t}{t} e^{-tx}| \leq g(t) \quad \forall x > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt < \infty, \quad$ mentre $\quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty.$

Se $G(t) := \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$, esiste finito $G(\infty) := \lim_{t\to+\infty} G(t)$. Quindi $|G(t) - G(\infty| \leq \epsilon$ se $t \geq t_\epsilon$ e G é limitata: $\exists M$ tale che $\quad |G(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$. Integrando per parti ed effettuando quindi il cambio di variabile $s := tx$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx} dt = x \int_0^{+\infty} G(t) e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} G(\tfrac{s}{x}) e^{-s} ds \to_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\text{perché} \quad \int_0^{+\infty} G(\tfrac{s}{x}) e^{-s} ds - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} [G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds \qquad \text{e}$$

$$|\int_0^\delta [G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)] e^{-s} ds| \leq 2M[1 - e^{-\delta}] \qquad \int_\delta^\infty |G(\tfrac{s}{x}) - G(\infty)| e^{-s} ds \leq \epsilon \text{ se } \tfrac{\delta}{x} \geq t_\epsilon.$$

Una applicazione: Invertibilitá nell'ordine di integrazione (Fubini)

Teorema di Fubini . Sia $f \in C([a,b] \times [c,d])$. Allora le funzioni $[a,b] \ni x \to \int_c^d f(x,y)dy$, $[c,d] \ni y \to \int_a^b f(x,y)dx$ sono continue (e quindi integrabili!) e si ha

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Prova . Dal TFC: $\frac{d}{dy} \int_c^y f(s,t)dt = f(s,y)$; quindi, derivando sotto segno di integrale, $\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)dt \right) ds = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_c^y f(s,t)dt \right) ds = \int_a^b f(s,y)ds.$

D'altra parte, dalla continuitá di $t \to \int_a^b f(s,t)ds$ segue, grazie al TFC, che

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt = \int_a^b f(s,y)ds. \qquad \text{Dunque,}$$

$\frac{d}{dy} \left[\int_c^y \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt - \int_a^b \left(\int_c^y f(s,t)dt \right) ds \right] \equiv 0$ e quindi (presi $y = c, y = d$): $0 =$

$$\int_c^c \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt - \int_a^b \left(\int_c^c f(s,t)dt \right) ds = \int_c^d \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt - \int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)dt \right) ds$$

Corollario: derivazione del Lemma di Schwartz dal Teorema di Fubini. Sia $f \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta))$. Una ripetuta applicazione del Teorema Fondamentale del Calcolo dice che

$$\int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y [\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt \right) ds = \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y \frac{d}{dt} [\frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt \right) ds =$$

$$= \int_{x_0}^x \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,y_0) \right] ds = f(x,y) - f(x_0,y) - f(x,y_0) + f(x_0,y_0)$$

e quindi $$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y [\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt \right) ds =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y \left(\int_{x_0}^x [\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt \right) ds \quad = \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Integrale di Gauss. Il Teorema di Fubini vale anche per integrali impropri (vedi l'Appendice). Vediamone una applicazione al calcolo di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad (\mathit{Integrale \quad di \quad Gauss})$$

Si ha, effettuando il cambio di variabile $x^2 = t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Ora, per Fubini $\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \right)^2 = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right] dt \overset{\tau = t\theta}{=}$

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{e^{-t\theta} t d\theta}{\sqrt{t\theta}} \right] dt = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t(1+\theta)}}{\sqrt{\theta}} dt \right] d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{(1+\theta)\sqrt{\theta}} \overset{\theta = s^2}{=}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{2s ds}{s(1+s^2)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s(1+s^2)} = \pi$$

APPENDICE

Fubini negli integrali impropri.

Sia $f \in C((a,b)\times(c,d))$, $\quad -\infty \le a, c; b, d \le +\infty$. Supponiamo esistano funzioni non negative ed integrabili $\quad h \in C((a,b)),\ k \in C((c,d))$ tali che

$$|f(x,y)| \le h(x)\, k(y) \qquad \forall x \in (a,b),\ \forall y \in (c,d)$$

Allora le funzioni $\quad (a,b) \ni x \to \int_c^d f(x,y)dy$, $\ (c,d) \ni y \to \int_a^b f(x,y)dx \quad$ sono continue ed assolutamente integrabili e si ha

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Prova. Intanto, fissati comunque $\quad a' < b'$ in (a,b), $\quad$ da

$$|f(x,y)| \le \left(\sup_{[a',b']} h(x) \right) k(y) \quad \forall a < a' < b' < b \qquad (*)$$

(equidominatezza 'locale' nel 'parametro' x, in (c,d)) segue, dal teorema di dipendenza continua negli integrali impropri, che

(i) la funzione $\quad (a,b) \ni x \to \int\limits_c^d f(x,y)dy \quad$ é continua in (a,b)

(ii) la funzione (nella 'variabile' y e nel 'parametro' s) $\quad (s,y) \to \int\limits_a^s f(x,y)dx \quad$ é equidominata dalla $y \to [\int\limits_a^b h]\ k(y)$ mentre la sua derivata (rispetto al 'parametro' s) $\quad \frac{d}{ds}\int\limits_a^s f(x,y)dx = f(s,y)$ é equidominata da $\left(\sup\limits_{[a',b']} h(x)\right) k(y)$.

Ed allora da (i) segue, per il TFC, che

$$\frac{d}{ds}\left[\int\limits_a^s \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx\right] = \int\limits_c^d f(s,y)dy$$

mentre da (ii) segue, per il teorema di derivazione sotto segno di integrale negli integrali impropri, che

$$\frac{d}{ds}\left[\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^s f(x,y)dx\right) dy\right] = \int\limits_c^d f(s,y)dy$$

Dunque le due funzioni $\int\limits_a^s \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx$ e $\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^s f(x,y)dx\right) dy$, coincidendo in $s=a$, coincidono per ogni $s \in (a,b)$, e quindi

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx = \lim_{s\to b}\int\limits_a^s \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx =$$

$$\lim_{s\to b}\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^s f(x,y)dx\right) dy = \int\limits_c^d \lim_{s\to b}\left(\int\limits_a^s f(x,y)dx\right) dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right) dy$$

ove il passaggio al limite sotto segno di integrale é lecito perché

1. $$\sup_{y\in[c',d']} |\int\limits_a^b f(x,y)dx - \int\limits_a^s f(x,y)dx| \le \left(\int\limits_s^b h(x)dx\right) \sup_{y\in[c',d']} k(y) \to_{s\to b} 0$$

(ovvero, la convergenza é uniforme sui compatti $[c',d'] \subset [c,d]]$)

2. $$|\int\limits_a^s f(x,y)dx| \le k(y)\,[\int\limits_a^b h(x)dx] \qquad \text{(equidominatezza)}$$