AM210: Tracce delle lezioni- VII Settimana

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Indicheremo con supp(f), $\quad f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la chiusura dell'insieme $\{x : f(x)\neq 0\}$. Indicheremo con $C_0(\mathbf{R}) := \{f\in C(\mathbf{R}) : \quad \text{supp}(f)$ é compatto$\}$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue a supporto compatto.

In $C_0(\mathbf{R})$ sono definite le norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|, \quad \|f\|_1 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$

Per ogni $f, g\in C_0(\mathbf{R})$ é definita in $\mathbf{R}$ la funzione

$$(f*g)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

Tale operazione tra funzioni si chiama *prodotto di convoluzione* e la funzione $f*g$ é detta, semplicemente, *convoluzione* tra f e g.

NOTA. $\quad f*g$ é definita anche se una sola, tra f e g, é a supporto compatto.

Proposizione

(i) $\quad$ *supp* $f*g\subset$ *supp* f + *supp* g e quindi $f*g\in C_0(\mathbf{R}) \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R})$

(ii) $\quad$ L'applicazione $\quad (f,g)\to f*g \quad$ é (**bilineare e simmetrica**).

(iii) $\quad \|f*g\|_\infty \le \|g\|_1\,\|f\|_\infty \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R})$ (**continuitá**)

(iv) $\quad \|f*g\|_1 \le \|g\|_1\,\|f\|_1 \quad \forall f,g\in C_0(\mathbf{R}) \quad$ (**Diseguaglianza di Young**)

(v) $\quad f,g\in C_0(\mathbf{R}), g\in C^k \quad \Rightarrow \quad f*g\in C^k(\mathbf{R})$ (**effetto regolarizzante**)

(vi) $\quad f\in C_0$, p polinomio di grado $n \quad \Rightarrow \quad f*p$ é un polinomio di grado n.

NOTA. Se f (o g) é solo a supporto compatto, $f*g$ non sará piú a supporto compatto, mentre (ii) continua a valere e la (iii) vale per ogni $g\in C^k$.

Prova della Proposizione

(i) Che $f*g$ sia continua deriva dal fatto che $(x,y)\to f(y)g(x-y)$ é continua ed equidominata: $\quad |f(y)g(x-y)|\le \|f\|_\infty |g(y)| \quad \forall x,y\in\mathbf{R}. \quad$ Poi,

$$x \notin supp\, f + supp\, g, \quad y \in \ supp\, f \quad \Rightarrow \quad x - y \notin \ supp\, g \quad \Rightarrow \quad g(x-y) = 0$$

Dunque $\quad x \notin supp\, f + supp\, g \quad \Rightarrow \quad f(y)g(x-y) = 0 \quad \forall y \quad \Rightarrow \quad (f * g)(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad supp\, f * g \subset supp\, f + supp\, g := \{a + b : \quad a \in \ supp\, f, b \in \ supp\, g\}$$

(ii) La bilinearitá é evidente. La simmetria segue dal cambio di variabile $t = x - y$:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\, dy \ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\, dt \ = \ (g * f)(x)$$

(iii) $\quad |(f * g)(x)| :\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\, dy \ \leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy$

(iv) $\quad$ Per Fubini e l'invarianza dell'integrale per traslazione,

$$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f*g|(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\, dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \right) dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy \right) \ = \ \|f\|_1 \, \|g\|_1$$

(v) $\quad$ É una conseguenza del Teorema di derivazione sotto segno di integrale:

$$g \in C_0 \cap C^1 \quad \Rightarrow \quad |f(y)g'(x-y)| \leq \|g'\|_\infty |f(y)| \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) \ = \ \frac{d}{dx}(g * f)(x) \ = \ \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \frac{dg}{dx}\,(x-t) dy$$

Piú in generale

$$g \in C_0^k \quad \Rightarrow \quad f * g \in C^k \quad \text{e} \quad \frac{d^j}{dx^j}(f * g)(x) \ = \ (f * \frac{d^j g}{dx^j})(x) \qquad \forall j \leq k$$

(vi) $\quad$ Scriviamo $p(x-y) = \sum_{k=0}^n a_k (x-y)^k = \sum_{k=0}^n b_k(y) x^k$ e quindi

$$(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(x-y) dy = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) b_k(y) dy \right) x^k$$

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$, $\varphi \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).
Sia $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora $f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} f$ uniformemente sui limitati.

Infatti, $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq R\epsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy = 1$, e quindi $|x| \leq M \Rightarrow$

$$|f(x) - (f*\varphi_\epsilon)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \right| \leq$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \leq \sup_{|x|\leq M,\ |x-y|\leq R\epsilon} |f(x)-f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

perché f é uniformemente continua in $[-R-\epsilon, R+\epsilon]$.

Teorema 1 (approssimazione via convoluzione)
Siano $\varphi_n \in C_0([-M,M])$, $\varphi_n \geq 0$, con $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = 1$. Allora

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(x)dx \to_n 1 \quad \forall \delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_{[-R,R]} |(f*\varphi_n((x) - f(x)| \to_n 0 \quad \forall f \in C(\mathbf{R}), \forall R > 0$$

Prova. Per ogni $\delta > 0$, si ha $|f(x) - (f*\varphi_n)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-y))\,\varphi_n(y)\,dy \right| \leq$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy = \int_{-\infty}^{-\delta} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy +$$
$$\int_{\delta}^{+\infty} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy$$

Ma, per la uniforme continuitá di f in $[-(R+\delta), R+\delta]$, si ha che $\forall \epsilon, \exists \delta_\epsilon$ tale che

$$|x| \leq R \quad \Rightarrow \quad \int_{-\delta}^{\delta} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy \leq \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = \epsilon$$

mentre $\int_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(x)dx \to_n 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{-\delta} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)dy + \int_{\delta}^{+\infty} |f(x)-f(x-y)|\,\varphi_n(y)dy \leq$

$$\leq 4 \sup_{z\in[-(R+M), R+M]} |f(z)| \quad \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(y)\,dy + \int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(y)\,dy \right] \to_n 0$$

ESEMPIO 1. $\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{c_n}\chi_{[-1,1]}, \quad \psi_n(x) := (1-x^2)^n, \quad c_n = \int\limits_{-1}^{1} \psi_n(x)dx.$

Si tratta di provare che $\varphi_n \to_n 0$ uniformememente in $|x| \ge \delta \quad \forall \delta > 0$. Intanto $|x| \ge \delta \Rightarrow (1-x^2)^n \le (1-\delta^2)^n$. Poi,

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta d\theta \ge 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{n+1}$$

(in effetti é $\int\limits_{0}^{1}(1-s^2)^n ds = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})\right]$). Dunque

$$\sup_{|x|\ge\delta} \varphi_n(x) \le (1-\delta^2)^n\,(n+1) \to_n 0$$

IL TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.

Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[-R, R]$ quale che sia R, ovvero

esistono polinomi p_n tali che $\quad \sup\limits_{|x|\le R} |f(x) - p_n(x)| \to_n 0 \qquad \forall R > 0.$

Prova . É sufficente provare che se $f(x) = 0$ per $|x| \ge \frac{2}{3}$, allora

esistono p_n polinomi tali che $\quad \sup\limits_{|y|\le\frac{1}{3}} |f(y) - p_n(y)| \to 0.$

Infatti, presa $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi \equiv 1$ in $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, $\varphi(x) = 0$ se $|x| \ge \frac{2}{3}$, e posto $f_R(x) := \varphi(x)f(3Rx)$, é $f_R(x) = 0$ se $|x| \ge \frac{2}{3}$, ed esistono allora polinomi p_n tali che

$$\sup_{|x|\le\frac{1}{3}} |f_R(x) - p_n(x)| \to 0$$

e quindi $\quad \sup\limits_{|y|\le R} |f(y) - p_n(\frac{y}{3R})| = \sup\limits_{|x|\le\frac{1}{3}} |\varphi(x)f(3Rx) - p_n(x)| \to 0$

Da ció segue infine che esistono polinomi $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ tali che

$$\sup_{|x|\le 1} |f(x) - p_1(x)| \le 1, \ldots, \sup_{|x|\le n} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{n} \ldots$$

e quindi, fissato R, $\sup\limits_{|x|\le R} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{n}$ non appena $n \ge R$.
Possiamo dunque supporre che $f(x) = 0$ per $|x| \ge \frac{2}{3}$. Ma, allora,

$$p_n(x) := (f * \varphi_n)(x), \quad x \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \quad \text{sono polinomi,}$$

(le φ_n sono quelle dell'Esempio 1) giacché $\quad \varphi_n = c_n^{-1}\psi_n\chi_{[-1,1]} \quad$ e

$$|x| \leq \frac{1}{3},\ |y| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x-y| \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x-y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x-y)\chi_{[-1,1]}(y) = f(x-y) \qquad \forall y \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(1-y^2)^n \chi_{[-1,1]}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(1-y^2)^n\, dy = \ (f * \psi_n)(x)$$

che sono appunto polinomi. Dunque la restrizione di p_n a $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ é un polinomo.

Basta infine osservare che, in virtú del Teorema 1, $p_n * f$ converge uniformemente sui compatti, e quindi, in particolare, su $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$) ad f.

CONVOLUZIONE in $C_{2\pi}$

Sia $\quad C_{2\pi} := \{f \in C(\mathbf{R}), f(t+2\pi) = f(t)\ \forall t\} \quad$ lo spazio delle funzioni continue 2π periodiche dotato della norma della convergenza uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{\mathbf{R}} |f(x)| = \sup_{|x| \leq \pi} |f(x)|$$

Un importante sottospazio lineare di $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ é quello dei polinomi trigonometrici

$$P := \{P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) : a_n, b_n \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N}\}$$

Notiamo esplicitamente che P é una *sottoalgebra* di $C_{2\pi}$, ovvero *il prodotto di polinomi trigonometrici é un polinomio trigonometrico.* Per vederlo, basta mostrare che $\cos nt \cos mt, \sin nt \sin mt, \cos nt \sin mt$ sono polinomi trigonometrici. Verifichiamolo per $\cos nt \cos mt$, usando le formule di Eulero:

$$\cos nt \cos mt = \frac{1}{2}\left(e^{int} + e^{-int}\right)\frac{1}{2}\left(e^{imt} + e^{-imt}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(n+m)t} + e^{i(n-m)t} + e^{-i(n-m)t} + e^{-i(n+m)t}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right)$$

Date $\quad f, g \in C_{2\pi}$, é definita

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds, \qquad \forall f, g \in C_{2\pi}$$

Prime proprietá: $f*g=g*f$. Infatti, cambiando variabile $t-s=\sigma$, troviamo

$$(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma=(g*f)(t)$$

perché $h\in C_{2\pi}(\mathbf{R}) \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\int_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt=h(x+\pi)-h(x-\pi)\equiv 0 \quad\Rightarrow$

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt$$

Poi, $f*g$ é chiaramente in $C_{2\pi}$.

Proposizione.

$f\in C_{2\pi}$, P_N polinomio trigonometrico $\Rightarrow$ $f*P_N$ é un polinomio trigonometrico.

Prova. Basta osservare che

$$(f*P_N)(t)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\sum_{n=0}^{N} a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)ds=$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(nt-ns)ds+b_n\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(nt-ns)ds$$

e che $\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(nt-ns)ds=\int_{-\pi}^{\pi} f(s)[\cos(nt)\cos(-ns)-\sin(nt)\sin(-ns)]ds=$
$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\cos(nt)+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds\right)\sin(nt)$
$\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(nt-ns)ds=\int_{-\pi}^{\pi} f(s)[\sin(nt)\cos(-ns)+\sin(-ns)\cos(nt)]ds=$
$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\sin(nt)-\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds\right]\cos(nt)$

Approssimazione per convoluzione Siano $g_k\in C_{2\pi}$ tali che

(i) $g_k(t)\geq 0 \quad \forall t\in\mathbf{R}$

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_k(t)dt=1 \quad \forall k\in\mathbf{N}$

(iii) $g_k\to_k 0$ uniformemente in $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi] \qquad \forall\delta\in(0,\pi)$

Allora

$$\|f * g_k - f\|_\infty \to_k 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}$$

Prova. $\quad |(f * g_k)(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi} | \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s) g_k(s) ds - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) g_k(s) ds| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)| g_k(s) ds + 2\|f\|_\infty \epsilon \qquad \forall k \geq k(\delta, \epsilon)$$

Se si é scelto δ abbastanza piccolo di modo che

$$|s| \leq \delta, t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow |f(t-s) - f(t)| \leq \epsilon$$

(possibile perché f, essendo continua e periodica é uniformemente continua in $\mathbf{R}$), si conclude che

$$|(f * g_k)(t) - f(t)| \leq \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty)$$

ESEMPIO. $\quad g_k = P_k(t) := (c_k)^{-1} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k, \qquad c_k = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt.$

Chiaramente vi é solo da provare (iii). Stimiamo c_k:

$$2\pi c_k = 2 \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geq \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t dt = \frac{2}{(k+1)}$$

Dunque, $\quad \sup\limits_{\delta \leq |t| \leq \pi} P_k(t) \leq (c_k)^{-1} \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \leq \pi(k+1) \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \to_k 0$

I POLINOMI TRIGONOMETRICI SONO DENSI IN $C_{2\pi}(\mathbf{R})$

Possiamo ora dimostrare il **Teorema di aprossimazione di Weierstrass** per funzioni in $C_{2\pi}$:

ogni $f \in C_{2\pi}$ é limite uniforme di successioni di polinomi trigonometrici, ovvero P é denso in $C_{2\pi}$.

Infatti, se $f \in C_{2\pi}$ e P_n sono come nell'esempio 2, la successione di polinomi trigonometrici $f * P_n$ converge uniformemente a f .

Corollario. $C_{2\pi}$ é separabile (ovvero ha un sottoinsieme numerabile denso)

L'insieme dei polinomi a coefficenti razionali é sottoinsieme numerabile denso di $C_{2\pi}$.