AM210-2013/14: Tracce delle lezioni- IX Settimana

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ continue in (a, b) determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1((a, b))$ tali che

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b) \qquad \textbf{(ED)}$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.

Tale equazione é **lineare** perché l'operatore (*differenziale*)

$$\mathcal{D} : C^1((a, b)) \to C((a, b)), \qquad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x)$$

é **lineare**, cioé $\mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Quindi l'insieme delle soluzioni di (ED) é $Ker\mathcal{D} + \overline{y}$ ove $\mathcal{D}\overline{y} = b$. In particolare, se $Ker\mathcal{D} \neq \{0\}$, ed (ED) ha soluzione, allora ne ha infinite.

(ED) é **del primo ordine** perché nell'equazione compare solo la *derivata prima.*

Come osservato, (ED), se ha una soluzione, ne ha infinite. Fissato peró $x_0 \in (a, b)$ (**'punto iniziale'**) e y_0 (**'valore iniziale'**), il problema

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ ha, come vedremo, una ed una sola soluzione.
Tale problema viene chiamato **problema di Cauchy** associato ad (ED).

Se $a \equiv 0$, (ED) diventa $\quad y' = b \quad$ e le sue soluzioni sono le **primitive** di b.

Condizione necessaria (Teorema di Darboux) perché $b(x)$ ammetta primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (PVI).

Tale proprietá non é peró sufficente. Ad esempio,

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \sin^2 \frac{1}{x}$$

ha la (PVI), ma non é dotata di primitiva su tutto $\mathbf{R}$. La sua primitiva, nulla in $x=0$, é pari e, sui positivi, é data da $P(x) := \int_0^x \sin^2 \frac{1}{t} dt = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau$. Ora, supposto che $P'(0)$ esista, deve valere, per paritá, zero.
D'altra parte, se δ é tale che $\{x \in [0,\pi] : \sin^2 x \geq \delta\} = [\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi+1}{2}]$ (che ha lunghezza 1), e preso $x = \frac{1}{n\pi}$, troviamo

$$0 \;=\; P'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x} = \lim_n \; n\pi \int_{n\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 \tau}{\tau^2} d\tau \;\; \geq$$

$$\lim_n \; n\delta\pi \sum_{k\geq n} \int_{k\pi+\frac{\pi-1}{2}}^{k\pi+\frac{\pi+1}{2}} \frac{d\tau}{\tau^2} \;\geq\; \lim_n \; \frac{n\delta}{4\pi} \sum_{k\geq n} \frac{1}{k^2} \;\geq\; \frac{\delta}{4\pi}$$

Dunque P non é derivabile in $x=0$.

La continuitá di $b(x)$ é condizione sufficente (ma non necessaria) per l'esistenza di una primitiva di b:

se b é continua le primitive di b esistono e, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), sono date, tutte, da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt \qquad x_0 \in (a,b), \quad y_0 \in \mathbf{R}$$

Tale funzione é anche **l'unica soluzione del Problema di Cauchy (PC)**.

Di piú, **la continuitá di $b(x)$ é essenziale**:

se $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\forall x \neq 0$, $f(0) = c$, allora

$$P'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = |x| + c \quad \Rightarrow \quad P'(0) \quad \text{non esiste.}$$

Tuttavia, **La continuitá di $b(x)$ non é necessaria** la funzione

$$f(x) \;=\; 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 0 \qquad \text{é discontinua in zero}$$

ma é la derivata (in tutto $\mathbf{R}$) di $P(x) := x^2 \sin\frac{1}{x}$, $P(0) = 0$.

INTEGRALE GENERALE DI (ED)

Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, troviamo che

$$\left(y(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} \right)' = [y'(x) + a(x)y(x)]e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right] \qquad (IG)$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama appunto Integrale Generale di (ED).

ESEMPIO 1. L'equazione $\quad y' - \lambda y = e^{\mu x} \quad$ ha come soluzioni le funzioni

$$y(x) = e^{\lambda x} y(0) + \frac{e^{\mu x} - e^{\lambda x}}{\mu - \lambda} \qquad se \qquad \mu \neq \lambda$$

$$y(x) = (y(0) + x)e^{\lambda x} \qquad se \qquad \lambda = \mu$$

ESEMPIO 2. Sia $\quad D := \frac{d}{dx}, \ldots, \; D^k := \overbrace{D \circ \ldots \circ D}^{k \; times} = \frac{d^k}{dx^k} \quad$ Notiamo che

$$D : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R}) \qquad Dy := y'$$

definisce un operatore lineare di C^∞ in sé. Scriveremo anche

$$(D - \lambda)y := y' - \lambda y, \qquad (D - \lambda)^k y := \overbrace{(D - \lambda) \circ \ldots \circ (D - \lambda)}^{k \; volte} y \quad \forall y \in C^\infty$$

Usando l'esempio 1 vediamo che l'equazione

$$(D - \lambda)^2 y = (D - \lambda)(y' - \lambda y) = y'' - 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = ce^{\lambda x} \qquad oppure \qquad y' - \lambda y = ce^{\lambda x} \qquad ovvero \qquad y(x) = (c + x)e^{\lambda x}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI AUTONOME DEL I ORDINE

esistenza, unicitá, tempo di esistenza

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x \in C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I \qquad \textbf{(EDA)}$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che

se $x(t), t \in (\alpha, \beta)$ é soluzione, allora anche $x(t-t_0), t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$ é soluzione.

Per questa ragione l' istante iniziale viene convenzionalmente indicato con '$t = 0$' e la condizione di Cauchy si scrive quindi, usualmente, nella forma $x(0) = x_0$. Il Problema di Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

ha la seguente interpretazione 'dinamica': la soluzione $x(t)$ di (PC) indica la posizione al tempo t di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si trova, al tempo 'iniziale' $t = 0$, nella posizione x_0, e che si muove con velocitá, all'istante t, data da $f(x(t))$ (la velocitá dipende cioé-solo- dalla posizione al tempo t).

1. Equilibri.

Se $f(x_0) = 0$, una soluzione é banalmente data dalla funzione costante $x(t) = x_0$ per ogni t . Siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove, la posizione x_0 si dice appunto di **equilibrio**.

2. Esistenza e unicitá locale se $f(x_0) \neq 0$.

Determinazione di una soluzione di (PC). Possiamo supporre $f(x_0) > 0$. Sia (a,b), $-\infty \leq a$, $b \leq +\infty$, il piú grande intervallo contenente x_0 su cui risulta $f(x) > 0$. É allora definita in (a,b) la funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a,b)$$

Ovviamente, $F'(x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in (a,b)$. Ora, se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} \equiv 1$ e quindi, integrando tra 0 e t,

$$F(x(t)) = t \quad \text{ovvero} \quad x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in (F(a), F(b))$$

Siccome

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b)) \quad \text{e} \quad F^{-1}(0) = x_0$$

(PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a), F(b))$**:** $\quad x(t) = F^{-1}(t)$.

Notiamo che $\mathcal{I}m\ x = \mathcal{I}m\ F^{-1} = \mathcal{D}F = (a, b)$ ovvero gli 'estremi' della traiettorie $x(t)$ sono, se finiti, equilibri.

3. $f(x_0) = 0$**:** **Unicitá/non unicitá locale.** La soluzione costante,

$x(t) = x_0 \quad \forall t,$ *non é in generale l'unica soluzione:*

se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se $f(x) = O(|x - x_0|^{\delta})$ per un $\delta \in (0, 1)$) allora la formula al punto 2 continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). Di fatto, ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamo esempi di (PC) con **infinite soluzioni:**

$$(k) \qquad \dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0, \qquad (kk) \qquad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

(k) Per ogni $t^+ > 0$ c'é una soluzione che passa per zero al tempo t^+: se $F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}}$ la soluzione (non costante) $x(t)$ che in t^+ vale zero é data implicitamente dall'equazione $\quad F(x) = t - t^+ \quad$ e quindi

$$x(t) = F^{-1}(t) = \left(\frac{t - t^+}{3}\right)^3$$

Analogamente si trova la soluzione non di equilibrio che vale zero al tempo $t^- < 0$: $x(t) = \left(\frac{t-t^-}{3}\right)^3$. Tali soluzioni si incollano per dare origine a tutte le soluzioni che passano per $x = 0$ al tempo $t = 0$ *(il pennello di Peano)*:

$$x(t) = \left(\frac{t - t^-}{3}\right)^3 \chi_{(-\infty, t^-]} + \left(\frac{t - t^+}{3}\right)^3 \chi_{[t^+, +\infty)} \qquad t^- \leq 0 \leq t^+$$

(kk) In modo del tutto analogo si trova che le soluzioni passanti per $x = 0$ al tempi $t = 0$ sono tutte e solo della forma

$$x(t) = -\left(\frac{t - t^-}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty, t^-]} + \left(\frac{t - t^+}{2}\right)^2 \chi_{[t^+, +\infty)}, \qquad t^- \leq 0 \leq t^+$$

É tuttavia facile mostrare che **se f é localmente Lipschitziana allora la soluzione del Problema di Cauchy é (localmente) unica.** Basta mostrarlo per le soluzioni passanti per un equilibrio (possiamo supporre che vi passino per $t = 0$). Supponiamo dunque che

$$f(x_0) = 0, \quad \exists c > 0 : \quad |f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| \quad \forall x \quad \text{vicino a } x_0$$

Allora, se $x(t)$ é soluzione con $x(0) = x_0$, si ha che, per $\quad t \in [0, \delta]$,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \;\Rightarrow\; x(t) - x_0 = \int_0^t f(x(\tau))d\tau \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_0| \leq \int_0^\delta |f(x(\tau))|d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^\delta c|x(\tau) - x_0|d\tau \leq c\delta \sup_{0\leq\tau\leq\delta} |x(\tau)| \quad \Rightarrow \quad \sup_{0\leq t\leq\delta} |x(t) - x_0| \leq c\delta \sup_{0\leq t\leq\delta} |x(t) - x_0| \quad \Rightarrow$$

$x(t) = x_0 \quad \forall t \in [0, \delta] \quad$ se $\quad c\delta < 1$.

4. Tempi di esistenza.

Se $f \in C(\mathbf{R})$, $f(a) = f(b) = 0$, $f > 0$ in (a, b), il problema di Cauchy $x' = f(x)$, $\quad x(0) = x_0 \in (a, b) \quad$ ha una e (localmente) una sola soluzione data da

$$x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in \left(-\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} \right) \qquad F(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a, b)$$

Se $\quad f \in Lip_{loc}$ e quindi $\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} = +\infty$, **la soluzione é definita per tutti i tempi** e tende, per $t \to \pm\infty$ a b, rispettivamente, ad a e si dice che la soluzione **esiste globalmente**.
Se poi $\quad b = +\infty \quad$ e $\quad \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty \quad$ *(il ché accade se f diverge piú che linearmente)* la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode in tempo finito** (nel futuro; ci sará esplosione in tempo finito nel passato se $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)} > -\infty$). Ad esempio per le seguenti equazioni differenziali (prive di equilibri)

$$(i)\, x' = e^x, \quad (ii)\, x' = e^{-x}, \quad (iii)\, x' = \sqrt{1 + x^2} \quad (iv)\, \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (v)\, \dot{x} = \cosh^2 x$$

e soggette alla condizione iniziale $x(0) = 0$ oppure $x(0) = x_0$, si ha

(i) $\quad F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = -\log(1 - t)$ é definita in $(-\infty, 1)$
(ii) $\quad F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \log(t + 1)$ é definita in $(-1, +\infty)$

(iii) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \sinh^{-1} x$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \sinh t$ é definita per tutti i tempi.

(iv) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. La soluzione $x(t) = F^{-1}(t)$ é definita per tutti i tempi perché $F((-\infty,+\infty)) = (-\infty,+\infty)$

(v) $F(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{ds}{\cosh^2 s} = \tanh x - \tanh x_0$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \tanh^{-1}(t + \tanh x_0)$ é definita in $(-1-\tanh x_0, 1-\tanh x_0)$. Questo mostra in particolare che *l'intervallo di esistenza dipende dal valore iniziale* x_0.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Se $a < b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0 \in (a,b)$ allora la soluzione di $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int\limits_{x_0}^a \frac{ds}{f(s)}$ e $\int\limits_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Se $f(x) > 0$ in $(b,+\infty)$ la soluzione é definita per tutti i tempi se e solo se $\int\limits_b^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty$. In caso contrario la soluzione é definita nell'intervallo (dipendente da x_0!) dato da $(-\infty, \int\limits_b^{+\infty} \frac{ds}{f(s)})$. Ad esempio, nel problema

$$x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \qquad x(0) = x_0$$

troviamo $F(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{2ds}{1-s^2} = \int\limits_{x_0}^x \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right] ds = \log\left[\frac{1+x}{1+x_0}\,\frac{1-x_0}{1-x}\right]$ e vediamo che

$$F(-\infty,-1) = F(1,+\infty) = (-\infty, \log\frac{x_0-1}{x_0+1}), \quad F(-1,1) = (-\infty,+\infty))$$

che sono i domini della soluzione $x(t) = F^{-1}(t)$ se, rispettivamente, $|x_0| > 1, |x_0| \le 1$. Ció lo si vede anche dalla forma esplicita della soluzione del problema di Cauchy

$$x(t) = \frac{e^t + \frac{x_0-1}{x_0+1}}{e^t - \frac{x_0-1}{x_0+1}}$$

4. Non unicitá per tempi grandi. Mostriamo con degli esempi che, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi').

(i) Consideriamo il problema $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = -1.$

Qui, con le notazioni usate al punto 1, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$,

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} + 3, \quad x \in (-\infty,0), F(-\infty) = -\infty, F(0) = 3$$

Il problema dato ha ha come *unica soluzione in* $(-\infty, 3)$ la funzione

$$x(t) := F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3, \qquad (-\infty, 3)$$

Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto **R** cosi:

$$\forall t_0 \geq 3 : \qquad x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Con verifica diretta: queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

(ii) Troviamo tutte le soluzioni di $\qquad \dot{x} = \sqrt{|1-x^2|}, \quad x(0) = 0.$

Sia, per $x \in (-1, 1)$, $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin x$. Dunque $x = \sin t$ é soluzione in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per $x > 1$ é $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{|1-s^2|}} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2} + \cosh^{-1} x$ e quindi $x(t) = F^{-1}(t) = \cosh(t - \frac{\pi}{2})$ per $t \geq \frac{\pi}{2}$.

Infine, per $\quad t \leq 0, \qquad (-x(-t))' = x'(-t) = \sqrt{|1 - [(-x)(-t)]^2|} \qquad$ e quindi $x(t) = \sin t$ in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $x(t) = -\cosh(t + \frac{\pi}{2})$ se $t \leq -\frac{\pi}{2}$.

Ma, come si verifica derivando, per ogni $t^+ \geq \frac{\pi}{2}$ la funzione

$$x(t) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]} \sin t + \chi_{[\frac{\pi}{2},t^+]} + \chi_{[t^+,+\infty)} \cosh(t - t^+)$$

é soluzione in $[0, +\infty)$ e $-x(-t)$ lo é in $(-\infty, 0]$.

(iii) Il problema $\quad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = x_0 > 0.$

Sia $x(t)$ soluzione; $\dot{x}(t) \geq 0$ e quindi $x(t)$ é non decrescente.
Da $\quad \left(2\sqrt{x(t)}\right)' = 1, \quad$ segue, integrando, $\sqrt{x(t)} = \sqrt{x_0} + \frac{t}{2}$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, e quindi $\quad x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, cioé tale funzione é *l'unica soluzione del problema di Cauchy dato nell'intervallo di tempo* $(-2\sqrt{x_0}, +\infty)$.

Una verifica mostra che $\quad x(t) = -\left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ é soluzione in $t \leq -2\sqrt{x_0}$. Dalla derivabilitá di

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{x_0}]}$$

segue che tale funzione é soluzione, definita su tutto **R**. **Ma non é l'unica!** Infatti

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{\xi_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{\xi_0}]}$$

é un'altra soluzione del medesimo problema di Cauchy quale che sia $\xi_0 \geq x_0$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE SUPERIORE A COEFFICENTI COSTANTI

Notazione: dati $a_j \in \mathbf{R}$, scriviamo $\quad p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad z \in \mathbf{C} \quad$ e

$$p(D) := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0 y,$$

(vedi l'ESEMPIO 2). $p(D)$ definisce un operatore (differenziale) lineare di $C^\infty(\mathbf{R})$ in sé:

$$p(D) : C^\infty(\mathbf{R}) \to C^\infty(\mathbf{R}), \qquad p(D)y := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y \quad \forall y \in C^\infty(\mathbf{R})$$

Una equazione differenziale lineare (EDL) di ordine n omogenea a coefficenti costanti a_j é come segue

$$(EDL) \qquad p(D)y := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0$$

Una soluzione di (EDL) é una funzione $y \in C^n(I)$, I intervallo in $\mathbf{R}$.

1.1 Regolaritá C^∞ delle soluzioni. Se $y \in C^n(I)$ é soluzione di (EDL), da

$$y^{(n)} = -[a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y] \qquad (EDL)$$

segue che $y^{(n)} \in C^1(I)$ ovvero $y \in C^{n+1}$. Quindi $y' \in C^n$ e, derivando (EDL), vediamo allora che anche y' é soluzione di (EDL) in I e quindi $y' \in C^{n+1}$, ovvero $y \in C^{n+2}$. Iterando, vediamo che f é infatti derivabile quanto si vuole.

1.2 Analiticitá delle soluzioni. Sia y soluzione in I di (EDL). Trattandosi di una equazione autonoma, possiamo supporre che I sia centrato nell'origine. Vogliamo mostrare che y é analitica in I. A tale scopo occorre e basta ottenere stime (opportune) sulle derivate di y. Conviene, a tale scopo, riscrivere (EDL) in forma vettoriale come *sistema del I ordine*. Posto

$$x_1(t) := y(t), \quad x_2(t) := y'(t), \ldots, x_n(t) := y^{(n-1)}(t) \qquad t \in I \qquad \text{per cui}$$

$$\dot{x}_1 = y' \quad \dot{x}_2 = y'' \quad \dot{x}_n = y^{(n)} = -[a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y] \qquad in \quad I$$

il vettore $\quad x := (x_1, \ldots, x_n) \in C^1(I, \mathbf{R}^n) \quad$ soddisfa il seguente sistema differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= y^{(n)} = -[a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_0 x_1] \end{aligned}$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \qquad \mathcal{A} = (a_{ij})_{|i,j=1,\ldots,n}$$

ove le prime $n-1$ righe di $\mathcal{A}$ sono i vettori $e_2,\ldots,e_n$ della base canonica di $\mathbf{R}^n$ mentre l'ultima riga é il vettore $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},0)$. Otteniamo subito, indicando con $\|.\|_2$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$, che

$$\|\dot{x}(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|\ \|x(t)\|_2 \qquad \forall t\in I$$

D'altra parte, derivando l'equazione $\quad \dot{x}=\mathcal{A}x \quad$ troviamo $D^2x=\mathcal{A}(Dx)$ e quindi

$$\|D^2x(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|\ \|Dx(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|^2\ \|x(t)\|_2 \quad \forall t\in I$$

e quindi, iterando,

$$\|D^kx(t)\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|^k\ \|x(t)\|_2 \quad \forall t\in I$$

e quindi, indicata con $\|.\|_{\infty,R}$ la norma del sup in $C([-R,R],\mathbf{R}^n)$, $\quad [-R,R]\subset I$, troviamo che

$$\sup_{t\in[-R,R]}|D^ky(t)| = \sup_{t\in[-R,R]}|D^kx_1(t)| \leq \|D^kx\|_{\infty,R} \leq \|\mathcal{A}\|^k\ \|x\|_{\infty,R}$$

Ció assicura che y é analitica in I.

2. Esistenza globale. Sia $y\in C^\infty(I)$ soluzione in I di (EDL). Per quanto sopra, se $[-R,R]\subset I$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\,t^k \qquad \forall t\in[-R,R]$$

Siccome tale serie ha raggio di convergenza infinito perché $\quad |y^{(k)}(0)|\leq c\|\mathcal{A}\|^k \quad \forall k$ concludiamo che y é ineffetti definita su tutto $\mathbf{R}$ come somma della propria serie di Mac Lauren (y é funzione 'intera'). Ovviamente, come si vede mettendo tale serie in (EDL), y é in particolare soluzione su tutto $\mathbf{R}$ di (EDL).

3. Unicitá per il problema di Cauchy (PC). Dati $y_0,\ldots,y_{n-1}$, il problema

$$\textbf{(PC)} \quad \exists y\in C^\infty \quad t.c. \quad p(D)y=0, \qquad y(0)=y_0,\ldots,y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}$$

ha al piú una soluzione. Per linearitá, ció equivale a dire che

$$p(D)y=0, \qquad y(0)=0,\ldots,y^{(n-1)}(0)=0 \quad \Rightarrow \quad y\equiv 0$$

E ció segue dal fatto che , $\qquad y(0)=0,\ldots,y^{(n-1)}(0)=0, \quad y \quad$ soluzione $\Rightarrow$

$$y^{(n)}(0)=-[a_{n-1}y^{(n-1)}(0)+\ldots+a_0y(0)=0] \quad \Rightarrow \quad y^{(k)}(0)=0 \quad \forall k$$

Essendo y analitica, ció implica che $\quad y\equiv 0$

4. L'Integrale Generale di (EDL) . L'IG di (EDL), ovvero l'insieme di tutte le soluzioni di (EDL) $\{y \in C^\infty(\mathbf{R}) : \quad p(D)y = 0\}$ é il sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbf{R})$ dato da

$$\mathcal{N} := Ker\, p(D) \qquad (il \quad nucleo \quad di \quad p(D))$$

In analogia con il caso del primo ordine, vediamo se ci sono soluzioni della forma $y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$. Ponendo $y(x) = e^{\lambda x}$ nell'equazione, vediamo che tale funzione é soluzione dell'equazione se e solo se λ é zero del polinomio (che determina l'equazione)

$$p(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

e che d'ora in poi chiameremo **polinomio caratteristico**. Infatti,

$$D^j e^{\lambda t} = \lambda^j e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad p(D)[e^{\lambda t}] = \sum_{j=0}^{n} a_j D^j [e^{\lambda t}] = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda^j = e^{\lambda t} p(\lambda)$$

Tuttavia, il polinomio caratteristico potrebbe anche non avere zeri reali.
Conviene allora considerare anche **soluzioni complesse** $y + iw, y, w \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ di (EDL), ove, naturalmente, $D^k(y + iw) := D^k y + iD^k w$. Notiamo che

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad \forall \lambda \in \mathbf{C} \qquad e \qquad p(D)(e^{\lambda x}) = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = 0$$

Notiamo anche che
$y \in \mathcal{N} \Leftrightarrow y = Rez, \quad z(x)$ **soluzione, eventualmente complessa, di (EDL).**
Infatti,

$$y, w \in \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad p(D)(y+iw) = p(D)y+ip(D)w = 0. \quad \text{Viceversa,} \quad p(D)(y+iw) = 0$$

$$\Rightarrow p(D)(y - iw) = 0 \Rightarrow \quad y = \frac{(y + iw) + (y - iw)}{2}, \; w = \frac{(y + iw) - (y - iw)}{2i} \in \mathcal{N}$$

perché $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ (giacché $p(z)$ ha coefficenti reali) e che combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni. Siccome poi, di nuovo,

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} \quad \Rightarrow \quad [p(\overline{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(\lambda) = 0]$$

ogni radice del polinomio caratteristico, dá, insieme alla sua complessa coniugata, una coppia di soluzioni reali. Ad esempio,

$$p(\alpha + i\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \in \mathcal{N}$$

Ora, il polinomio caratteristico avrá $k \leq n$ radici distinte, diciamo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, di molteplicitá, diciamo, n_j, con, quindi $n_1 + \ldots + n_k = n$. Possiamo allora fattorizzare $p(z)$ e, allo stesso modo, $p(D)$:

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{n_1} \times \cdots \times (z - \lambda_k)^{n_k} \qquad\qquad p(D) = (D - \lambda_1)^{n_1} \circ \cdots \circ (D - \lambda_k)^{n_k}$$

Proviamo ora che

λ é radice di $p(z)$ di molteplicitá $m \quad \Rightarrow \quad p(D)(x^j e^{\lambda x}) = 0 \quad \forall j = 0, \ldots, m-1$

Visto che la fattorizzazione di $p(D)$ contiene $(D-\lambda)^m$, basterá provare che

$$(D-\lambda)^m (x^j e^{\lambda x}) = 0 \qquad \forall j \le m-1$$

Infatti risulta $\quad (D-\lambda)^{j+1}(x^j e^{\lambda x}) = (D-\lambda)^j[(D-\lambda)(x^j e^{\lambda x})] =$ $(D-\lambda)^j[jx^{j-1}e^{\lambda x} + \lambda x^j e^{\lambda x} - \lambda x^j e^{\lambda x}] = (D-\lambda)^j[jx^{j-1}e^{\lambda x}] = \cdots = j!(D-\lambda)[e^{\lambda x}] = 0$ e quindi $\quad (D-\lambda)^m(x^{m-1}e^{\lambda x}) = 0$. Inoltre, se $j \le m-1$, segue ugualmente $(D-\lambda)^m(x^{j-1}e^{\lambda x}) = (D-\lambda)^{m-j} \circ (D-\lambda)^j(x^{j-1}e^{\lambda x}) = 0$.

Concludiamo osservando che se $p(z)$ ha

$$\begin{array}{c} p \text{ radici reali} \quad \lambda_j \text{ di molteplicitá } m_j, \quad j = 1, \ldots, m \\ 2q \text{ radici complesse} \quad \alpha_j \pm i\beta_j \text{ di molteplicitá } \tilde{m}_j, \quad j = 1, \ldots, q \end{array}$$

l'equazione (EDL) ha le n soluzioni

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots \ldots e^{\lambda_p x}, \ldots, x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}$$

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \quad e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, x^{\tilde{m}_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \quad x^{\tilde{m}_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x$$

$$e^{\alpha_q x}\cos\beta_q x, \quad e^{\alpha_q x}\sin\beta_q x, \ldots \ldots x^{\tilde{m}_q-1}e^{\alpha_q x}\cos\beta_q x, \quad x^{\tilde{m}_q-1}e^{\alpha_q x}\sin\beta_q x$$

5. Sistema fondamentale per (EDL): $\dim \mathcal{N} = n$ **.** Si puó verificare che le n soluzioni di (EDL) trovate al punto 4. hanno **Wronskiano** diverso da zero, ove, date $z_j \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, il loro Wronskiano é il determinante della matrice $n \times n$ formata dalle z_j e dalle loro prime $n-1$ derivate:

$$W(x) = W_{z_1,\ldots,z_n}(x) := \det\left(z_j^{(i-1)}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n} \qquad \textbf{(Wronskiano)}$$

Proviamo che
se $z_j, j = 1, \ldots, n$ **sono soluzioni (complesse) di (EDL) con** $W(x) \neq 0$ **allora ogni altra soluzione (complessa) di (EDL) é combinazione lineare delle** z_j.
Sia dunque $p(D)z = 0$. Da $W(0) \neq 0$, segue che esiste $C = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{C}^n$ (soluzione del sistema lineare $n \times n$)

$$\left(z_j^{(i-1)}(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n} C = z(0)$$

Ma allora $\quad \tilde{z} := \sum_{j=1}^{n} c_j z_j \quad$ é soluzione di (EDL) (perché combinazione lineare di soluzioni) tale che $\quad \tilde{z}(0) = z(0)$. Dall'unicitá della soluzione del problema di

Cauchy segue che $z = \tilde{z}$.
In particolare, $dim\mathcal{N} \leq n$. D'altra parte, le z_j sono linearmente indipendenti, perché $z(x) := \sum_{j=1}^{n} c_j z_j(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad D^k z(0) = 0 \quad \forall k = 0, \ldots, n-1$, ovvero $\left(z_j^{(i-1)}(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n} = 0$ e quindi, essendo $W(0)$ (il determinante della matrice dei coefficenti) non nullo, deve essere $C = (c_1, \ldots, c_n) = 0$. Concludiamo quindi che $dim\mathcal{N} = n$.

NOTA (su *lineare indipendenza e wronskiano*). Abbiamo visto che

$$\exists x_0 : \quad W_{z_1,\ldots,z_n}(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z_1, \ldots, z_n \quad \text{sono} \quad \text{linearmente} \quad \text{indipendenti}$$

Il viceversa é falso, in generale. Esempio:

$$z_1(x) = x^2, \quad z_2(x) = x^2 \quad se \quad x \geq 0, \quad z_2(x) = -x^2 \quad se \quad x \leq 0$$

Il viceversa diventa vero se le z_j sono soluzioni di (EDL): date $z_1, \ldots, z_n$, é vero che

$$p(D)z_j = 0 \quad \forall j, \quad z_j \quad \text{linearmente} \quad \text{indipendenti} \quad \Rightarrow \quad W_{z_1,\ldots,z_n}(x) \neq 0 \quad \forall x$$

Infatti, se esistesse x_0 tale che $W_{z_1,\ldots,z_n}(x_0) = 0$, esisterebbe $C = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ tale che

$$\left(z_j^{(i-1)}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n} C = 0$$

Posto $z := \sum_{j=1}^{n} c_j z_j$, questa sarebbe una soluzione di (EDL)nulla in x_0 assieme alle sue prime $n-1$ derivate. Per l'unicitá della soluzione del Problema di Cauchy, z sarebbe la funzione nulla, cioé le z_j sarebbero linearmente dipendenti.

ESEMPI COMPLEMENTI ED ESERCIZI

1. Sia $k \in C([a,b] \times [c,d])$. Per ogni $f \in c([a,b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(x,t) f(x) dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c,d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x \in [a,b])} |\int_a^b k(x,t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t) \in [a,b] \times [c,d])} |k(x,t)| \right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a,b], \mathbf{R})$ a $C([c,d], \mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.