Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 1 - 11 Ottobre 2013

1. Supponiamo $q = \infty$: se $x_n \notin l^p$ allora $||x||_\infty \leq ||x||_p = +\infty$; se invece $x \in l^p$ allora $\lim_{k\to\infty} x(k) = 0$ e dunque $||x||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = |x(\bar{k})|$ per $k \in \mathbb{N}$ opportuno e dunque

$$||x||_\infty = |x(\bar{k})| = (|x(\bar{k})|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = ||x||_p$$

Se invece $q < +\infty$ allora

$$||x||_q = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} ||x||_\infty^{q-p}|x(k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} = ||x||_\infty^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= ||x||_\infty^{\frac{q-p}{q}} ||x||_p^{\frac{p}{q}} \leq ||x||_p^{\frac{q-p}{q}} ||x||_p^{\frac{p}{q}} = ||x||_p.$$

Dunque se $||x||_p < \infty$ si ha che $||x||_q \leq ||x||_p < \infty \ \forall\ 1 \leq p \leq q \leq \infty$ cioé se $x \in l^p$ allora $x \in l^q$.

2. Abbiamo

$$||x_n||_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k = \frac{1}{n}\ \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}$$

$$||x_n||_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{2}{n}}\right)^k = \frac{1}{n^2}\ \frac{1}{1-e^{-\frac{2}{n}}} = \frac{1}{n}\ \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}$$

Poiché $\lim_{n\to\infty} ||x_n||_2 = 0$, x_n converge a 0 in l^2.

Invece x_n non converge in l^1: infatti,, se per assurdo $\exists\ x \in l^1$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ in l^1, allora $||x_n - x||_2 \leq ||x_n - x||_1 \longrightarrow 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ anche in l^2.

Ma allora, poiché il limite in l^2 é unico, si dovrebbe avere $x = 0$, che é assurdo perché $||x||_1 = ||x_n - x||_1 \longrightarrow 0$, mentre abbiamo visto che $||x||_1 = \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \longrightarrow 1$. Contraddizione!1!1!

Quindi, dalla definizione, le due norme non sono equivalenti.

3. (a) $x_n \in l^p \ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$ perché $||x_n||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k)| = 1$ e

$$||x_n||_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_n(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

   (b) x_n é una successione limitata in $l^p \ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$ perché, per quanto visto nel punto precedente, $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||_p = 1 < +\infty \ \forall\ 1 \leq p \leq \infty$.

(c) x_n non ha sottosuccessioni convergenti in l^p per alcun $1 \leq p \leq \infty$ perché non ha sottosuccessioni di Cauchy, in quanto $n \neq m$ implica

$$(x_n - x_m)(k) = \begin{cases} 1 & k = n \\ -1 & k = m \\ 0 & n \neq m \neq k \end{cases}$$

e dunque $||x_n - x_m||_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{p}} & p < \infty \\ 1 & p = \infty \end{cases}$, quindi $||x_n - x_m||_p \nrightarrow 0$ per $n, m \longrightarrow \infty$, $n \neq m$.

4. $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2\langle x, y \rangle = ||x||^2 + ||y||^2$, poiché $\langle x, y \rangle = 0$.

5. $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2} \right\rangle = \frac{\langle x+y, x+y \rangle}{4} + \frac{\langle x-y, x-y \rangle}{4} =$
$= \frac{\langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle + 2\langle x,y \rangle}{4} + \frac{\langle x,x \rangle + \langle y,y \rangle - 2\langle x,y \rangle}{4} =$
$= \frac{||x||^2}{4} + \frac{||y||^2}{4} + \frac{\langle x,y \rangle}{2} + \frac{||x||^2}{4} + \frac{||y||^2}{4} - \frac{\langle x,y \rangle}{2} = \frac{||x||^2 + ||y||^2}{2}$.

6. Applicando il criterio del confronto asintotico, si ha che $\{x_n(k)\}_{k \geq 1}$ ha lo stesso comportamento di $\{\frac{1}{k}\}_{k \geq 1}$ e quindi $x_n \notin l^1$.

7. Per calcolare i limiti in due variabili ci sono vari procedimenti che possono risultare piú o meno utili:

   - I limiti notevoli valgono ancora;
   - PASSAGGIO A COORDINATE POLARI:
     $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$
     Mediante questa sostituzione possiamo passare da
     $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ a $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))}{g(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))}$.
     A questo punto calcoliamo il limite ottenuto e ci troviamo dinanzi a 2 possibilitá: se il limite ci restituisce un valore in funzione di θ allora il limite non esiste, altresí il valore ottenuto é il valore effettivo del limite;
   - DIREZIONI DIFFERENTI: questo metodo ci consente di affermare che un limite non esiste, ma se applicato ad un limite esistente non ci dice assolutamente niente. Nella soluzione del primo limite vedremo bene come applicarlo.

   (a) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;
   Questo limite si svolge sfruttando la tecnica delle
   DIREZIONI DIFFERENTI.
   Difatti se $y = x$ otteniamo che $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$.
   Se invece $y = x^2$ abbiamo che $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2 + x^4} = 0$.
   Pertanto il limite non esiste perché abbiamo trovato 2 valori distinti mentre sappiamo che il limite, se esiste, é unico.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^6\cos^2(\theta)\sin^4(\theta)}{\rho^4(\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))} =$
$\displaystyle = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2(\theta)\sin^4(\theta)}{\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)} = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^5\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^2(\rho^4\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta))} =$
$\displaystyle = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^4\cos^4(\theta)+\sin^4(\theta)} = 0.$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2}.$

Se $y = x$ si ha che $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^8+2x^2} = 0.$

Se $y = x^4$ si ha che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{3x^8} = \frac{1}{3}.$

Quindi il limite non esiste.

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} = 3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3(x^2+y^2)}-1}{3(x^2+y^2)} = 3.$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(4xy^{\frac{3}{2}})}{x^2+y^2} \approx \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} 4\frac{\rho^{\frac{5}{2}}\cos(\theta)\sin^{\frac{3}{2}}(\theta)}{\rho^2} =$
$\displaystyle = \lim_{\rho\to 0} 4\rho^{\frac{1}{2}}\cos(\theta)\sin^{\frac{3}{2}}(\theta) = 0.$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^4(\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos^4(\theta) = 0.$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1.$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)}{\rho} =$
$\displaystyle = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos(\theta)\sin(\theta) = 0.$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x^4+y^7) = 1 + \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2} =$
$\displaystyle = 1 + \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta) = 1 + 0 = 1.$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^5\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)}{\rho^4(\rho^2\cos^6(\theta)+\sin^4(\theta))} =$
$\displaystyle = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)}{\rho^2\cos^6(\theta)+\sin^4(\theta)} = 0.$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos(\theta)\sin^2(\theta) = 0.$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}.$

Se $x = y$ si ha che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^2+y^4} = 0.$

Se $x = y^2$ si ha che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$

Quindi il limite non esiste.

(n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} \approx \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$ (*vedi il punto (l)*).

(o) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3\cos^3(\theta)-2\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)+\rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^2} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos^3(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) = \sin^2(\theta) - \sin(2\theta)$.
Quindi il limite non esiste.

(p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2) = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\log(\rho^2)\sin(\theta)\cos(\theta) =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\log(\rho)\sin(2\theta) = 0$.

8. La continuitá di funzioni in 2 variabili si studia come si studia quella in una sola variabile.
Quindi:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^2\cos^2(\theta)}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos^2(\theta) = 0$.
Quindi la funzione é continua.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{yx^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta) = 0 \neq 1 = f(0,0)$, quindi la funzione non é continua.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.
Se $y = x$ si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$.
Se $y = \sqrt{x}$ si ha che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^4+x^2} = 0$.
Quindi il limite non esiste e dunque la funzione non é continua.

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^4\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\theta)}{\rho^2} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\theta) = 0$.
Quindi la funzione é continua.

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$ (limite notevole).
Quindi la funzione é continua.

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}} \approx \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{\sqrt{x^8+y^6}} = \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^4\cos^3(\theta)\sin(\theta)}{\rho^3\sqrt{\rho^2\cos^8(\theta)+\sin^6(\theta)}} =$
$= \lim\limits_{\rho\to 0} \dfrac{\rho\cos^3(\theta)\sin(\theta)}{\sqrt{\rho^2\cos^8(\theta)+\sin^6(\theta)}} = 0$.
Quindi la funzione é continua.