Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 2 - 15 Ottobre 2013

NB. Nelle scorse soluzioni sono state sottovalutate dai sottoscritti le soluzioni di alcuni esercizi che ora verranno svolte con piú accortezza.
Nell'esercizio $7(c)$ il limite in coordinate polari riscontrava dei problemi nel caso in cui fosse stato $\theta = k\pi$.
Per ovveire a ció stimiamo la funzione con qualcosa di piú grande che al limite tenda a 0 cosicché ci si ritrovi ad ottenere che il limite non puó che essere nullo.
Nello specifico:

$$\left|\frac{x^3y^2}{x^6+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3(x^6+y^2)}{x^6+y^2}\right| = |x|^{\frac{1}{3}} \longrightarrow 0.$$

Nell'esercizio $7(k)$ si riscontrava lo stesso problema.
In tal caso:

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^6+y^4}\right| = |y|^{\frac{1}{3}}\left|\frac{x^2y^{\frac{8}{3}}}{x^6+y^4}\right| \leq |y|^{\frac{1}{3}} \longrightarrow 0$$

grazie alla stima $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ applicata con $p = 3$ e $q = \frac{3}{2}$ a $x^2y^{\frac{8}{3}}$ (tralasciando le costanti minore di 1 nella stima).
Infine nell'esercizio $8(f)$ abbiamo che:

$$\left|\frac{x^3y}{\sqrt{x^8+y^6}}\right| = \left|\sqrt{\frac{x^6y^2}{x^8+y^6}}\right| = \left|\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}x^{\frac{16}{3}}y^2}{x^8+y^6}}\right| = |x|^{\frac{1}{3}}\left|\sqrt{\frac{x^{\frac{16}{3}}y^2}{x^8+y^6}}\right| \leq |x^{\frac{1}{3}}| \longrightarrow 0$$

con $p = \frac{3}{2}$ e $q = 3$ nella stessa disuguaglianza di sopra (e sempre tralasciando le costanti minori di 1 nella stima).

1. - Le derivate parziali di $n(x,y)$ nell'origine sono:

   $$\frac{\partial n}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{n(h,0)-n(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial n}{\partial y}(0,0).$$

   Le derivate direzionali non esistono, infatti:

   $$\lim_{t\to 0^\pm}\frac{n(th,tk)-n(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm}\frac{t^2hk}{t\sqrt{t^4h^4+t^2k^2}} = \lim_{t\to 0^\pm}\frac{\pm hk}{\sqrt{t^2h^4+k^2}} = \pm h.$$

   Inoltre $n(x,y)$ non é differenziabile perché:

   $$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{n(h,k)-n(0,0)-\langle\nabla n(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{\sqrt{h^4+k^2}}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0$$

   (basta prendere la direzione k=h).

   - Di $a(x,y)$ non esistono derivate parziali:

   $$\frac{\partial a}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{a(h,0)-a(0,0)}{h} = \infty = \frac{\partial a}{\partial y}(0,0).$$

   Di conseguenza non esistono derivate direzionali, e la funzione non é differenziabile.

- Le derivate parziali di $r(x,y)$ sono nulle.
  Le derivate direzionali non esistono perché:

$$\lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{r(th,tk)-r(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt{t^2|hk|}}{t} = \pm\sqrt{|hk|}.$$

  La funzione non é inoltre differenziabile perché:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)-r(0,0)-\langle \nabla r(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

  che nella direzione $k=h$ fa $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Le derivate parziali di $d(x,y)$ sono nulle perché:

$$\frac{\partial d}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{d(h,0)-d(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3} = 0$$

  poiché $\frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3} \approx \frac{\frac{h^4}{2}+o(h^5)}{h^3}$ (e $\frac{\partial d}{\partial y}$ é analoga).
  Le derivate direzionali sono nulle per lo stesso motivo.
  Analogamente la funzione risulta essere differenziabile.

- Le derivate parziali di $i(x,y)$ sono rispettivamente

$$\frac{\partial i}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{i(h,0)-i(0,0)}{h} = 0$$

  e

$$\frac{\partial i}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{i(0,k)-i(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0.$$

  Analogamente alla derivata parziale rispetto ad y si ha che le derivate direzionali sono nulle. La funzione risulta essere differenziabile perché:

$$\left|\frac{i(h,k)-i(0,0)-\langle \nabla i(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{\rho^{\frac{4}{3}} \sin^{\frac{4}{3}}(\theta) \sin\left(\frac{1}{\rho^4\cos^4(\theta)+\rho^2\sin^2(\theta)}\right)}{\rho}\right| \leq \rho^{\frac{1}{3}} \longrightarrow 0,$$

  passando a coordinate polari.

- Le derivate parziali di $g(x,y,z)$ sono nulle.
  Analogamente sono nulle le derivate direzionali.
  La funzione non é differenziabile perché:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)-g(0,0)-\langle \nabla g(0,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2w^2}{\sqrt{h^2+k^2}(h^4+w^4+k^4)}$$

  che lungo la direzione (h,h,h) non tende a 0.

- La funzione $@(x,y)$ si studia come la funzione $d(x,y)$, basandosi (come quella) su un limite notevole.
  NB. I risultati a cui si giunge sono, peraltro, gli stessi.

- La funzione $y(x,z)$ ha derivate parziali nulle nell'origine essendo $y(h,0)-y(0,0)=y(0,k)-y(0,0)=0$.
  Le derivate direzionali sono nulle nell'origine in quanto il limite é analogo a quello della funzione $i(x,y)$.
  La differenziabilitá segue sempre da una stima simile a quella della funzione $i(x,y)$.

2. Abbiamo che
$$f(g(t)) = e^{2t}\log(1+e^{2t}t^2)$$
quindi
$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = 2e^{2t}\log(1+e^{2t}t^2) + \frac{e^{2t}(2e^{2t}t^2+2te^{2t})}{1+e^{2t}t^2}.$$
Vediamo l'altro lato dell'uguaglianza:
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(2x\log(1+x^2y^2) + \frac{2x^3y^2}{1+x^2y^2}, \frac{2x^4y}{1+x^2y^2}\right)$$
quindi
$$\nabla f(g(t)) = \left(2e^t\log(1+e^{2t}t^2) + \frac{2e^{3t}t^2}{1+e^{2t}t^2}, \frac{2e^{4t}t}{1+e^{2t}t^2}\right).$$
Essendo $g'(t)=(e^t,1)$ e poiché $\langle (a,b)\ ,\ (c,d)\rangle = ac+bd$ abbiamo che:
$$\langle \nabla f(g(t)), g'(t)\rangle = \left(2e^t\log(1+e^{2t}t^2) + \frac{2e^{3t}t^2}{1+e^{2t}t^2}\right)e^t + \frac{2e^{4t}t}{1+e^{2t}t^2}$$
che é proprio uguale a $\frac{d}{dt}(f(g(t)))$ raccogliendo nella giusta maniera.

3. Questo esercizio é l'estensione del precedente e ci sta chiedendo di vedere che
$$J_{g\circ f} = J_{g(f)}J_f$$
ove J é la matrice Jacobiana.
Come per l'esercizio precedente vediamo le due parti dell'uguaglianza separatamente.
Abbiamo che
$$(g\circ f)(x,y) = g\left(x^2+y, \frac{y}{x^2+1}, x+y\ \right) = \left(\frac{x^2y+y^2}{x^2+1}, (x+y)e^{x^2+y}\right) := (h_1(x,y), h_2(x,y)) = h(x,y),$$
quindi
$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy(x^2+1)-2x(x^2y+y^2)}{(x^2+1)^2} & \frac{x^2+2y}{x^2+1} \\ e^{x^2+y}(1+2x^2+2xy) & e^{x^2+y}(1+x+y) \end{pmatrix}.$$
Andiamo ora a calcolare J_g:
$$J_g = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ ze^x & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_{g(f)} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+1} & x^2+y & 0 \\ (x+y)e^{x^2+y} & 0 & e^{x^2+y} \end{pmatrix}.$$

Infine

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ \frac{-2xy}{(x^2+1)^2} & \frac{1}{x^2+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui abbiamo che

$$J_{g(f)}J_f = \begin{pmatrix} \frac{2xy}{x^2+1} - \frac{2xy(x^2+y)}{(x^2+1)^2} & \frac{x^2+2y}{x^2+1} \\ (2x^2+2xy+1)e^{x^2+y} & (x+y+1)e^{x^2+y} \end{pmatrix}$$

che é effettivamente quello che volevamo.

4. Le derivate parziali di $f(x,y)$ nell'origine sono ovviamente nulle.
   Andiamo a vedere i valori di α per cui esistono le derivate direzionali:

$$\lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{t^2h^2k}{(t^6h^6+t^2k^2)^{\alpha}} = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{t^{2-2\alpha}h^2k}{(t^4h^6+k^2)^{\alpha}} = \begin{cases} 0 & \alpha<1 \\ \frac{h^2}{k} & \alpha=1 \\ \pm\infty & \alpha>1 \end{cases}$$

   Quindi la funzione ammette derivate direzionali per $\alpha \leq 1$.

   Studiamo, infine, la differenziabilitá:
   Per cominciare notiamo che lungo la direzione $k=h^3$ si ha che

$$\left|\frac{h^2k}{(h^6+k^2)^{\alpha}\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{h^5}{(2h^6)^{\alpha}|h|\sqrt{h^4+1}}\right| = \left|\frac{h^{4-6\alpha}sign(h)}{2^{\alpha}\sqrt{h^4+1}}\right|$$

   che va a 0 per $\alpha < \frac{2}{3}$.
   Studiamo quindi $\alpha \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$:

$$\left|\frac{h^2k}{(h^6+k^2)^{\alpha}\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{|h|(h^6)^{\frac{1}{6}}(k^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^6+k^2)^{\alpha}\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \frac{(h^6+k^2)^{\frac{1}{6}}(h^6+k^2)^{\frac{1}{2}}}{(h^6+k^2)^{\alpha}} = (h^6+k^2)^{\frac{2}{3}-\alpha} \longrightarrow 0$$

   per $\alpha < \frac{2}{3}$, quindi per ogni α nell'intervallo considerato.
   (La disuguaglianza usata é $|h| \leq \sqrt{h^2+k^2}$)

5. Vediamo i seguenti esempi di $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfano le caratteristiche richieste:

   (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{|xy|}$ é chiaramente continua, ammette derivate parziali nulle perché é nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali (ad eccezione delle direzioni degli assi) perché

$$\lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{t^2hk}}{t} = \lim_{t\to 0^{\pm}} \sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = \pm\infty$$

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ é chiaramente continua nell' origine, ma non ammette derivate parziali perché

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \pm\infty$$

(analogamente non ha l'altra derivata parziale); inoltre non possiede alcuna derivata direzionale perché

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{h^2+k^2}}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{h^2+k^2}{t}} = \pm\infty$$

(c) Si considerino la parabola privata dell'origine

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ t.c.\ y = x^2\right\} \setminus \{(0,0)\}$$

e la funzione $f(x,y) = \chi_A((x,y))$; f non é continua nell'origine perché $f(x,x^2) \equiv 1 \ \forall x \neq 0$,mentre $f(0,0) = 0$. Ammette derivate parziali entrambe nulle perché é identicamente nulla lungo gli assi, e ha anche le derivate direzionali perché

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

dato che per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha che $f(tx,ty) = 0$ (i.e., se $|t|$ é abbastanza piccolo, $(tx,ty) \neq (tx,t^2x^2)$, poiché altrimenti si avrebbe $y = |t|x^2$ per tutti i t sufficientemente piccoli in modulo, e questo é chiaramente assurdo).

(d) Se A é come nel punto (c), sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{xy}, & se\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \\ 1 & se\ (x,y) \in A \end{cases}$$

é discontinua nell'origine perché $f(x,x^2) \equiv 1 \ \forall x \neq 0$ e $f(0,0) = 0$, ha derivate parziali nulle perché é identicamente nulla lungo gli assi, ma non ha le derivate direzionali perché

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{\sqrt[3]{t^2xy}t}{=} \lim_{t\to 0^\pm} \sqrt[3]{\frac{hk}{t}} = \pm\infty$$

dato che per $|t|$ sufficientemente piccolo si ha $f(tx,ty) = \sqrt[3]{t^2xy}$

yo !