Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Soluzioni 4 - 12 Novembre 2013

1. Applichiamo la procedura standard, analizzata nelle Soluzioni 3:

   (a) $f(x,y) = (y - x^2)(x^2 - y^2)^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2 - y^2)(-6x^3 + 2xy^2 + 4xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2 + 4x^2y)$$

quindi abbiamo che

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} (x^2 - y^2)(-6x^3 + 2xy^2 + 4xy) = 0 \\ (x^2 - y^2)(x^2 - 5y^2 + 4x^2y) = 0 \end{cases}$$

Innanzitutto $x^2 = y^2$ é soluzione del sistema, quindi abbiamo punti del tipo $P_x = (x, \pm x)$.
Se $x^2 \neq y^2$ abbiamo che

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} -6x^3 + 2xy^2 + 4xy = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4x^2y = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$ il sistema é risolto per $y = 0$. Essendo $(0,0) \in \{P_x\}$, torniamo al caso precedente.
Imponiamo dunque $x \neq 0$.
Dalla prima riga si ha che $x^2 = \frac{y^2+2y}{3}$ e sostituendo nella seconda otteniamo $\left(\frac{y^2+2y}{3}\right)(1+4y) - 5y^2 = 0$ che ci dice che $2y^2 - 3y + 1 = 0$, le cui soluzioni sono $y = 1$ e $y = \frac{1}{2}$.
Se $y = 1$ si che $x^2 = 1$ e quindi $x = \pm 1$. Tale caso, tuttavia, rientra sempre nella famiglia di punti $(x, \pm x)$.
Se $y = \frac{1}{2}$ si ottiene che $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.
Pertanto i punti stazionari sono: $P_x = (x, \pm x)$ e $Q_\pm = \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{2}\right)$.
Passiamo ora al calcolo dell'Hessiana di $f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2x(-6x^3 + 2xy^2 + 4xy) + (x^2 - y^2)(-18x^2 + 2y^2 + 4y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y(-6x^3 + 2xy^2 + 4xy) + (x^2 - y^2)(4xy + 4x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2y(x^2 - 5y^2 + 4x^2y) + (x^2 - y^2)(4x^2 - 10y)$$

Dunque:

i.

$$H_f(x,x) = \begin{pmatrix} 2x(4x^2-4x^3) & -2x(4x^2-4x^3) \\ -2x(4x^2-4x^3) & -2x(-4x^2+4x^3) \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo. Osserviamo che $f(x,x) = 0$.
Essendo $f(x,y) > 0$ per $y > x^2$ abbiamo che:

- i punti (x,x) con $x < 0$ e $x > 1$ sono punti di massimo;
- i punti $(0,0)$ e $(1,1)$ sono punti di sella;
- i punti (x,x) con $x \in (0,1)$ sono punti di minimo.

ii.

$$H_f(x,-x) = \begin{pmatrix} -2x(4x^2+4x^3) & -2x(4x^2+4x^3) \\ -2x(4x^2+4x^3) & -2x(4x^2+4x^3) \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo. Per quanto visto nel punto precedente abbiamo che:

- i punti $(x,-x)$ con $x > 0$ e $x < -1$ sono punti di massimo;
- i punti $(0,0)$ e $(-1,1)$ sono punti di sella;
- i punti $(x,-x)$ con $x \in (-1,0)$ sono punti di minimo.

iii.

$$H_f(Q_\pm) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

ha determinante pari a $\frac{5}{108} > 0$, per cui, essendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ se calcolato in $Q_\pm$, abbiamo che $Q_\pm$ sono punti di massimo.

(b) $g(x,y) = x^2y^2 + x^3 - x$.
Abbiamo che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 3x^2 - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x^2y$$

quindi

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2y = 0 \\ 2xy^2 + 3x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima riga abbiamo che puó essere $x = 0$ oppure $y = 0$.
Per $x = 0$ il sistema non é risolubile, dunque dovrá essere $y = 0$, da cui segue che $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Pertanto $P_\pm = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.
Essendo:

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 + 6x & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

si ha che $\det\left[H_g\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right] = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$ per cui P_- é un punto di sella e P_+ é un punto di minimo essendo $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} > 0$ se calcolato in esso.

(c) $h(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2 - x^4 - y^4$.

$$\nabla h(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} x^3 = x \\ y^3 = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \pm 1 \\ y = 0, \pm 1 \end{cases}.$$

Abbiamo quindi 9 punti stazionari: $O = (0,0)$,$P_{\pm 1} = (\pm 1, 1)$, $P_{\pm 2} = (\pm 1, -1)$, $Q_{\pm 1} = (\pm 1, 0)$ e $Q_{\pm 2} = (0, \pm 1)$.
Essendo

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\det[H_h(x,y)] = (4 - 12x^2)(4 - 12y^2)$, pertanto

- $\det[H_h(O)] = 16 > 0 \Longrightarrow$ O é un minimo, perché $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 4 > 0$ nel punto;
- $\det[H_h(P_{\pm 1})] = \det[H_h(P_{\pm 2})] = 64 \Longrightarrow P_{\pm 1}$ e $P_{\pm 2}$ sono punti di massimo poiché $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -8 < 0$;
- $\det[H_h(Q_{\pm 1})] = \det[H_h(Q_{\pm 2})] = -32 \Longrightarrow Q_{\pm 1}$ e $Q_{\pm 2}$ sono punti di sella.

(d) $w(x,y) = e^{3x^2 + xy - 2y^2}$.

$$\nabla w(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} w(x,y)(6x + y) = 0 \\ w(x,y)(x - 4y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x + y = 0 \\ x = 4y \end{cases}$$

la cui unica soluzione é il punto $(0,0)$.
Calcoliamo le derivate seconde di $w(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x} * (6x + y) + 6w(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} * (6x + y) + w(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} * (x - 4y) - 4w(x,y)$$

Essendo $w(0,0) = 1$ e $\frac{\partial w}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial w}{\partial y}(0,0) = 0$, si ha che

$$H_w(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

il cui determinante é negativo. Quindi $(0,0)$ é un punto di sella.

2. Lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di una funzione $f(x,y)$ nel punto (x_o, y_0) é data da:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x - x_0)^2 + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y - y_0)^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x - x_0)(y - y_0)\right) +$$
$$+ o(||(x_0,y_0)||^2).$$

Usiamo tale formula per la risoluzione dell'esercizio con la notazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y).$$

(a) $G(x,y) = e^{x^2-y}$.
Calcoliamo le derivate:

$$G_x(x,y) = 2xG(x,y)$$
$$G_y(x,y) = -G(x,y)$$
$$G_{xx}(x,y) = (4x^2+2)G(x,y)$$
$$G_{xy}(x,y) = -2xG(x,y)$$
$$G_{yy}(x,y) = G(x,y)$$

Essendo $G(0,0) = 1$, abbiamo che

$$G(x,y) = 1 - y + x^2 + \frac{y^2}{2} + o(||(x,y)||^2).$$

(b) $a(x,y) = \arctan(x+y)$.
Calcoliamo le derivate:

$$a_x(x,y) = \frac{1}{1+x^2+2xy+y^2}$$
$$a_y(x,y) = a_x(x,y)$$
$$a_{xx}(x,y) = \frac{-2(x+y)}{(1+x^2+2xy+y^2)^2}$$
$$a_{xy}(x,y) = a_{xx}(x,y)$$
$$a_{yy}(x,y) = a_{xx}(x,y)$$

Avendo che $a(0,0) = a_{xx}(0,0) = 0$ e $a_x(0,0) = 1$ si ottiene

$$a(x,y) = x + y + o(||(x,y)||^2).$$

(c) $u(x,y) = e^{-\tan(x+y)}$.
Calcoliamo le derivate:

$$u_x(x,y) = -u(x,y)(1+\tan^2(x+y))$$
$$u_y(x,y) = u_x(x,y)$$
$$u_{xx}(x,y) = -u_x(x,y)(1+\tan^2(x+y)) - u(x,y)(2\tan(x+y)(1+\tan^2(x+y)))$$
$$u_{xy}(x,y) = -u_y(x,y)(1+\tan^2(x+y)) - u(x,y)(2\tan(x+y)(1+\tan^2(x+y)))$$
$$u_{yy}(x,y) = u_{xy}(x,y)$$

Avendo che $u(0,0) = u_{xy}(0,0) = u_{xx}(0,0) = 1$ e $u_x(0,0) = -1$ si ottiene

$$u(x,y) = 1 - (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2 + o(||(x,y)||^2).$$

(d) $s(x,y) = \log(3x^2 + y)$.
Calcoliamo le derivate:

$$s_x(x,y) = \frac{6x}{3x^2 + y}$$

$$s_y(x,y) = \frac{1}{3x^2 + y}$$

$$s_{xx}(x,y) = \frac{6y - 18x^2}{(3x^2 + y)^2}$$

$$s_{xy}(x,y) = \frac{-6x}{(3x^2 + y)^2}$$

$$s_{yy}(x,y) = \frac{-1}{(3x^2 + y)^2}$$

Avendo che $s(0,1) = s_x(0,1) = s_{xy}(0,1) = 0$, $s_y(0,1) = 1$, $s_{yy}(0,1) = -1$, $s_{xx}(0,1) = 6$ si ottiene

$$s(x,y) = y - 1 + 3x^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + o(||(x, y-1)||^2).$$

(e) $\tilde{s}(x,y) = \cosh(x + y^2)$.
Calcoliamo le derivate:

$$\tilde{s}_x(x,y) = \sinh(x + y^2)$$

$$\tilde{s}_y(x,y) = 2y\sinh(x + y^2)$$

$$\tilde{s}_{xx}(x,y) = \cosh(x + y^2)$$

$$\tilde{s}_{xy}(x,y) = 2y\cosh(x + y^2)$$

$$\tilde{s}_{yy}(x,y) = 2\sinh(x + y^2) + 4y^2\cosh(x + y^2)$$

Avendo che le derivate sono tutte nulle in $(0,0)$ eccetto $\tilde{s}_{xx}$ che calcolata nell'origine vale 1, cosí come la funzione stessa, si ha che

$$\tilde{s}(x,y) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(||(x,y)||^2).$$

3. (a) Notiamo innanzitutto che $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{e^{x(1-t)} - 1}{x}dx$, dunque l'integranda non ha un asintoto nell'origine per nessun valore di t, in quanto $\lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{e^{x(1-t)} - 1}{x} = 1 - t$.
Quindi la convergenza dell'integrale dipenderá solamente dal comportamento all'infinito dell'integranda.

   i. Sicuramente per $t < 0$ la funzione non é definita perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} = +\infty$;

   ii. se $t > 0$ l'integrale converge perché:

   - se $t \in (0,1)$ abbiamo che
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x}}{e^{-tx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-x(1-t)}}{x} = 0 \Longrightarrow f(t) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}dx < +\infty$;

- se $t = 1$ abbiamo che $f(1) = 0$;
- se $t > 1$ abbiamo che $\lim\limits_{x+\to\infty} \dfrac{\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}}{\frac{e^{-x}}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(1-t)} - 1 = -1$

  quindi $f(t) \approx \int_0^1 \frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

  Essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^{-x}}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ abbiamo che

  $f(t) \leq \int_0^1 \frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$.

iii. infine se $t = 0$ l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ si comporta come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e dunque diverge.

Quindi l'insieme di definizione di $f(t)$ é $(0, +\infty)$.

(b) Innanzitutto, $f(t)$ é continua perché se $t \in [\tau, +\infty)$, allora $|f(t)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-\tau x} - e^{-x}}{x} \right| dx < +\infty$ e dunque c'é equidominatezza e si puó applicare il teorema di continuitá sotto integrale.

Inoltre,

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} = -e^{-tx}$$

e quindi per $t \in [\tau, +\infty)$ abbiamo che $\left| \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx} dx \right| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} |e^{-tx}| dx < +\infty$, quindi la funzione é $\mathcal{C}^1$ e $f'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-tx} dx = \left[\frac{e^{-tx}}{t} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{t}$.

(c) $f(t) - f(1) = \displaystyle\int_1^t f'(s) ds = \int_1^t -\frac{ds}{s} = -\log(t)$.

Ma essendo $f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 = 0$, ho che $f(t) = -\log(t)$.

4. (a) g é definita $\forall x \in \mathbb{R}$ perché l'integranda non ha asintoti e all'infinito $\log(x^2t^2+1)$ ha lo stesso andamento di $\log(x^2t^2) = 2\log(xt)$, dunque l'integranda ha lo stesso andamento di $\frac{2\log(xt)}{t^2+1}$ che é integrabile all'infinito.

   (b) Stabiliamo ora per quali $x \in \mathbb{R}$ é continua.
   Osserviamo che l'integranda é continua e per $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ si ha che

$$\left| \frac{\log(x^2t^2+1)}{t^2+1} \right| \leq \left| \frac{\log((|x_0| + \epsilon)^2 t^2 + 1)}{t^2+1} \right|$$

   che é integrabile.
   Allora possiamo dire che g é continua su tutto $\mathbb{R}$.

5. (a) $h(x) = \int_0^1 \frac{1-e^{-t^2x}}{t} dt$ é definita $\forall x \in \mathbb{R}$ perché é l'integrale di una funzione continua e limitata su intervallo limitato, dal momento che

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-e^{-t^2x}}{t} = \lim_{t\to 0} xt \frac{1-e^{-t^2x}}{xt^2} = \lim_{t\to 0} xt = 0$$

(b) Fissati $x_0 \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, si ha

$$\frac{1-e^{-t^2x}}{t} \le \frac{1-e^{-t^2(x_0+\epsilon)}}{t} \forall x \in [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]$$

e quindi si ha una dominante integrabile in tutto un intorno di x_0, i.e. la continuitá di h

6. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} \forall x \in \mathbb{R}$$

e la convergenza é uniforme in $[-1, 1]$ perché

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{e^{-\frac{x^2}{n}} - 1}{1+x^2} \right| \le \sup_{x\in[-1,1]} \left| e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 \right| = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

e dunque, essendo l'intervallo di integrazione limitato, é possibile scambiare limite ed integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} dx = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, e inoltre

$$\left| \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \right| \le e^{-nx^2} \le e^{-x^2}$$

che é integrabile e dunque c' é equidominatezza; inoltre, la convergenza é uniforme in $[-b, -a] \cup [a, b] \forall b > a > 0$, perché

$$\sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left| \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2} \right| \le \sup_{x\in[-b,-a]\cup[a,b]} \left| e^{-nx^2} \right| = e^{-na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dunque é possibile scambiare lmiite ed integrale su $[0, +\infty)$ e su $(-\infty, 0]$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx + \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx + \int_{-\infty}^{0}\lim_{n\to\infty}\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty}0dx + \int_{-\infty}^{0}0dx = 0$$