Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 1 - 11 Ottobre 2013

1. Sia X lo spazio delle successioni reali.
   Provare che $\forall x \in X$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, si ha che $||x||_q \leq ||x||_p$.
   Dedurne che $l^p \subseteq l^q \quad \forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty$.

2. Sia $x_n(k) = \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$, $k \in \mathbb{N}$.
   Calcolare $||x||_1, ||x||_2$. Studiare la convergenza di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in l^1, l^2 e dedurne che le norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ non sono equivalenti.

3. Sia $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni definita come:

$$x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$$

   (a) Provare che $x_n \in l^p\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Provare che $\{x_n\}$ é una successione limitata in $l^p\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty$, cioé

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x||_p < \infty \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty$$

   (c) Provare che $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti in l^p per alcun $1 \leq p \leq \infty$.

4. Provare che $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle x, y\rangle = 0$.

5. Provare che $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{||x||^2 + ||y||^2}{2} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

6. Provare che $x_n(k) = \frac{1}{k}\sqrt{2 - \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)} \notin l^1$.

7. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2}$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x^2+3y^2}-1}{x^2+y^2}$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(4xy^{\frac{3}{2}})}{x^2+y^2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + (x^2+y^2)\cos(x^4+y^7)}{x^2+y^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

(p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2)$

8. Discutere la continuitá delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbb{R}^2$)

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$