R - Esercitazione 4

Lorenzo Di Biagio
dibiagio@mat.uniroma3.it

Università Roma Tre

Lunedì 18 Novembre 2013

Proprietà degli stimatori puntuali

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto da un densità $f(x, \theta)$ nota a meno di θ.

Ricordiamo: uno stimatore T di θ è una statistica $t(X_1, \ldots, X_n)$ il cui valore (su una realizzazione campionaria) è usato per stimare θ.

Ricordiamo: uno stimatore T di θ si dice *non distorto* se $E(T) = \theta$.
La distorsione di T è $\mathrm{Bias}_t(\theta) = \theta - E(T)$.

Ricordiamo: l'errore quadratico medio MSE_t dello stimatore T è definito come

$$\mathrm{MSE}_t(\theta) = E((T - \theta)^2).$$

Se lo stimatore è non distorto MSE coincide con $Var(T)$; altrimenti $\mathrm{MSE}_t(\theta) = Var(T) + \mathrm{Bias}_t(\theta)^2$.

Proprietà asintotiche degli stimatori puntuali

Sia $X_1, \dots X_n, \dots$ un campione casuale estratto da un densità $f(x, \theta)$. Sia $T_1, \dots, T_n, \dots$ una successione di stimatori di θ, con $T_i = t_i(X_1, \dots, X_n)$.

Ricordiamo: si dice che la successione è *asintoticamente non distorta* se per ogni $\theta \in \Theta$ $lim_{n \to +\infty} \mathrm{Bias}_{t_n}(\theta) = 0$.

Ricordiamo: si dice che la successione gode della *consistenza in media quadratica* se per ogni $\theta \in \Theta$ $\lim_{n \to} E((T_n - \theta)^2) = 0$.

Proprietà degli stimatori puntuali - simulazioni (1)

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale estratto da una densità normale di varianza 1 e media μ.

Si considerino i seguenti stimatori della media μ:

1. $T_{1,n} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
2. $T_{2,n} := \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$
3. $T_{3,n} := \frac{1}{n} \sum \left(X_i - \frac{1}{2}\right)$
4. $T_{4,n} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i}$
5. $T_{5,n} := 0$

Proprietà degli stimatori puntuali - simulazioni (2)

Esercizio 1

1. Confrontare empiricamente la distorsione degli stimatori $T_{1,2}, T_{2,2}, \ldots, T_{5,2}$ al variare di $\mu \in [-1, 1]$, disegnando su un unico grafico le cinque funzioni (i=1,...,5) $\mathrm{Bias}_{t_{i,2}}$ al variare di $\mu \in [-1, 1]$.
2. Confrontare empiricamente l'errore quadratico medio degli stimatori $T_{1,2}, T_{2,2}, \ldots, T_{5,2}$ al variare di $\mu \in [-2, 2]$.
3. Verificare empiricamente che $T_{4,n}$ è asintoticamente non distorto.
4. Verificare empiricamente che $T_{1,n}$ è consistente in media quadratica.
5. Dire (empiricamente) se $T_{4,n}$ è consistente in media quadratica.

Proprietà degli stimatori puntuali - simulazioni (3)

Alcune considerazioni:

Che vuol dire "empiricamente"? Vuol dire che per calcolare la media di uno stimatore $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ basato su un campione di ampiezza n si estraggono $m \gg 1$ campioni di ampiezza n, si calcolano gli m valori di T e se ne fa la media.

Per svolgere l'esercizio è opportuno definire prima le funzioni $t_{i,\cdot}$ (di modo che possano essere utilizzate per ogni n), poi la funzione che simula un valore dello stimatore al variare di n e μ, poi la funzione che simula m valori dello stimatore e infine le funzioni "distorsione" e "MSE" che calcolano la distorsione e l'errore quadratico medio dello stimatore, al variare di n m e mu.

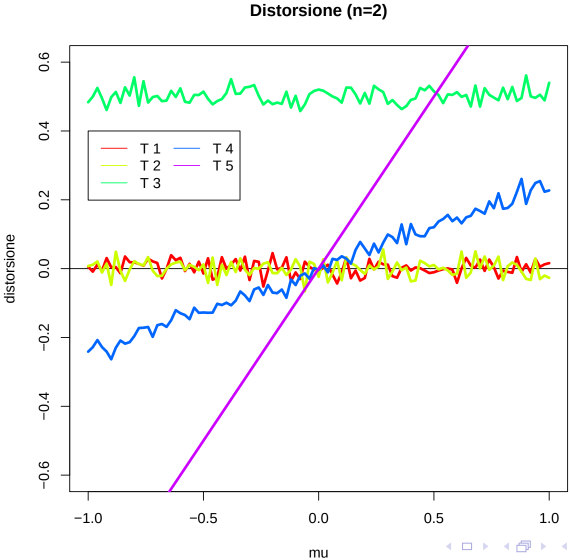
Proprietà degli stimatori puntuali - simulazioni (4)

Per svolgere l'esercizio può essere utile la funzione `Vectorize(f,"param")` che "vettorizza" la funzione `f` nel parametro `param`, ovvero permette di passare a `f` non un singolo parametro ma un vettore di parametri $(a, b, c, \ldots)$, ottenendo un vettore di valori di f: $(f(a), f(b), f(c), \ldots)$.

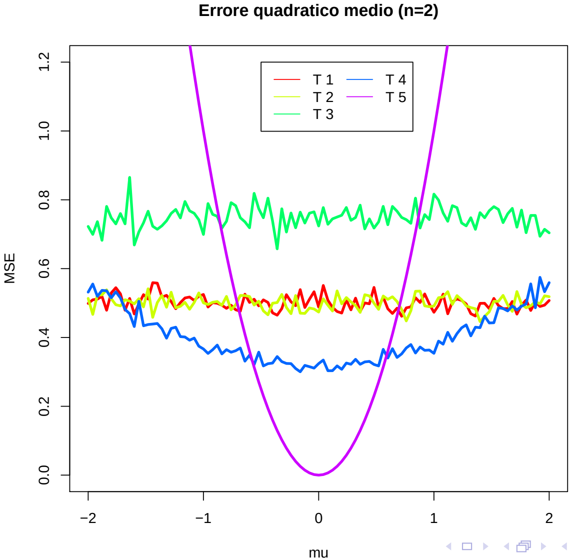
Esempio:

`rnorm(1,mean=0)` estrae un valore dalla normale standard. Se definiamo `rnorm.vec<-Vectorize(rnorm,"mean")` allora `rnorm.vec(1,mean=c(0,1,2))` restituisce un vettore con 3 elementi, il primo estratto da una normale di media 0 (e varianza 1), il secondo di media 1 (e varianza 1) e il terzo di media 2 (e varianza 1).

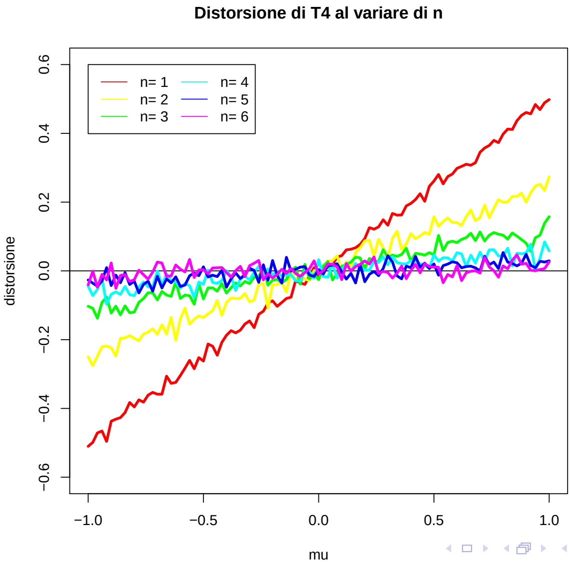
Esercizio 1 - punto 1



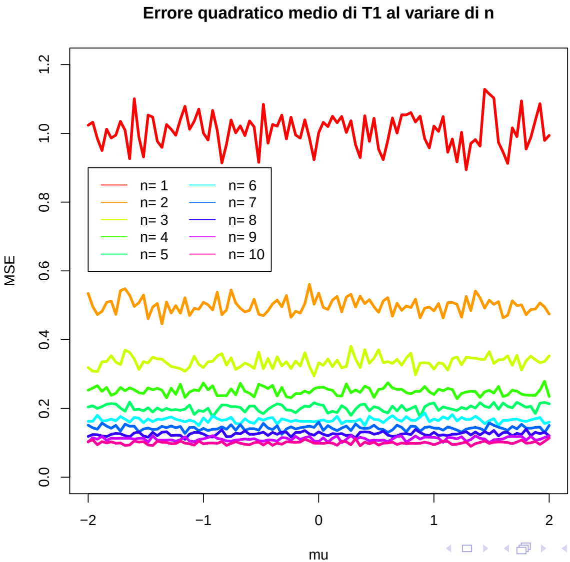
Esercizio 1 - punto 2



Esercizio 1 - punto 3



Esercizio 1 - punto 4



Esercizio 1 - punto 5