Questi esercizi sono tratti dalla raccolta curata dalla Dott.ssa Barbara De Cicco, che ha svolto il tutorato negli anni AA 2009-2010 e 2010-2011. Vi pregherei di segnalarmi errori o altri commenti. Enza Orlandi

Esercizio 1.

Se X, Y hanno distribuzione congiunta data da:

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)$$

1. Trovare $Cov(X, Y)$

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_0^1\int_0^y 2xydxdy = \int_0^1 y^3dy = \frac{1}{4}.$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xdx\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dy = 2\int_0^1 dy\int_0^y xdx = \frac{1}{3}.$$

Analogamente

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} ydy\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)dx = \int_0^1 2y^2dy = \frac{2}{3}$$

Quindi

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{1}{36}.$$

2. Determinare $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2{\cdot}1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)dy = \int_0^1 2{\cdot}1_{(0,y)}(x)dy = 1_{(0,1)}(x)\int_x^1 2dy = (2-2x)1_{(0,1)}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)dx = 1_{(0,1)}(y)\int_0^y 2dx = 2y \cdot 1_{(0,1)}(y)$$

3. Trovare distribuzione condizionata di Y dato $X = x$.

$$f_{Y|X} = \frac{f_{X,Y}}{f_X}$$

$$f_{Y|X} = \frac{2 \cdot 1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)}{(2-2x)1_{(0,1)}(x)} = \frac{1_{(x,1)}(y)}{(1-x)}$$

per $x \in (0,1)$

Esercizio 2.

Sia:

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}(1-e^{-x})1_{(0,y)}(x)1_{(0,\infty)}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})1_{(0,x)}(y)1_{(0,\infty)}(x)$$

1. Mostrare che $f_{X,Y}$ è una densità.
   $f_{X,Y}$ è una densità se $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$
   Allora:
   $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y}(1-e^{-x})1_{(0,y)}(x)1_{(0,+\infty)}(y)dxdy+$$
   $$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-y})1_{(0,x)}(y)1_{(0,+\infty)}(x)dydx = 1$$

2. Trovare le distribuzioni marginali di X e di Y.
   $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = 1_{(0,+\infty)}(x)\left\{\int_{x}^{+\infty} e^{-y}(1-e^{-x})dy + \int_{0}^{x} e^{-x}(1-e^{-y})dy\right\} =$$
   $$= xe^{-x}1_{(0,+\infty)}(x)$$
   Per simmetria si ha $f_Y(y) = ye^{-y}1_{(0,+\infty)}(y)$

3. Trovare $E[Y|X=x]$ con $x>0$.
   $$E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X}(y|X=x)dy$$
   $$f_{Y|X}(y|X=x) = \frac{e^{-y}(1-e^{-x})1_{(0,y)}(x)1_{(0,\infty)}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})1_{(0,x)}(y)1_{(0,\infty)}(x)}{xe^{-x}1_{(0,\infty)}(x)}$$

$$= \frac{e^{-y}(1-e^{-x})1_{(x,\infty)}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})1_{(0,x)}(y)}{xe^{-x}}$$

Allora:

$$E[Y|X=x] = \frac{1}{xe^{-x}} \cdot \left\{ \int_x^{+\infty} ye^{-y}(1-e^{-x})dy + \int_0^x ye^{-x}(1-e^{-y}) \right\} dy$$

4. Trovare $P[X \leq 2, Y \leq 2]$.
   $P(X \leq 2, Y \leq 2) = 2\int_0^2 \int_0^y e^{-y}(1-e^{-x})dxdy$

5. Trovare il coefficiente di correlazione di X e Y.

$$\rho(X,Y) = \frac{5-4}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

6. Trovare un'altra funzione di densità di probabilità congiunta avente le stesse marginali.
   Una possibile scelta è considerare X ed Y indipendenti, quindi fare il prodotto delle marginali.