I Esonero di AM110 - 4/11/2014 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

Per $n=1$ la disuguaglianza vale. Se vale per n, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

Dal Principio di Induzione segue che la disuguaglianza vale per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2

Dai limiti notevoli sulla radice $n-$esima e sugli ordini di infinito, e dal teorema del confronto abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n+n!}}{n\sqrt[n]{\frac{\log^2 n}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^n+n!}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1+\frac{n!}{n^n}} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n!+n^2}-\sqrt{n!+4^n}}{\sqrt{n!+3^n}-\sqrt{2n!}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-4^n}{3^n-n!} \frac{\sqrt{n!+3^n}+\sqrt{2n!}}{\sqrt{n!+n^2}+\sqrt{n!+4^n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{n!} \frac{1-\frac{n^2}{4^n}}{1-\frac{3^n}{n!}} \frac{\sqrt{1+\frac{3^n}{n!}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{n^2}{n!}}+\sqrt{1+\frac{4^n}{n!}}} = 0.\end{aligned}$$

Esercizio 3

Poiché $\frac{5n+7}{2n+1} > 1$ mentre $(-1)^n \cos\frac{1}{n}$ oscilla tra valori positivi e negativi, il valore di inf corrisponde a rendere il piú grande possibile $\cos\frac{1}{n}$ con n dispari. Ossia, l'inf corrisponde a prendere n dispari molto grandi, e quindi $\inf E = -1$. Infatti

$$\frac{5n+7}{2n+1} > 1,\ (-1)^n \cos\frac{1}{n} \geq -1$$

implica che -1 minora gli elementi di E. Inoltre, per ogni $\epsilon > 0$ esiste n grande dispari tale che $(-1)^n \cos\frac{1}{n} \leq -1+\epsilon$, e quindi $-1+\epsilon$ non minora l'insieme E. Quindi $\inf E = -1$.

Per quanto riguarda il $\sup E$, osserviamo che

$$\frac{5n+7}{2n+1} > 1 \geq (-1)^n \cos\frac{1}{n}$$

e quindi il sup corrisponde a rendere il piú grande possibile $\frac{5n+7}{2n+1}$. Siccome

$$\frac{5n+7}{2n+1} = \frac{5}{2} + \frac{9}{2(2n+1)}$$

decresce in n, otteniamo che $\sup E = \max E = 4$ (raggiunto per $n=1$).

Esercizio 4
Poiché dai limiti notevoli della radice $n-$esima abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)^3}}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

dal criterio della radice deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{n!} < +\infty.$$