AM210-2014/15: Tracce delle lezioni- X Settimana

EQUAZIONI DIFFERENZIALI AUTONOME DEL I ORDINE

esistenza, unicitá, tempo di esistenza

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x \in C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I \qquad \textbf{(EDA)}$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che

se $x(t), t \in (\alpha, \beta)$ é soluzione, allora anche $x(t-t_0), t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$ é soluzione.

Per questa ragione l' istante iniziale viene convenzionalmente indicato con '$t = 0$' e la condizione di Cauchy si scrive quindi, usualmente, nella forma $x(0) = x_0$. Il Problema di Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

ha la seguente interpretazione 'dinamica': la soluzione $x(t)$ di (PC) indica la posizione al tempo t di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si trova, al tempo 'iniziale' $t = 0$, nella posizione x_0, e che si muove con velocitá, all'istante t, data da $f(x(t))$ (la velocitá dipende cioé-solo- dalla posizione al tempo t).

1. Equilibri.

Se $f(x_0) = 0$, una soluzione é banalmente data dalla funzione costante $x(t) = x_0$ per ogni t . Siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove, la posizione x_0 si dice appunto di **equilibrio**.

2. Esistenza e unicitá locale se $f(x_0) \neq 0$.

Determinazione di una soluzione di (PC). Possiamo supporre $f(x_0) > 0$. Sia (a,b), $-\infty \leq a$, $b \leq +\infty$, il piú grande intervallo contenente x_0 su cui risulta $f(x) > 0$. É allora definita in (a,b) la funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a,b)$$

Ovviamente, $F'(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\forall\, x \in (a,b)$. Ora, se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} \equiv 1$ e quindi, integrando tra 0 e t,

$$F(x(t)) = t \quad \text{ovvero} \quad x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in (F(a), F(b))$$

Siccome

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b)) \quad \text{e} \quad F^{-1}(0) = x_0$$

(PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a), F(b))$**:** $\qquad x(t) = F^{-1}(t)$.

Notiamo che $\mathcal{I}m\ x = \mathcal{I}m\ F^{-1} = \mathcal{D}F = (a, b)$ ovvero gli 'estremi' della traiettorie $x(t)$ sono, se finiti, equilibri.

3. $f(x_0) = 0$**: Unicitá/non unicitá locale.** La soluzione costante,

$$x(t) = x_0 \quad \forall t, \qquad \textit{non é in generale l'unica soluzione:}$$

se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se, vicino ad x_0, $\quad |f(x)| \approx |x - x_0|^{\delta}$ per un $\delta \in (0, 1)$) allora la formula al punto 2 continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). Di fatto, ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamo esempi di (PC) con **infinite soluzioni:**

$$(k) \qquad \dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0, \qquad (kk) \qquad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

(k) Per ogni $t^+ > 0$ c'é una soluzione che passa per zero al tempo t^+: se $F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}}$ la soluzione (non costante) $x(t)$ che in t^+ vale zero é data implicitamente dall'equazione $\quad F(x) = t - t^+ \quad$ e quindi

$$x(t) = F^{-1}(t) = \left(\frac{t - t^+}{3}\right)^3$$

Analogamente si trova la soluzione non di equilibrio che vale zero al tempo $t^- < 0$: $x(t) = \left(\frac{t-t^-}{3}\right)^3$. Tali soluzioni si incollano per dare origine a tutte le soluzioni che passano per $x = 0$ al tempo $t = 0$ *(il pennello di Peano)*:

$$x(t) = \left(\frac{t - t^-}{3}\right)^3 \chi_{(-\infty, t^-]} + \left(\frac{t - t^+}{3}\right)^3 \chi_{[t^+, +\infty)} \qquad t^- \le 0 \le t^+$$

(kk) In modo del tutto analogo si trova che le soluzioni passanti per $x = 0$ al tempi $t = 0$ sono tutte e solo della forma

$$x(t) = -\left(\frac{t - t^-}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty, t^-]} + \left(\frac{t - t^+}{2}\right)^2 \chi_{[t^+, +\infty)}, \qquad t^- \le 0 \le t^+$$

Tuttavia, **se f é localmente Lipschitziana** (vicino all'equilibrio x_0) **allora la soluzione del Problema di Cauchy é unica** (per tempi piccoli). Sia infatti

$$f(x_0) = 0, \quad \exists c > 0 : \quad |f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| \quad \forall x \quad \text{vicino a } x_0$$

Allora, se $x(t)$ é soluzione con $x(0) = x_0$, si ha che, per $\quad t \in [0, \delta]$,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t f(x(\tau))d\tau \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_0| \leq \int_0^\delta |f(x(\tau))|d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^\delta c|x(\tau) - x_0|d\tau \leq c\delta \sup_{0\leq\tau\leq\delta} |x(\tau)| \quad \Rightarrow \quad \sup_{0\leq t\leq\delta} |x(t) - x_0| \leq c\delta \sup_{0\leq t\leq\delta} |x(t) - x_0| \quad \Rightarrow$$

$x(t) = x_0 \quad \forall t \in [0, \delta] \quad$ se $\quad c\delta < 1$.

4. Tempi di esistenza.

Se $f \in C(\mathbf{R})$, $f(a) = f(b) = 0$, $f > 0$ in (a, b), il problema di Cauchy $x' = f(x)$, $\quad x(0) = x_0 \in (a, b)$ ha una e (localmente) una sola soluzione data da

$$x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in \left(-\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} \right) \qquad F(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a, b)$$

Se $\quad f \in Lip_{loc}$ e quindi $\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} = +\infty$, **la soluzione é definita per tutti i tempi** e tende, per $t \to \pm\infty$ a b, rispettivamente, ad a e si dice che la soluzione **esiste globalmente**.
Se poi $\quad b = +\infty \quad$ e $\quad \int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty \quad$ *(il ché accade se f diverge piú che linearmente)* la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode in tempo finito** (nel futuro; ci sará esplosione in tempo finito nel passato se $\int_{x_0}^{a} \frac{ds}{f(s)} > -\infty$). Ad esempio per le seguenti equazioni differenziali

$$(i)\ x' = e^x, \ (ii)\ x' = e^{-x}, \ (iii)\ x' = \sqrt{1 + x^2}, \ (iv)\ \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \ (v)\ \dot{x} = \cosh^2 x$$

(prive di equilibri !) e con condizione iniziale $x(0) = 0$ (in (v) $x(0) = x_0$) si ha

(i) $\quad F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = -\log(1 - t)$ é definita in $(-\infty, 1)$
(ii) $\quad F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \log(t + 1)$ é definita in $(-1, +\infty)$

(iii) $F(x) = \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \sinh^{-1} x$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \sinh t$ é definita per tutti i tempi.

(iv) $F(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1+s^2}\ ds = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(\sqrt{1+x^2}+x)\right)$. La soluzione $x(t) = F^{-1}(t)$ é definita per tutti i tempi perché $F((-\infty,+\infty)) = (-\infty,+\infty)$

(v) $F(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{ds}{\cosh^2 s} = \tanh x - \tanh x_0$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \tanh^{-1}(t + \tanh x_0)$ é definita in $(-1-\tanh x_0, 1-\tanh x_0)$. Questo mostra in particolare che *l'intervallo di esistenza dipende dal valore iniziale* x_0.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Se $a < b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0 \in (a,b)$ allora la soluzione di $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int\limits_{x_0}^a \frac{ds}{f(s)}$ e $\int\limits_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Se $f(x) > 0$ in $(b,+\infty)$ la soluzione é definita per tutti i tempi se e solo se $\int\limits_b^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty$. In caso contrario la soluzione é definita nell'intervallo (dipendente da x_0!) dato da $(-\infty, \int\limits_b^{+\infty} \frac{ds}{f(s)})$. Ad esempio, nel problema

$$x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \qquad x(0) = x_0$$

troviamo $F(x) = \int\limits_{x_0}^x \frac{2ds}{1-s^2} = \int\limits_{x_0}^x \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right] ds = \log\left[\frac{1+x}{1+x_0}\ \frac{1-x_0}{1-x}\right]$ e vediamo che

$$F(-\infty,-1) = F(1,+\infty) = (-\infty, \log\frac{x_0-1}{x_0+1}), \quad F(-1,1) = (-\infty,+\infty))$$

che sono i domini della soluzione $x(t) = F^{-1}(t)$ se, rispettivamente, $|x_0| > 1, |x_0| \leq 1$.Ció lo si vede anche dalla forma esplicita della soluzione del problema di Cauchy

$$x(t) = \frac{e^t + \frac{x_0-1}{x_0+1}}{e^t - \frac{x_0-1}{x_0+1}}$$

4. Non unicitá per tempi grandi. Mostriamo con degli esempi che, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi').

(i) Consideriamo il problema $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = -1$.

Qui, con le notazioni usate al punto 1, $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$,

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} + 3, \quad x \in (-\infty,0), F(-\infty) = -\infty, F(0) = 3$$

Il problema dato ha ha come *unica soluzione in* $(-\infty, 3)$ la funzione

$$x(t) := F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3, \qquad (-\infty, 3)$$

Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto **R** cosi:

$$\forall t_0 \geq 3: \qquad x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Con verifica diretta: queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

(ii) Troviamo tutte le soluzioni di $\qquad \dot{x} = \sqrt{|1-x^2|}, \quad x(0) = 0.$

Sia, per $x \in (-1, 1)$, $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin x$. Dunque $x = \sin t$ é soluzione in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per $x > 1$ é $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{|1-s^2|}} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2} + \cosh^{-1} x$ e quindi $x(t) = F^{-1}(t) = \cosh(t - \frac{\pi}{2})$ per $t \geq \frac{\pi}{2}$.

Infine, per $\quad t \leq 0, \qquad (-x(-t))' = x'(-t) = \sqrt{|1 - [(-x)(-t)]^2|} \qquad$ e quindi $x(t) = \sin t$ in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $x(t) = -\cosh(t + \frac{\pi}{2})$ se $t \leq -\frac{\pi}{2}$.

Ma, come si verifica derivando, per ogni $t^+ \geq \frac{\pi}{2}$ la funzione

$$x(t) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]} \sin t + \chi_{[\frac{\pi}{2},t^+]} + \chi_{[t^+,+\infty)} \cosh(t - t^+)$$

é soluzione in $[0, +\infty)$ e $-x(-t)$ lo é in $(-\infty, 0]$.

(iii) Il problema $\quad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = x_0 > 0.$

Sia $x(t)$ soluzione; $\dot{x}(t) \geq 0$ e quindi $x(t)$ é non decrescente.

Da $\quad \left(2\sqrt{x(t)}\right)' = 1, \quad$ segue, integrando, $\sqrt{x(t)} = \sqrt{x_0} + \frac{t}{2}$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, e quindi $\quad x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, cioé tale funzione é *l'unica soluzione del problema di Cauchy dato nell'intervallo di tempo* $(-2\sqrt{x_0}, +\infty)$.

Una verifica mostra che $\quad x(t) = -\left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ é soluzione in $t \leq -2\sqrt{x_0}$. Dalla derivabilitá di

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{x_0}]}$$

segue che tale funzione é soluzione, definita su tutto **R**. **Ma non é l'unica!** Infatti

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{\xi_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{\xi_0}]}$$

é un'altra soluzione del medesimo problema di Cauchy quale che sia $\xi_0 \geq x_0$.

SISTEMI NON LINEARI: IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, e una funzione $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$ tali che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \qquad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ é in effetti un **sistema di** n **equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

$$\dot{\gamma}_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \qquad \gamma_i(0) = x_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$). Una soluzione γ é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori* f e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale x in O si otterrá una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria od orbita** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

ESEMPIO. *Sistemi lineari* $n \times n$. Data $\mathcal{A} := (a_{ij})$ matrice $n \times n$, le resta associato il sistema di n (EDO) in n incognite $x_i = x_i(t)$:

$$\dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (EDO)$$

Osserviamo che se $\mathcal{P}$ é matrice $n \times n$ invertibile e $x(t)$ é soluzione di (EDO), posto $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$, risulta $\dot{y} = \dot{\overline{\mathcal{P}^{-1}x}} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}x = (\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P})y$. Dunque x é soluzione di (ED=) se e solo se $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$ é soluzione del nuovo sistema

$$\dot{y} = (\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P})y$$

Come noto, scelte opportune di $\mathcal{P}$ permettono di portare $\mathcal{A}$ in forme piú semplici, le forme canoniche. Ad esempio, se $\mathcal{A}$ ha n autovettori ξ^j linearmente indipendenti, corrispondenti ad autovalori λ_j, e $\mathcal{P}$ é la matrice che ha per colonne gli autovettori, allora $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é matrice diagonale, con elementi della diagonale dati dai λ_j.

Richiamiamo le forme canoniche nel caso $n = 2$. Un ruolo fondamentale nella riduzione a forma canonica é giuocato dall'analisi spettrale della matrice dei coefficenti $\mathcal{A}$. Le forme canoniche corrispondono ai casi seguenti: la matrice $\mathcal{A}$ ha

(i) due autovalori reali $\lambda_1 \le \lambda_2$ con due autovettori linearmente indipendenti; forma canonica corrispondente: matrice diagonale con elementi λ_1, λ_2

(ii) due autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$, con $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = \mathbf{R}\xi$
forma canonica corrispondente: $a_{ii} = \lambda, \quad a_{21} = 0$
Per vederlo, basta prendere come $\mathcal{P}$ la matrice che ha per colonne ξ ed $\eta \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, tale che $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2(\eta) = 0$.

(iii) due autovalori complessi coniugati $a \pm ib$;
forma canonica corrispondente: $a_{ii} = a, \quad a_{12} = b, \quad a_{21} = -b.$
Per vederlo, basta prendere come $\mathcal{P}$ la matrice che ha per colonne parte reale e coefficente della parte immaginaria dell'auovettore corrispondente ad $a + ib$.

Nel caso (i) abbiamo il sistema $\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y$

La soluzione di punto iniziale (traiettoria passante per) (x_0, y_0) é

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

Notiamo che se $\lambda_1\, \lambda_2 > 0$, le traiettorie sono asintotiche all'equilibrio $(0, 0)$:

$$(x(t), y(t)) \to (0, 0) \quad \text{per } t \to -\infty, \text{ se } \lambda_1 > 0, \text{ oppure per } t \to +\infty, \text{ se } \lambda_2 < 0\ .$$

Nel tracciare le traiettorie, possiamo supporre $x_0, y_0 \ge 0$; gli altri casi si deducono per riflessione rispetto agli assi. Se $y_0 = 0$ (risp. $x_0 = 0$), il moto avviene lungo l'asse delle x (risp. delle y). Come osservato sopra,

l' origine é un punto di equilibrio repulsivo se $\lambda_1 > 0$: $\dot{x} > 0\ , \dot{y} > 0$,
ed é invece *attrattivo* se $\lambda_2 < 0$: $\dot{x} < 0, \quad \dot{y} < 0$.

Eliminando il parametro, si trova l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \qquad x > 0$$

Nel caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ le traiettorie, diverse dai semi assi, non sono asintotiche all'equilibrio, che é parzialmente attrattivo/parzialmente repulsivo, ma sono piuttosto simili a rami di iperboli (come quando $\frac{b}{a} = -1$).

Nel caso (ii) abbiamo il sistema $\dot{x} = \lambda x + ay, \quad \dot{y} = \lambda y$

La soluzione della seconda equazione é $y = y(0)e^{\lambda t}$ e la prima equazione diventa $\dot{x} = \lambda x + ay(0)e^{\lambda t}$ e quindi $x(t) = [x(0) + ay(0)t]e^{\lambda t}$. Dunque le soluzioni sono, in dipendenza dalla condizione iniziale (due parametri arbitrari)

$$x(t) = [x(0) + ay(0)t]e^{\lambda t}, \qquad y = y(0)e^{\lambda t}$$

Caso (iii). Il sistema si scrive $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = -bx + ay$ ovvero $\dot{x} - ax = by$, $\dot{y} - ay = -bx$ ovvero, posto $\xi(t) := x(t)e^{-at}$, $\eta(t) = y(t)e^{-at}$

$$\dot{\xi} = b\eta, \qquad \dot{\eta} = -b\xi$$

Se $(\xi(t), \eta(t))$ é soluzione di questo nuovo sistema, allora

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right] = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = b\xi\eta - b\eta\xi \equiv 0$$

e quindi la traiettoria per $(\xi(0), \eta(0) = (x_0, y_0)$, in forma cartesiana, é la circonferenza

$$\xi^2 + \eta^2 = x_0^2 + y_0^2$$

In particolare, le traiettorie del nuovo sistema (ovvero del vecchio nel caso a fosse zero) sono curve chiuse: il moto é periodico (parleremo di *orbite periodiche*). Per ottenere la soluzione in forma parametrica, conviene usare notazioni complesse, ponendo

$$z(t) := \xi(t) + i\eta(t), \quad \dot{z} = \dot{\xi} + i\dot{\eta} = -ib\dot{z} \quad z(0) = \xi(0) + i\eta(0)$$

Troviamo cosi $\qquad z(t) = (\xi(0) + i\eta(0))e^{-ibt} =$

$$(\xi(0)+i\eta(0))(\cos(bt)-i\sin(bt) = \xi(0)\cos(bt)+\eta(0)\sin(bt)+i[\eta(0)\cos(bt)-\xi(0)\sin(bt)]$$

e quindi

$$\xi(t) = \mathcal{R}ez = \xi(0)\cos(bt) + \eta(0)\sin(bt), \qquad \eta(t) = \mathcal{I}mz = \eta(0)\cos(bt) - \xi(0)\sin(bt)$$

Tornando al sistema originario, troviamo la soluzione

$$x(t) = e^{at}[x(0)\cos(bt) + y(0)\sin(bt)], \qquad y(t) = e^{at}[y(0)\cos(bt) - x(0)\sin(bt)]$$

Notiamo che, mentre questa orbita é una circonferenza quando $a = 0$, nel caso $a \neq 0$, l'orbita é una spirale che si avvolge attorno all'equilibrio.

NOTA. Le soluzioni trovate esistono per tutti i tempi. Questo vale per tutti i sistemi lineari a coefficenti costanti, come conseguenza del teorema di esistenza globale che seguirá.

Una formulazione equivalente del Problema di Cauchy: esistenza di un punto fisso per un operatore integrale

Se $\gamma \in C^1(-\delta,\delta), O)$ é soluzione del Problema di Cauchy $(*)$, allora, per il TFC, $\gamma_i(t) = x + \int_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$, ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta,\delta) \qquad\qquad (**)$$

ove, se $\quad x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$, intendiamo che $\quad \int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_1(t)dt, \dots, \int_a^b x_n(t)dt)$.

Viceversa, se $\gamma \in C(-\delta,\delta), O)$ risolve *l'equazione integrale* $(**)$, allora , di nuovo per il TFC, $\gamma \in C^1(-\delta,\delta), O)$ e soddisfa $(*)$.

Vediamo ora come $(**)$ si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale.* Per fissare le idee, supponiamo dapprima che $O = \mathbf{R}^n$. É allora definito l'operatore

$$N : C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) \to C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n), \qquad (N\gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau$$

Dunque γ é soluzione di (PC) se e solo se é punto fisso di N. Per cominciare, vogliamo mostrare, con **il metodo delle approssimazioni successive** che, se f é Lipschitziana, allora (PC) ha una soluzione, che risulterá essere unica. Avremo bisogno del

FATTO. Sia $x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\| \int_a^b x(t)\, dt \|_2 \le \int_a^b \|x(t)\|_2\, dt$$

Infatti, $\quad \| \int_a^b x(t)dt\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)\left(\int_a^b x_i(s)ds\right) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)\, x_i(s)\right] ds.$
Usando Cauchy-Schwartz, troviamo

$$\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2^2 \le \int_a^b \left[\| \int_a^b x(t)dt\|_2\, \|x(s)\|_2 \right] ds = \| \int_a^b x(t)\, dt\|_2 \; \int_a^b \|x(s)\|_2\; ds$$

Dividendo per $\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2$ si ottiene la tesi.

Nel seguito scriveremo $\qquad \|x\|_{\infty,T} := \sup_{|t|\le T} \|x(t)\|_2, \quad \forall x \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n).$

TEOREMA di Picard (globale)

(esistenza ed unicitá globale per (PC) in ipotesi di Lipschitzianitá globale)

Sia f Lipschitziana (di costante L) in $\mathbf{R}^n$. Allora (PC) ha, per ogni dato iniziale, una ed una sola soluzione, che é globale, ovvero, é definita su tutto $\mathbf{R}$. Di piú,

$$\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)), \qquad \dot\eta(t) = f(\eta(t)) \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 \le e^{L|t|}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Prova. Per ipotesi: $\|f(\xi) - f(\eta)\|_2 \le L\|\xi - \eta\|_2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^n$.

Esistenza (globale). Sia, per ogni t in $\mathbf{R}$,

$$\gamma_0(t) := x, \quad \gamma_1(t) := \int_0^t f(\gamma_0(\tau))d\tau = x+tf(x), \qquad \gamma_{n+1}(t) := x+\int_0^t f(\gamma_n(\tau))d\tau, \quad \ldots$$

L'idea é che γ_n abbia un limite, uniforme sui limitati, γ. In tal caso si avrebbe

$$\|\int_{-T}^{T}[f(\gamma_n(\tau)) - f(\gamma(\tau))]d\tau\|_2 \le 2LT\|\gamma_n - \gamma\|_{\infty;T} \to_n 0 \qquad \text{e quindi}$$

$$\gamma(t) = \lim_n \gamma_{n+1}(t) = x+\lim_n \int_0^t f(\gamma_n(\tau))d\tau = x+\int_0^t \lim_n f(\gamma_n(\tau))d\tau = x+\int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau$$

Ora, $\gamma_{N+1}(t) = x + \sum_{n=0}^{N}[\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)]$ e basta quindi mostrare che

$$\spadesuit \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_{n+1} - \gamma_n\|_{\infty,\, T} \ < \ \infty \qquad \forall T > 0 \qquad \spadesuit \qquad \text{perché}$$

convergenza totale, in $[-T, T]$, della serie, telescopica, $\sum_{n=0}^{\infty}[\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)] \Longrightarrow$

$$\gamma_{N+1}(t) \quad \overset{uniformemente}{\to_n} \quad \gamma(t) := x + \sum_{n=0}^{\infty}[\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)] \quad in \quad [-T, T] \quad \forall T$$

Proviamo ora $\spadesuit..\spadesuit$ Intanto, $\|\gamma_1(t)-\gamma_0(t)\|_2 \le |t|\times\|f(x)\|_2$, poi, ragionando induttivamente,

$$\clubsuit \qquad \|\gamma_n(t) - \gamma_{n-1}(t)\|_2 \le \|f(x)\|_2\, L^{n-1}\, \frac{|t|^n}{n!} \qquad \clubsuit \qquad \Longrightarrow$$

$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_2 = \left\| \int_0^t [f(\gamma_n(\tau)) - f(\gamma_{n-1}(\tau))]d\tau \right\|_2 \le$$

$$L\left|\int_0^t \|\gamma_n(\tau) - \gamma_{n-1}(\tau)\|_2\, d\tau\right| \le \ L \ \left|\int_0^t \|f(x)\|_2 L^{n-1}\frac{|\tau|^n}{n!}\, d\tau\right| = \|f(x)\|_2\, \frac{L^n|t|^{n+1}}{n+1!} \quad \forall t$$

Quindi $\quad \|\gamma_{n+1}-\gamma_n\|_{\infty,\,T} \;\le\; \|f(x)\|_2\,\frac{1}{L}\,\frac{(LT)^{n+1}}{n+1!}$ $\quad$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\gamma_{n+1}-\gamma_n\|_{\infty;\,T} \;\le\; \frac{1}{L}\,\|f(x)\|_2\;e^{LT}$$

Unicitá e dipendenza continua dal dato iniziale. Siano γ,η soluzioni di (PC). Allora

$$\varphi(t) := \|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 \le \|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 + \int_0^t \|f(\gamma(\tau))-f(\eta(\tau))\|_2 d\tau \le$$

$$\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 + L\int_0^t \|\gamma(\tau)-\eta(\tau)\|_2 d\tau := \psi(t) \qquad \forall t\ge 0$$

Per TFC, $\quad \psi' = L\varphi \le L\psi \quad$ e quindi $\quad (e^{-Lt}\psi(t))' = e^{-Lt}(\psi'(t)-L\psi(t)) \le 0 \quad$ e quindi, integrando $\quad e^{-Lt}\psi(t) \le \psi(0) = \|\gamma(0)-\eta(0)\|_2, \quad$ e quindi

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 = \varphi(t) \le \psi(t) \le e^{Lt}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \qquad \forall t\ge 0$$

Siccome, posto $\quad \gamma^-(t) := \gamma(-t), \quad \eta^-(t) := \eta(-t), \quad$ risulta

$$\dot\gamma^-(t) = -\dot\gamma(-t) = -f(\gamma(-t)) = -f(\gamma^-(t)), \qquad \dot\eta^-(t) = -f(\gamma^-(t))$$

per quanto sopra

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\| = \|\gamma^-(-t)-\eta^-(-t)\| \le e^{-Lt}\|\gamma^-(0)-\eta^-(0)\| = e^{-Lt}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \qquad \forall t\le 0$$

In conclusione

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 = \varphi(t) \le \psi(t) \le e^{L|t|}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \qquad \forall t\in\mathbf{R}$$

Tale stima implica che due soluzioni γ,η coincidono per tutti i tempi se coincidono per $t=0$ (o per qualsiasi altro tempo..).

NOTA. Tale Teorema implica anche l'esistenza locale in ipotesi di Lipschitzianitá locale: se

$$\exists r, L>0: \quad \|f(\xi)-f(\eta)\|_2 \le \|\xi-\eta\|_2 \qquad \forall \xi,\eta\in B_{2r}(x)\subset O\subset \mathbf{R}^n$$

allora esiste $\delta>0$ ed esiste $\gamma\in C^1((-\delta,\delta),O)$ soluzione di (PC).
Sia infatti $\quad \varphi\in C^\infty(B_{2r}(x),[0,1]),\ \varphi\equiv 1$ in $B_r(x)$. $\quad$ Siccome $f\varphi$ é chiaramente globalmente Lipschitziana, il Teorema assicura l'esistenza di una soluzione per il Problema di Cauchy relativo a $f\varphi$, e tale soluzione é anche soluzione, per tempi piccoli, del Problema di Cauchy relativo ad f.
Daremo comunque una dimostrazione di tutto ció facendo uso di un principio fondamentale, il **Principio delle contrazioni**. Tale approccio fornirá anche la *dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale.*