AM210 2014-15: Tracce delle lezioni- V Settimana

TRASFORMAZIONI LINEARI CONTINUE

Siano $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ spazi normati, $L \in L(E,F)$ (cioé L é lineare da E ad F).

(i) L é continua in E (cioé in ogni punto di E) $\Leftrightarrow$ L é continua in zero.
(ii) L é continua (in E) $\Leftrightarrow$ $\exists\, c = c_L$ tale che $\|Lx\|_2 \le c\|x\|_1 \quad \forall x \in E$

Prova di $\Leftarrow$ in (i). Da 'L é continua in zero' segue che

$$u_n \to u \quad \Rightarrow \quad u_n - u \to 0 \quad \Rightarrow \quad Lu_n - Lu = L(u_n - u) \to 0$$

Prova di $\Rightarrow$ in (ii). Dalla continuitá di L in 0 segue che $\exists c > 0$:

$$\|u\|_E \le \tfrac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \|Lu\|_F \le 1 \quad \Rightarrow \quad \|L(\tfrac{u}{c\|u\|_1})\|_F \le 1 \quad \Rightarrow \quad \|Lu\|_F \le c\|u\|_E$$

Gli spazi $\mathcal{L}(E,F)$, $\quad E' := \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ $(duale\ algebrico - topologico)$.
Siccome la combinazione lineare di funzioni continue é anch'essa continua, $\mathcal{L}(E,F)$ é sottospazio lineare di $L(E,F)$ (lo spazio -vettoriale- delle applicazioni lineari di E in F). La funzione su $\mathcal{L}(E,F)$ definita come

$$\|L\| := \sup_{x \ne 0} \frac{\|Lx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|Lx\|_F, \qquad L \in \mathcal{L}(E,F)$$

é, come é facile verificare, una norma su $\mathcal{L}(E,F)$.

Ogni $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare é continua, ogni $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineare é continua
Per provarlo, supponiamo $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ dotati della norma euclidea (ma la cosa vale quale che sia la norma su $\mathbf{R}^n$, dato che queste sono tutte tra loro equivalenti, e lo stesso per $\mathbf{R}^m$). Dato l,

$$\exists h_l \in \mathbf{R}^n : \quad l(x) = < h_l, x > \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

e quindi la continuitá di l segue da Cauchy-Schwartz: $|l(x)| \le \|h_l\|\,\|x\|$.

La continuitá di L segue dal fatto che , se e_j, f_i sono basi canoniche in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$, allora L si scrive

$$L(x) = L(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j [\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i] = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i$$

per certi a_{ij}, cioé le componenti di L sono forme lineari , quindi continue. Ne deriva che L é continua.

NOTA **Non tutte le trasformazioni lineari sono continue.**

Esempio 1. Sia $E = C([0,1])$. La forma lineare su E definita come $l(f) := f(1)$ é continua rispetto alla norma $\|.\|_\infty$, perch'e $|l(f)| = |f(1)| \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, ma non lo é rispetto alla $\|.\|_1$. Infatti, se $f_n(x) = x^n$, allora $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to_n 0$ mentre $l(f_n) = 1\,\forall n$.
Esempio 2. $E = F = C([0,1])$ e $\|f\|_E = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|$, $\|f\|_F = \|f\|_\infty$, allora $Lf := f$, é continua da F in E ma non é continua da E in F: se $f_n(t) = t^n$, allora $\|f_n\|_E \to 0$ mentre $\|f_n\|_F \equiv 1$.
Esempio 3. Sia $C_0 = C_0(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) |\, \exists R = R(f) : |x| \ge R(f) \Rightarrow f(x) = 0\}$, $E = (C_0, \|.\|_\infty), F = (C_0, \|.\|_1)$. La $Lf := f$ non é continua né da E in F né da F in E: se $f \in C_0, f \ne 0$ e $f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n})$, $\|f_n\|_\infty \to 0$ ma $\|f_n\|_1 \equiv \|f\|_1$ mentre se $f_n(x) := f(nx)$ é $\|f_n\|_1 \to 0$ mentre $\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty$.
Esempio 4. $Lf = f'$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma $\|f\|_\infty := \sup\limits_{\mathbf{R}} |f(t)|$. Infatti, data $f \in C_0^\infty$, $f \ne 0$ e, posto $f_n(t) := f(nt)$, é

$$\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty, \qquad \|Lf_n\|_\infty = \|nf'\|_\infty = n \sup_{\mathbf{R}} |f'(t)| \to_n \infty$$

ELEMENTI DI TOPOLOGIA NEGLI SPAZI METRICI

Nomenclatura. Sia (X,d) spazio metrico, $A \subset X$.
$x \in X$ é *interno* ad A se $x \in intA := \{x \in X : \quad \exists r > 0 \quad \textit{tale che} \quad B_r(x) \subset A\}$
$x \in X$ é *esterno* ad A se é interno ad A^c (=$X \setminus A$ é il *complementare* di A)
$x \in A$ é *punto isolato* di A se $A \cap B_r(x) = \{x\}$ $\forall r$ piccolo
$x \in X$ é *punto di accumulazione* per A se $A \cap (B_r(x) \setminus \{x\}) \ne \emptyset$ $\forall r > 0$
$x \in X$ é *punto frontiera* di A se $B_r(x) \cap A \ne \emptyset \ne B_r(x) \cap A^c\, \forall r > 0$ e

$$\partial A := \{x : B_r(x) \cap A \ne \emptyset \ne B_r(x) \cap A^c \quad \forall r > 0\} \qquad (\textit{ frontiera} \text{ di } A)$$

é l'insieme dei punti frontiera di A. Chiaramente, $\partial A = (intA)^c \cap (intA^c)^c = \partial A^c$ e $\forall A \subset X$, $intA \cup \partial A \cup intA^c = X$ (unione di insiemi disgiunti). Notiamo anche che $\forall x \in \partial A$, $\exists\, x_n \in A$ tale che $x_n \to x$.

NOTA $intB_r(x) = B_r(x)$ perché, se $y \in B_r(x)$, allora

$$d(z,y) < \rho := r - d(y,x) \Rightarrow d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < r \text{ ovvero } \quad B_\rho(y) \subset B_r(x)$$

Allo stesso modo si vede che ogni punto di $C_r(x) := \{y \in X : \quad d(y,x) > r\}$ é un punto interno ad A. Ne deriva che

$$\partial B_r(x) = (B_r(x))^c \cap (C_r(x))^c = S_r(x) := \{y \in X : \quad d(y,x) = r\} = \partial C_r(x)$$

Def. 1. $O \subset X$ si dice **aperto** se $\forall u \in O\ \exists r > 0 : B_r(u) \subset O$, cioé se tutti i suoi punti sono punti interni. Indicheremo con $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti di (X, d).

Prop. 1. O é aperto sse $O \cap \partial O = \emptyset$; $intA$ é aperto per ogni A.

Infatti, $x \in A$ é interno ad A sse $x \notin \partial A$; e $y \in B_r(x) \subset A \quad \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 :$ $B_\delta(y) \subset B_r(x) \subset A \quad \Rightarrow \quad B_r(x) \subset intA$

Def. 2. $F \subset X$ si dice **chiuso** sse F^c (il complementare di F) é aperto.

Prop. 2. F é chiuso sse $\partial F \subset F$; ∂A e $A \cup \partial A$ sono chiusi quale che sia A.

Infatti, F^c é aperto $\Leftrightarrow$ $F^c \cap \partial(F^c) = \emptyset \Leftrightarrow \partial F = \partial(F^c) \subset (F^c)^c = F$; poi, $\partial A = X \setminus (intA \cup intA^c)$ e $intA \cup intA^c$ é aperto. Infine, $(A \cup \partial A)^c = A^c \cap (intA \cup intA^c) = [A^c \cap intA] \cup [A^c \cap intA^c] = A^c \cap intA^c = intA^c$.

Prop. 3
(i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$
(ii) F_α chiusi, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ e $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha$ sono chiusi

Prova. (i) $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \Rightarrow \exists\, \overline{\alpha}, \exists B_r(x) : \quad B_r(x) \subset O_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha$. Se $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$ esistono $B_{r_\alpha}(x) \subset O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_0$. Se $r \leq r_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{A}_0$ allora $B_r(x) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} B_\alpha \subset \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$

(ii) $\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \right)' = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha \right)' = \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

In particolare, se $\mathcal{F}_A$ indica la classe dei chiusi contenenti A, l'insieme

$$\overline{A} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F \qquad (\textit{chiusura di } A) \qquad \text{é il piú piccolo chiuso contenente } A$$

In particolare, $A = \overline{A} \quad \Rightarrow \quad A$ é chiuso; A chiuso $\Rightarrow \quad \overline{A} \subset A$ e quindi $A = \overline{A}$.

Prop. 4 Le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i) F é chiuso (ii) $x_k \in F,\ x_k \to_k x \quad \Rightarrow \quad x \in F$

(iii) $\partial F \subset F$

(iv) $F = \overline{F}$ (v) $B_r(x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in F$.

Prova.

$(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$: giá viste sopra.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$. La (ii) dice che $\partial F \cup int\, F = \{x : \exists x_k \in F,\ x_k \to x\} \subset F$. Ma $int\, F \cup \partial F \subset F \quad \Leftrightarrow \quad \partial F \subset F$ (quale che sia F!)

$(ii) \Leftrightarrow (v)$: (v) dice che $\{x : B_r(x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0\} \subset F$. Ma, come in (ii), é $\{x : B_r(x) \cap F \neq \emptyset \quad \forall r > 0\} = int\, F \cup \partial F$.

Prop. 5 (j) $\overline{A} = A \cup \partial A$ (jj) $x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad [\exists\, x_j \in A : \quad x_j \to_j x]$.

(j) Siccome $A \cup \partial A$ é chiuso, $\overline{A} \subset A \cup \partial A$. Poi, se F é un chiuso contenente A e $x \in \partial A$, e quindi $\exists x_n \in A \subset F$ con $x_n \to_n x$, dalla (ii) della Prop. 4 segue che $x \in F$. Dunque $A \cup \partial A \subset F$ e quindi $A \cup \partial A \subset \overline{A}$.

(jj) Sia $x \in \overline{A}$ e supponiamo, per assurdo, che non ci sia $x_j \in A$ tale che $x_j \to x$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $(B_r(x))'$, essendo un chiuso contenente A, contiene $\overline{A}$, che contiene x: assurdo. Viceversa, se $x_j \in A : \quad x_j \to_j x$ e F é un chiuso contenente A, allora $x \in F$ e quindi, per l'arbitrarietá di F, $x \in \overline{A}$.

Aderenza di una successione. Se $x_n \in X$, l'aderenza della successione x_n é

$$Ad(x_n) := \bigcap_n \overline{\{x_k : \quad k \geq n\}} = \{x : \quad \exists x_{n_j} \to_j x\}$$

Sia $x_{n_j} \to_j x$, $n \in \mathbf{N}$. Da $x_{n_j} \in \{x_k : \quad k \geq n\}$ se $n_j \geq n$, segue che $x \in \overline{\{x_k : \quad k \geq n\}}$.
Viceversa, se $x \in Ad(x_n)$, o esiste $n_j \to \infty$ tale che $x = x_{n_j} \quad \forall j$, e quindi $x = \lim_j x_{n_j}$, oppure esiste n_0 tale che $x \neq x_k \quad \forall k \geq n_0$. Siccome $x \in \overline{\{x_k : \quad k \geq n_0\}}$, x é limite di una successione di elementi di $\{x_k : \quad k \geq n_0\}$.

Proposizione 6

$$f \text{ é continua} \Leftrightarrow (O \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow (F \quad \text{chiuso} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \quad \text{é chiuso})$$

$\Rightarrow$: sia $x \in f^{-1}(O)$, ovvero $f(x) \in O$ e quindi $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ per un $\epsilon > 0$. Ma, per continuitá, esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset O$ e quindi $B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.

$\Leftarrow$: $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ aperto $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ che dice appunto che f é continua in x.

COMPATTEZZA
Teoremi di Weierstrass e di Heine Cantor

Sia (X, d) spazio metrico.
$K \subset X$ si dice **compatto** (sequenzialmente compatto) se ogni successione $x_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di K, ovvero

$$x_n \in K \quad \Rightarrow \quad \exists n_k \uparrow \infty, \ x \in K \quad \text{tali che} \quad x_{n_k} \to_k x$$

NOTA.

(i) Se K é compatto e $x_n, y_n \in K$ sono due successioni in K, allora esistono $x, y \in K$ ed n_k, successione strettamente crescente di indici, tale che $x_{n_k} \to_k x$ ed anche $y_{n_k} \to_k y$.
Basta infatti trovare dapprima una selezione n_k^1 di indici lungo la quale converge la prima successione. Occorre poi prendere una selezione della n_k^1, diciamo n_k^2, lungo la quale converga la y_n; ovviamente lungo tale 'sottoselezione', anche la prima successione converge.
Ripetendo il procedimento, si puó ottenere la stessa conclusione a partire da un numero finito qualsiasi di successioni in K.

(ii) Se K é compatto, allora K é chiuso e $diam(K) := \sup_{x,y \in K} d(x, y) < \infty$.

Infatti, se $x_n \in K$, esiste $\overline{x} \in K$ e $x_{n_k} \to_k \overline{x}$.
Ora, se $x_n \to x$, necessariamente $x = \overline{x} \in K$. Dunque K é chiuso.
Poi, supponiamo per assurdo che esistano $x_n, y_n \in K$ tali che $d(x_n, y_n) \to \infty$. Per compattezza, esistono n_k ed x, y tali che $x_{n_k} \to_k x, y_{n_k} \to_k y$ e quindi (continuitá della distanza!) $d(x_{n_k}, x_{n_k}) \to d(x, y)$ e quindi $\sup_k d(x_{n_k}, x_{n_k}) < \infty$, mentre $d(x_{n_k}, x_{n_k}) \to \infty$ al pari di $d(x_n, y_n)$.

Queste due proprietá, *K é chiuso e 'limitato'* non sono peró sufficenti a garantire (in generale) che K sia compatto.

Ad esempio, la successione

$$e_i \in l^2 : \quad e_i(j) = \delta_{ij}$$

appartiene alla palla unitaria di in l^2 (dotato della norma $\|.\|_2$), ma non ha sottosuccessioni convergenti perché $\|e_i - e_j\| = 1$ se $i \neq j$. Tuttavia...

Definizione. Sia V spazio normato. $A \subset V$ si dice **limitato** se $\exists r > 0 : \ A \subset B_r$

Prop. $K \subset \mathbf{R}^n$ é compatto $\Leftrightarrow$ K é chiuso e limitato.

Prova di $\Leftarrow$. Possiamo dotare $\mathbf{R}^n$ della norma $\|.\|_\infty$. Essendo K limitato, $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in K \Rightarrow \sup_k |x_{k,j}| < +\infty \quad \forall j = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad \exists \ u := (x_1, \ldots, x_n) :$ $x_{k_i,j} \rightarrow_i x_j$ per $j = 1, \ldots, n$ ovvero $u_{k_i} \rightarrow_i u$; infine, $u \in K$ perché K é chiuso.

Teorema (una funzione continua trasforma compatti in compatti).

Siano $(X,d), (Y,\rho)$ spazi metrici e $f \in C(X,Y)$. Se $K \subset X$ é compatto, lo é anche $f(K)$, ovvero l'immagine continua di un compatto é compatta.

Prova.
Sia $y_n \in f(K)$, ovvero $y_n = f(x_n)$ per certi $x_n \in K$. Siccome K é compatto, esiste $x_{n_k} \rightarrow_k x \in K$. Per continuitá, $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow_k f(x) \in f(K)$.

Corollario (Weierstrass 1). Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ e $K \subset X$ é compatto allora

$$\exists \underline{x}, \overline{x} : \quad f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}) \qquad \forall\, x \in K$$

Prova.
Segue dal fatto che $f(K)$ é compatto, e quindi chiuso e limitato: siccome é limitato, $-\infty < \inf_K f \leq \sup_K f < +\infty$; poi, in quanto chiuso, $f(K)$ contiene sia il suo sup che il suo inf, che sono quindi il massimo e il minimo valore di f in K.

Weierstrass 2 Sia $C \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(C, \mathbf{R})$ tale che

(i) **(coercivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \rightarrow_n +\infty \ \Rightarrow \ f(u_n) \rightarrow_n +\infty$

(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \rightarrow u \ \Rightarrow \ \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

Allora $\exists\, \underline{u} \in C$ tale che $f(\underline{u}) = \inf_C f$

Sia infatti $u_n \in C$ *successione minimizzante*, ovvero

$$f(u_n) \rightarrow_n \inf_C f$$

Allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue quindi che

$$\inf_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u) \geq \inf_C f$$

NOTA. Una funzione f é semicontinua inferiormente in x_0 sse

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x, x_0) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$$

Ad esempio, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0\, \forall x \neq 0$, $f(0) = c$ é semicont. inf. sse $c \leq 0$.
χ_A, la funzione caratteristica di A (ovvero $\chi_A(x) = 1 \quad \forall x \in A$, χ_A é nulla altrove) é inf. semicontinua sse A é aperto

UNIFORME CONTINUITÁ

Siano $(X, d), (Y, \rho)$ spazi metrici, $A \subset X$.

$f : A \to Y$ é **uniformemente continua** in $A \subset X$ se e solo se

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \quad d(u, v) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(f(u), f(v)) \leq \epsilon)$$

Lipschitzianitá. f si dice Lipschitziana (o Lip) di costante $L > 0$ se

$$\rho(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$$

Una funzione si dice localmente Lipschitziana in A se, per ogni $x \in A$, é Lip su qualche $B_{r(x)}(x) \cap A$. O, equivalentemente (vedi Es. 7), se é Lip sui compatti.

Chiaramente, ogni funzione Lip é anche uniformemente continua, ma non viceversa. Ad esempio, $f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in R$ é uniformemente continua (in $\{|x| \leq 1\}$ per Heine-Cantor, ed in $\{|x| \geq 1\}$, perché $x, y \geq 1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$) ma non é Lip, perché $\sup\limits_{x \neq 0} \frac{\sqrt{|x|}}{|x|} = +\infty$.

Teorema di Heine-Cantor

$$f \in C(K, Y), \quad K \subset X \qquad \text{compatto} \quad \Rightarrow \quad f \text{ é uniformemente continua in } K.$$

Prova Se no, $\exists\, \epsilon_0 > 0$, $u_n, v_n \in K$, $d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n}$ tale che $\rho(f(u_n), f(v_n)) \geq \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $\rho(f(u), f(v)) \geq \epsilon_0$. Ma $d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v_n) + d(v_n, v) \quad \forall n \quad \Rightarrow \quad u = v$, contraddizione.

CONNESSIONE

OSSERVAZIONE Sia $A \subset \mathbf{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $a, b \in A \quad \Rightarrow \quad tb + (1-t)a \in A \quad \forall t \in [0,1]$ (ovvero A é un intervallo)
(ii) $\forall\, u, v \in A,\ \exists\, \gamma \in C([0,1], A): \quad \gamma(0) = u,\ \gamma(1) = v$
(iii) $O_i, i = 1,2$ aperti t.c. $(A \cap O_i) \neq \emptyset, (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap A \cap O_2 \neq \emptyset$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Basta prendere $\gamma(t) = tv + (1-t)u$. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Vedi Esercizio 8. (iii) $\Rightarrow$ (i). Se no, esistono $a < c < b$ con $a, b \in A$, $c \notin A$. Ma allora $A = [(-\infty, c) \cap A] \cup [(c, +\infty) \cap A]$, $a \in A \cap (-\infty, c)$, $b \in A \cap (c, +\infty)$ e $(-\infty, c) \cap A \cap (c, +\infty) = \emptyset$.

Se $A \subset E \neq \mathbf{R}$ spazio normato, le implicazioni $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ continuano a valere, ma nessuna delle tre equivalenze sussiste.

Definizione. Sia E spazio normato. Sia $A \subset X$. Si dice che
(K) A é **convesso** se vale la (i)
(kk) A é **connesso per archi** (c.p.a) se vale (ii)
(kkk) A é **connesso** se vale (iii) (cioé se A non é unione di due aperti disgiunti)

ESEMPI. Ogni intervallo é connesso; $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : \ y = ax + b\}$ non é connesso , la sfera $S_r = \{x \in E : \quad \|x\| = r\}$ é connessa, S_r^c non é connesso.

Piú in generale, X metrico é connesso per archi se $\forall u, v \in X,\ \exists \gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = u,\ \gamma(1) = v$. Si dice che X é connesso se $X = O_1 \cup O_2$, aperti $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ mentre $A \subset X$ é connesso per archi/connesso se lo é $(A, d_{A \times A})$.
Anche qui X connesso per archi $\Rightarrow$ X connesso. Vediamolo:
$X = O_1 \cup O_2$, $x_i \in O_i$, $\gamma \in C([0,1], X), \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2 \quad \Rightarrow [0,1] = \gamma^{-1}(O_1) \cup \gamma^{-1}(O_2)$ unione di aperti disgiunti! $\Rightarrow$ (perché $[0,1]$ é connesso) $\emptyset \neq \gamma^{-1}(O_1) \cap \gamma^{-1}(O_2) = \gamma^{-1}(O_1 \cap O_2) \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, ovvero X é connesso.

Teorema del valore intermedio. Siano X, Y spazi metrici, $f \in C(X, Y)$.
(i) X connesso per archi $\Rightarrow f(X)$ connesso per archi,
(ii) X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso.
In particolare, se X é connesso e $f \in C(X, \mathbf{R})$, allora $f(X)$ é un intervallo.

Prova di (i). Se $y_i = f(x_i), i = 0, 1$, $\gamma \in C([0,1], X)$ tale che $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$, allora $\eta := f \circ \gamma \in C([0,1], f(X))$, $\eta(0) = y_0$, $\eta(1) = y_1$.
(ii) $f(X) = O_1 \cup O_2$ aperti $\quad \Rightarrow \quad X = f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) \quad \Rightarrow \emptyset \neq = f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = f^{-1}(O_1 \cap O_2) \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

COMPLEMENTI E ESERCIZI
Spazi metrici, normati

Esempi di insiemi aperti, chiusi.

Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ allora

$$\{x: \ f(x) < c\} = f^{-1}(-\infty, c) \quad e \quad \{x: \ f(x) > c\} = f^{-1}(c, +\infty)$$

preimmagini di intervalli aperti, sono aperti per ogni $c \in \mathbf{R}$.

Poi $\{x: \ f(x) = c\} = \partial\{x: \ f(x) > c\} = \partial\{x: \ f(x) < c\}$. In particolare: la palla 'aperta' $B_r(x_0) := \{x: \quad d(x, x_0) < r\}$ e $\{x: \quad d(x, x_0) > r\}$ sono insiemi aperti e quindi la palla 'chiusa' $\overline{B_r(x_0)} := \{x: \quad d(x, x_0) \leq r\}$ é un insieme chiuso.

Esercizio 1. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Provare che $\overline{E} = E \cup \partial E$.
$(E \cup \partial E)^c = E^c \cap (\partial E)^c = E^c \cap [int\, E \cup int\,(E^c)] = E^c \cap int(E^c) = int(E^c)$ é aperto e quindi $E \cup \partial E$ é chiuso e quindi $\overline{E} \subset E \cup \partial E$.
Viceversa, sia $E \subset F$, F chiuso. Se $x \in \partial E \setminus E$ allora esiste $x_n \in E, x_n \to x$ e quindi $x \in F$ perché $x_n \in F$ ed F é chiuso. Dunque $E \cup \partial E \subset F$ e quindi $E \cup \partial E \subset \overline{E}$.

Esercizio 2. Provare che, se O é aperto in $\mathbf{R}^n$ e $\gamma \in C([0,1], \mathbf{R}^n)$ tale che $\gamma(0) \in O$ e $\gamma(1) \notin O$, allora esiste $t \in (0,1)$ tale che $\gamma(t) \in \partial O$.

Prova. $I := \{t \in [0,1] : \gamma(s) \in O \quad \forall s < t\}$ contiene, per continuitá, $t = 0$. Posto $\bar{t} := \sup I$, risulta $\gamma(\bar{t}) \in \partial O$. Intanto, $\gamma(\bar{t}) \notin O$ perché, altrimenti $\gamma(t) \in O$ per $t \in [\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ per un $\delta > 0$. Poi, $\gamma(t_n) \in O$ e $t_n < \bar{t}$ e quindi, se $t_n \to_n \bar{t}$, $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O}$. Dunque $\gamma(\bar{t}) \in \overline{O} \setminus O = \partial O$.

Esercizio 5. La chiusura di l^1 in l^∞ é $c_0 := \{x \in l^\infty | \quad x(n) \to_n 0\}$.

Infatti c_0 é chiuso perché se $x_j \in c_0$ e $\|x_j - x\|_\infty \to_j 0$ ovvero $\sup\limits_n |x_j(n) - x(n)| \leq \epsilon$ per $j \geq j_\epsilon$ allora

$$|x(n)| \leq |x(n) - x_{j_\epsilon}(n)| + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq 2\epsilon$$

se n é tale che $|x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon$ ovvero per tutti gli n abbastanza grandi e quindi $x \in c_0$. Ma se $x \in c_0$ e $x_j(n) := x(n)$ se $n \leq j$ e $x_j(n) = 0$ se $n > j$, allora $\|x - x_j\|_\infty = \sup\limits_{n>j} |x(n)| \to_j 0$.

Esercizio 5. Sia $e_i : j \to \delta_{ij}, i, j \in \mathbf{N}$. Sia X la varietá lineare generata dagli e_i. Provare che la chiusura di X in l^∞ é c_0.

Esercizio 6. Sia X come in 5. Provare che X é densa in l^p per ogni p.

Infatti, se $x \in c_0$, sia $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$. Allora $\|x - x_n\|_\infty = \sup\limits_{j>n} |x(j)| \to_n 0$. Poi, dato $x \in l^p$, se $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$, allora $\|x - x_n\|^p = \sum_{j>n} |x(j)|^p \to_n 0$.

Una caratterizzazione della (sequenziale)-compattezza

PROPOSIZIONE

Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. L'insieme K é compatto sse da ogni ricoprimento aperto di K, $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in \mathcal{A}$, si puó estrarre un sottoricoprimento finito, cioé

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \quad \textit{tali che} \quad K \subset \bigcup_{j=1,\ldots,l} O_{\alpha_j}$$

Prova.

Sufficenza. Basta provare che la proprietá del ricoprimento finito implica che K é chiuso e limitato. Limitatezza: siccome $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, ove D_i é la palla di raggio $i \in \mathbf{N}$ e centro l'origine, $K \subset D_{\hat{i}}$ per qualche $\hat{i}$. Per provare che K é chiuso, supponiamo che non lo sia: esiste $x_k \in K$, $\hat{x} \notin K$ con $x_k \to_k \hat{x}$. Siccome $K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ si ha che

$K \subset \bigcup\limits_k \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} = \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ e quindi $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} =$ $= \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{N}\}$. Ma $x_k \in K$ e $\|x_k - \hat{x}\| < \frac{1}{N}$ se k é grande.

Necessitá . Premettiamo un

Lemma.

(i) Ogni aperto in $\mathbf{R}^n$ é unione numerabile di palle aperte (o chiuse)

(ii) Se O_α sono sottinsiemi aperti in $\mathbf{R}^n$, esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha = \bigcup\limits_j O_{\alpha_j}$ *(da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento numerabile).*

Prova del Lemma

(i) Se $\mathcal{B}_O := \{B_r(x) \subset O : \quad r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}$, $\mathcal{B}_O$ é numerabile. É $O = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}_O} B$. Infatti, dato $x \in O$, siano $r \in \mathbf{Q}^+, \xi \in \mathbf{Q}^n$ tali che $B_{2r}(x) \subset O$ e $\xi \in B_r(x)$. Allora $x \in B_r(\xi) \subset B_{2r}(x) \subset O$.

(ii) Sia $\mathcal{B} := \{B_r(x) : \quad r \in \mathbf{Q},\ x \in \mathbf{Q}^n,\ B_r(x) \subset O_\alpha \text{ per qualche}\, \alpha\}$. $\mathcal{B}$ é famiglia numerabile di palle aperte, che si puó quindi indicare come $\{B_j : j \in \mathbf{N}\}$. Come sopra, $\cup_\alpha O_\alpha = \bigcup\limits_j B_j$. Sia, per ogni j, α_j tale che $B_j \subset O_{\alpha_j}$. Allora

$$\cup_\alpha O_\alpha \subset \cup_j B_j \subset \cup_j O_{\alpha_j} \subset \cup_\alpha O_\alpha$$

Prova della necessitá. Dal Lemma (ii) sappiamo che possiamo supporre $\mathcal{A} = \mathbf{N}$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $k \in \mathbf{N}$ esista $x_k \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} O_i$. Sia $x_{k_j} \to_j x \in K$. Siccome $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} O_i$, esiste k_0 tale che $x \in O_{k_0}$ e quindi $x_{k_j} \in O_{k_0}$ per j grande, mentre $x_{k_j} \notin O_i$ se $i \leq k_j$.

NOTA.
La sufficenza si puó anche provare usando la proprietá 'duale' a quella del ricoprimento: F_j chiusi tali che $\cap_{j=1}^{m} F_j \neq \emptyset \quad \forall m \quad \Rightarrow \quad \cap_{j=1}^{\infty} F_j \neq \emptyset$. Questa infatti implica che, se $x_n \in K \quad \forall n \in N$, allora $Ad(x_n) \neq \emptyset$. Ma allora, *in qualsiasi spazio metrico* la proprietá del ricoprimento finito assicura la compattezza sequenziale.

Viceversa, la proprietá del ricoprimento finito segue, in $\mathbf{R}^n$, dalla compattezza sequenziale via il Lemma. Siccome si puó dimostrare che uno spazio metrico compatto ha le proprietá del Lemma, si puó concludere che 'compattezza sequenziale' e proprietá del ricoprimento finito' sono equivalenti in ogni spazio metrico.