AM210 2014-15: Tracce delle lezioni- VII Settimana

ESEMPI DI DERIVAZIONE DI FUNZIONI COMPOSTE

1. Dalla regola della catena: $\gamma : (a,b) \to \mathbf{R}^n, \quad f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di classe $C^1 \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\, \frac{d\gamma_j}{dt}(t) \;=< \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) >$$

Rivediamo la dimostrazione in questo caso: dalla differenziabilitá di γ, f segue che

$$h(\tau) := \gamma(t+\tau) - \gamma(t) = \tau\dot\gamma(t) + \circ_\gamma(\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{h(\tau)}{\tau} \to_{\tau\to 0} \dot\gamma(t)$$

$$\frac{f(\gamma(t+\tau)) - f(\gamma(t))}{\tau} = \frac{f(\gamma(t) + h(\tau)) - f(\gamma(t))}{\tau} = \frac{< \nabla f(\gamma(t), h(\tau) > + \circ_f(\|h\|)}{\tau}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{\tau\to 0} \frac{f(\gamma(t+\tau)) - f(\gamma(t)}{\tau} \;=< \nabla f(\gamma(t), \dot\gamma(t) >$$

perché $\quad \frac{\circ_f(\|h\|)}{\tau} = \frac{\circ_f(\|h\|)}{\|h\|}\frac{\|h\|}{\tau} \to_{\tau\to 0} 0.$

NOTA $\quad$ Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ e sia $\gamma \in C^1((0,1), \mathbf{R}^2)$.

$$f(\gamma(t)) = 1 \;\forall t \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad < \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) >= 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

Tale proprietá si descrive dicendo che 'se γ é contenuta su di una superfice di llivello di f allora in ogni $x = \gamma(t)$ si ha che: $\dot\gamma$ é ortogonale a $\nabla f(x)$.

2. Se $g = (g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_p(x_1,\dots,x_n))$ é in $C^1(\Omega)$, Ω aperto di $\mathbf{R}^n$, ed e_j é base canonica in $\mathbf{R}^n$, allora

$\gamma^j : t \to g(x + te_j)$ $\quad$ é cammino differenziabile e $\quad \dot\gamma^j_l(0) = \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x), \qquad l = 1,\dots,p$

Ricordiamo: $\frac{\partial g}{\partial x_j} = (\frac{\partial g_1}{\partial x_j},\dots,\frac{\partial g_p}{\partial x_j})$. $\quad$ Da 1.), se $f = f(y_1,\dots,y_p) \in C^1(\mathbf{R}^p, \mathbf{R})$, segue:

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} f(g(x+te_j))_{t=0} \;=< \nabla f(g(x)), \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) > \sum_{l=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial y_l}(g(x))\, \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(x)$$

3. Deriviamo da 1. e 2. la regola della catena: se $g \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^p), \Omega$ aperto in $\mathbf{R}^n, g(\Omega) \subset O, O$ aperto in $\mathbf{R}^p$ ed $\quad f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$, allora $\quad f\circ g \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m) \quad$ e

$$J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x))\, J_g(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Infatti, l'elemento di posto i,j della matrice $J_{f\circ g}(x)$, dato da $\frac{\partial(f_i\circ g)}{\partial x_j}$ é uguale a $< \nabla f_i(g(x)), \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) >$ che é appunto l'elemento di posto i,j della matrice prodotto $J_f(g(x))\, J_g(x)$, giacché la $i-$esima riga di $J_f(g(x))$ é $\nabla f_i(g(x))$ mentre la j-esima colonna di $J_g(x)$ é $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

Il TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sia O aperto convesso in $\mathbf{R}^n$ (i.e. $x, y \in O,\ t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad tx + (1-t)y \in O$). Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$. Allora

$$|f(u) - f(v)| \ \le \ ||u - v|| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u-v))\| \qquad \forall\, u, v \in O$$

Infatti
$$|f(u) - f(v)| \ = \ |\int_0^1 [\frac{d}{dt} f(v + t(u-v))]\ dt| \ =$$

$$|\int_0^1 < \nabla f(v + t(u-v)), u - v > \ dt| \ \le \ ||u - v|| \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u-v))\|$$

Corollario 1 Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso. Allora

$$\nabla f(u) \ = \ 0 \ \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{ cost. } \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Il teorema del valor medio implica che f é *localmente costante in O* :

$$x \in B_r(x_0) \subset O \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| \le \sup_{\|x - x_0\| < r} \|\nabla f(x)\| = 0$$

In particolare, se $x_0 \in O$, $\{x \in O : \ f(x) = f(x_0)\}$ é aperto. Ma, per la continuitá di f, é aperto anche $\{x \in O : \ f(x) \ne f(x_0)\}$. Siccome O é connesso, e

$$O = \{x \in O : \ f(x) = f(x_0)\} \cup \{x \in O : \ f(x) \ne f(x_0)\} \text{ (unione disgiunta)}$$

concludiamo che uno dei due aperti, ovviamente $\{x \in O : \ f(x) \ne f(x_0)\}$, é vuoto .

Corollario 2. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f é **localmente Lipschitziana** in O:

$$\forall \ \overline{B}_r(x_0) \subset O, \exists L = L(r, x_0) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Prova. Intanto, dal Teorema del valor medio

$$|f_i(x) - f_i(y)| \le \sup_{z \in \overline{B}_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\| \quad \|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Quindi, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \le \quad \|x - y\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right| \right]^2$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $\quad f \in C^1(O,\mathbf{R}), \quad O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se esistono $\quad f_{x_i x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_{x_j}\right)$ allora

$$f_{x_i x_j} = \partial_{x_i}\left(\partial_{x_j} f\right) = \partial_{x_i x_j} f = \partial_{x_i} f_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i,j = 1,\dots,n \quad \textit{sono}$$

le derivate seconde di f e $\quad H_f(x) := \left(f_{x_i x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$ é la *matrice Hessiana*

Osservazione. Sia $n = 2$. Per definizione, e se i limiti indicati esistono,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)}{hk}\right]$$

Ció suggerisce che risulti $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (quando entrambe esistano). Puó peró accadere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ esistano ma siano diverse perché *due successivi passaggi al limite non si possono in generale scambiare* (vedi Appendice). Peró....

Definizione. $\quad f \in C^2(O) \quad \Leftrightarrow \quad f_{x_i x_j}$ *esistono in* O *e* $f_{x_i x_j} \in C(O),\ \forall i,j$

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i,j = 1,\dots,n, \quad \forall x \in O$$

Prova. Sia $n = 2$, $\quad (x_0-\delta, x_0+\delta)\times(y_0-\delta, y_0+\delta) \subset O$. Una ripetuta applicazione del Teorema Fondamentale del Calcolo dice che

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y}[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}](s,t)dt\right)ds = \int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,y_0)\right]ds = f(x,y) - f(x_0,y) -$$

$$-f(x,y_0) + f(x_0,y_0) = \int_{y_0}^{y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,t)\right]dt = \int_{y_0}^{y}\left(\int_{x_0}^{x}[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}](s,t)ds\right)dt$$

Da qui, $\quad \partial_y f_x = \partial_y \partial_x \int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y} \partial_y f_x(s,t)dt\right)ds = \partial_y \partial_x \int_{y_0}^{y}\left(\int_{x_0}^{x} \partial_x f_y(s,t)dt\right)ds =$ $\partial_y \int_{y_0}^{y} \partial_x f_y(x,t)\, dt = \partial_x f_y.$

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;<\nabla f(u)\,,\, h>\; + \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h> \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u + th)$, é

$$\varphi(0) \;=\; f(u), \quad \varphi(1) \;=\; f(u+h), \qquad \frac{d\varphi}{dt}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th)h_j \;=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\;\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u+th)h_i h_j \;\;=< H_f(u \;+\; t\,h)\,h,\; h>$$

Ma $\quad \varphi(1) \;=\; \varphi(0) \;+\; \varphi'(0) \;+\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt \quad$ e quindi

$$f(u+h) \;-\; [\;f(u) \;+ < \nabla f(u)\,,\, h> \;+ \frac{1}{2} < H_f(u)h, h>] =$$

$$\int_0^1 (1-t) \;\; < \;[H_f(u+th) \;-\; H_f(u)]\,h, h> \;\; dt$$

Stima del resto: $\quad \forall \epsilon > 0 \;\exists \delta_\epsilon > 0 : \; |t| \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \Rightarrow$

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right]\; h_i h_j \;| \;\le n^2 \epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \;\Leftrightarrow\; \exists \delta > 0 : \;\; f(u) \le f(v) \;\; \forall v \in D_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora
(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \;=\; 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)
(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\; h> \ge\; 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n$, $|t| \le \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \le f(u+th) \quad \Rightarrow$
$0 \;=\; \frac{d}{dt}\, f(u+th)_{|t=0} \;=< \nabla f(u), h> \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \;=\; 0.$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\nabla f(u) = 0, \quad 0 \leq f(u+th) - f(u) =$

$$\nabla f(u) + t^2 [< H_f(u)\, h,\ h > + \circ(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\ h,\ h > \geq 0$$

Una condizioni sufficente. Sia $f \in C^2(D_r(u))$, e $\nabla f(u) = 0$:
$< H_f(u)\, h, h > > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u$ é minimo locale

Prova. $h \to < H_f(u)h, h >$ continua, $< H_f(u)h, h > > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \ \Rightarrow$

$$\exists\, m := \ \min_{\|h\|=1} < H_f(u)\, h, h > > 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \geq m\, \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$. Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| << 1 \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) = \|h\|^2 \ [< H_f(u)\, \frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} > + \circ(1)] \geq \|h\|^2\ [m + \circ(1)] > 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \ f(u) \geq f(v) \ \ \forall v \in D_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(D_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(D_r(u))$, allora $< H_f(u)h, h > \leq 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(D_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\ h \neq 0$$

Forme quadratiche La natura di un punto stazionario $u = (x_1, \ldots, x_n)$ di f dipende dal segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \qquad\qquad h = (h_1, \ldots, h_n)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Il segno forma quadratica dipende dal segno degli autovalori.

Sia $\mathcal{A}$=$(a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}$=$\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ h, h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n \qquad\qquad \text{si dice}$$

definita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > > 0\ (< 0),\ \forall\, h \neq (0,0)$
semidefinita positiva (negativa) se $< \mathcal{A}\ h,\ h > \geq 0\ (\leq 0),\ \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$\lambda_1 = \inf\limits_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\, h, h >$ $\qquad\qquad$ $\lambda_n = \sup\limits_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\, h, h >$

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0$ ($\lambda_n < 0$)

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0$ ($\lambda_n = 0$)

APPENDICE

Lemma di Schwartz: una osservazione ed idea della prova ($n = 2$). Per definizione $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ esistono se e solo se esistono i limiti

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0}\frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)] =$$

$$= \lim_{k\to 0}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)}{hk}\right]$$

Inoltre, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ se e solo se i due limiti sono uguali.

Ció suggerisce che, in generale, risulti $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (quando entrambe esistano), ma che possa anche accadere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ esistano entrambe ma siano diverse perché *due successivi passaggi al limite non si possono in generale scambiare.* Ad esempio, se

$$r(h,k) := \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} \qquad \forall (h,k) \neq (0,0) \qquad \text{si ha}$$

$$\lim_{h\to 0}[\lim_{k\to 0}\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}] = \lim_{h\to 0} 1 = 1, \qquad\qquad \lim_{k\to 0}[\lim_{h\to 0}\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}] = \lim_{k\to 0}(-1) = -1$$

Notiamo che f non ha limite per (h,k) tendente a zero; ma é viceversa vero che se esistono $\lim\limits_{k\to 0} q(h,k)$ $\forall h$, e $\lim\limits_{k\to 0} q(h,k)$ $\forall k$ allora

$$\exists \quad l := \lim_{h^2+k^2\to 0} q(x,y) \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \lim_{h\to 0}[\lim_{k\to 0} q(h,k)] \quad e \quad \lim_{k\to 0}[\lim_{h\to 0} q(x,y)]$$

(e sono ovviamente uguali ad l) giacché

$$|q(h,k)-l| \le \epsilon \quad per \quad |h|+|k| \le \delta \quad \Rightarrow$$

$$|\lim_{k\to 0} q(h,k)-l| \le \epsilon \quad per \quad |h| \le \delta, \quad |\lim_{k\to 0} q(h,k)-l| \le \epsilon \quad per \quad |h| \le \delta$$

Una prova del Lemma di Schwartz. Posto

$$q(h,k) := \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y)}{hk}$$

si ha che

$$q(h,k) \to_{h\to 0} \frac{f_x(x,y+k)-f_x(x,y)}{k}, \quad q(h,k) \to_{k\to 0} \frac{f_y(x+h,y)-f_y(x,y)}{h}$$

Basta dunque provare che $\exists \lim_{h^2+k^2\to 0} q(h,k)$. In effetti si ha

$$\lim_{h^2+k^2\to 0} \left| q(h,k) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| =$$

$$= \lim_{h^2+k^2\to 0} \left| \frac{1}{hk}\int_x^{x+h} [f_x(t,y+k)dt - f_x(t,y)]\, dt - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| =$$

$$= \lim_{h^2+k^2\to 0} \left| \frac{1}{hk}\int_x^{x+h} \left[\int_y^{y+k} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(t,\tau) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) d\tau \right] dt \right| = 0$$

Lemma di Schwartz: un controesempio. Vediamo un esempio in cui l'invertibilitá nell'ordine di derivazione non vale. Sia

$$g(x,y) := xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{e, quindi,} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^5-y^4x-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Si vede subito che g, g_x, g_y hanno limite zero in $(0,0)$, e quindi g ha un prolungamento C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$. Poi, in $(0,0)$, troviamo $g_{xx} = g_{yy} = 0$ e

$$[\tfrac{\partial}{\partial y}\tfrac{\partial g}{\partial x}](0,0) = \lim_{y\to 0} \tfrac{1}{y}\tfrac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -1 \quad \text{mentre} \quad [\tfrac{\partial}{\partial x}\tfrac{\partial g}{\partial y}](0,0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x}\tfrac{\partial g}{\partial y}(x,0) = 1$$

Coerentemente, g non é di classe C^2. Infatti

$$\tfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = \tfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{non é continua in } (0,0), \text{ perché}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,0) = -1 \quad \forall x \ne 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(0,y) = 1 \quad \forall y \ne 0$$

ESERCIZI E COMPLEMENTI

1. Lipschitzianitá sui compatti

Se $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ allora f é Lipschitziana sui compatti di O :

$$\forall K \subset O \text{ compatto } \ \exists L = L(K) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in K$$

Prova 1. Supponiamo il contrario:

$$\text{esiste } K \text{ ed esistono } x_j, y_j \in K \text{ tali che } \qquad \tfrac{\|f(x_j)-f(y_j)\|}{\|x_j-y_j\|} \to_j \infty.$$

Siccome f é limitata in K, dovrá risultare $\|x_j - y_j\| \to_j 0$. Passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che

$$\exists \bar{x} \in K : \quad x_j \to_j \bar{x}, \quad y_j \to_j \bar{x}, \quad \frac{\|f(x_j) - f(y_j)\|}{\|x_j - y_j\|} \to_j \infty$$

contraddicendo la Lipschitzianitá in $B_r(\bar{x})$ per qualche $r > 0$.

Prova . Siccome $x, y \in K, \|x - y\| \geq r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|} \leq \frac{2}{r} \sup_{z \in K} \|f(z)\|$, basta provare che

$$\exists r > 0, \quad L > 0 : \quad x', x'' \in K, \quad \|x' - x''\| \leq r \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$

Dalla compattezza di K segue che

$$\exists x_j \in K, \ r_j > 0, \ j = 1, \ldots, p \quad \text{tali che} \quad \overline{B}_{r_j}(x_j) \subset O \quad \text{e} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{r_j}{2}}(x_j).$$

Per quanto sopra,

$$\exists L_j > 0 : \quad x', x'' \in K \cap \overline{B}_{r_j}(x_j) \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L_j\|x' - x''\|$$

Sia $0 < r \leq r_j \forall j$, $L := max L_j$. Se $x', x'' \in K, \|x' - x''\| \leq \frac{r}{2}$ e, diciamo, $x' \in B_{\frac{r_j}{2}}(x_j)$ si ha quindi che

$$\|x'' - x_j\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r_j}{2} \leq r_j \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \leq L\|x' - x''\|$$

2. Campi conservativi. Una $F \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ si chiama anche 'campo vettoriale' in $\mathbf{R}^n$. Tale 'campo' si dice conservativo se

$$\exists U \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) : \quad F = \nabla U$$

Tale U, se esiste, é anche unica (a meno di una costante additiva), e si chiama **'potenziale'** del campo F. L'unicitá sussiste anche nel caso $F \in C(O, \mathbf{R}^n)$, O aperto connesso di $\mathbf{R}^n$. Se $n = 1$, ogni F ammette potenziale (ovvero una primitiva). Dal Lemma di Schwartz segue che ció non é piú vero, in generale, se $n \geq 2$:

$$F \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), \quad F(x) = \nabla U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

Tale condizione é anche sufficente per l'esistenza *locale* : se $O = B_r(0) \subset \mathbf{R}^2$ (piú in generale, se O é *semplicemente connesso*) e vale $(*)$ in B_r, allora:

$$U(x,y) := \int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt \quad \Rightarrow \quad U_x = F_1, U_y = F_2$$

Infatti, $U_y = F_2(x,y)$ (TFC) e, 'derivando sotto segno di integrale'

$$U_x = F_1(x,0) + \int_0^y \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,t)dt =$$

$$F_1(x,0) - \int_0^y \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,t)dt = F_1(x,0) + F_1(x,y) - F_1(x,0)$$

3. Il laplaciano in coordinate polari. Sia $f \in C^2(\Omega)$, $\quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto.

$$\text{Laplaciano di} f : \qquad \Delta f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sia $n = 2$. Sia $g(\rho, \theta) := f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$ (g é f in coordinate polari). Allora

$$(\Delta f)(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho}$$

Infatti, risulta $\quad g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$

$$g_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\sin^2\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \left[f_{xx}\sin^2\theta - 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{\rho}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \right]$$

Da $\quad f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = g_\rho \quad$ segue

$$g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho} = (f_{xx} + f_{yy})\,(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

4. Calcolare ΔU, ove $U(x,y) = \log(x^2+y^2)$, $\quad x^2+y^2>0$.

5. Sia $N \geq 3$. Sia $U(x) = \frac{1}{\|x\|^{N-2}}$, $\quad x \in \mathbf{R}^N$, $\quad \|x\| > 0$. Calcolare ΔU.

6. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare che

$$\exists c > 0 : \quad < H_f(x)h, h > \ \geq c\|h\|^2 \qquad \forall h \in \mathbf{R}^n \qquad \Rightarrow$$

$$\forall y \in \mathbf{R}^n \quad \exists! x \in \mathbf{R}^n : \quad \nabla f(x) = y$$

Prova. Fissati x, y, poniamo $\varphi(t) :=< \nabla f(tx + (1-t)y), x - y >$. É

$$\varphi'(t) \ = < H_f(tx + (1-t)y)\,(x-y), x-y > \geq \ c\,\|x-y\|^2$$

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y >= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \geq c\|x-y\|^2$$

Ció implica in particolare l'unicitá: $\quad \nabla f(x) = \nabla f(y) \Rightarrow \|x-y\| = 0$. $\quad$ Inoltre

$$f(x) \ = \ f(0) \ + \ \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt \ = \ f(0) \ + \ \int_0^1 < \nabla f(tx) - \nabla f(0) + \nabla f(0), x > dt \geq$$

$$f(0) + < \nabla f(0), x > + \frac{c}{2}\|x\|^2$$

e quindi per ogni fissato y la funzione $x \to f(x) - < x, y >$ é coerciva e continua e quindi ha un minimo globale. Dunque l'equazione $\nabla(f(x) - < x, y >) = 0$ ha soluzione, e cioé l'equazione $\nabla f(x) = y$ ha soluzione.

7. Massimi e minimi

7.1 $\quad$ Sia $\qquad f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$. $\qquad$ É

$$f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad\qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$$

$$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$$

Punti stazionari: $\quad (0,0)$, $\ (\pm 1, 0))$; $\ \det H(\pm 1, 0) > 0$, $\ \det H(0,0) < 0$; $(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $\ (0,0)$ é una sella.

7.2 Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Notiamo che

$$\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$$

e quindi $(0,0), (1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi

$$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3 \qquad \text{e quindi}$$

- $H_g(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_g(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo locale (e non assoluto, perché $\inf_{\mathbf{R}^2} = -\infty$)

8. Forme quadratiche Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,\ldots,n}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice $n \times n$ simmetrica. La forma quadratica associata é

$$< \mathcal{A}\ h,\ h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica $n \times n$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} \ < \mathcal{A}h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h >$$

Prova. Sia $\overline{h}$ di norma 1 tale che $m := < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >= \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}h, h >$.
Sia $f(h) = \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2} =< \mathcal{A}\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|} >$, $h \neq 0$ e quindi $f(\overline{h}) = \min_{h\neq 0} f(h)$ e quindi

$$0 = \frac{d}{dt} f(\overline{h}+th)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\left[\frac{< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > +t(< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h >) + t^2 < \mathcal{A}h, h >}{1 + 2t < \overline{h}, h > +t^2\|h\|^2}\right]_{|t=0} =$$

$$< \mathcal{A}h, \overline{h} > + < \mathcal{A}\overline{h}, h > -2 < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >= 2[< \mathcal{A}\overline{h}, h > - < \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} >< \overline{h}, h >]$$

$\forall h \in \mathbf{R}^n$perché $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$. Dunque

$$\mathcal{A}\overline{h} =< \mathcal{A}\overline{h}, \overline{h} > \ \overline{h} = m\overline{h}$$

cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, ed é necessariamente il piú piccolo, giacché

$$\mathcal{A}h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow \ \lambda \ =< \mathcal{A}h, h > \geq \ m$$