UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Lucia Amer

Il problema di Waring

Relatore
Prof. Andrea Bruno

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
LUGLIO 2002

Classificazione AMS: 11P05
Parole Chiave : Problema di Waring.

Nel 1770 il matematico inglese Edward Waring pubblicò sul suo *Meditationes Algebricae* la seguente affermazione, meglio nota nella storia della matematica come congettura o problema di Waring:

> *Ogni intero positivo è somma di quattro quadrati, nove cubi, diciannove potenze quarte e così via.*

E' molto improbabile che Waring avesse sufficienti argomentazioni per giustificare la sua affermazione, infatti solo nel 1909 David Hilbert diede la prima dimostrazione della seguente congettura:

> *Per ogni intero $k > 0$, esiste $s = s(k)$ intero > 0, dipendente solo da k, tale che ogni intero positivo può essere scritto come somma di s potenze k-esime di interi non negativi.*

Per ogni $k > 0$ fissato, definiamo ***g(k)*** come il più piccolo valore di s nel teorema appena citato.

La dimostrazione di Hilbert non è costruttiva e il teorema non dà una formula esplicita di $g(k)$.

Nel 1770 Lagrange diede la prima dimostrazione completa della congettura dei quattro quadrati, già formulata da Bachet nel 1621. Al raggiungimento di tale risultato contribuì la copiosa produzione di Fermat e soprattutto di L. Eulero, che svilupparono le idee determinanti, sfruttate con successo da Lagrange. Altri risultati comunque furono ottenuti riguardo alla scomposizione di un intero positivo in somma di quadrati. Eulero e Fermat provarono una congettura di A. Girard sugli interi somma di due quadrati, che enunciamo nel seguente

Teorema 1.7 *Sia $n = \ell^2 m$ un intero positivo ed m un intero privo di fattori quadratici. Allora n si scrive come somma di due quadrati di interi se, e soltanto se, per ogni p primo, tale che $p|m$, si ha $p = 2$ oppure $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Tra il 1798 e il 1850 Legendre, Cauchy e Dirichlet raccolsero i risultati ottenuti, indipendentemente, nella seguente caratterizzazione sugli interi somma di tre quadrati:

Teorema 1.12 *Sia n un intero positivo. Allora n può essere scritto come somma di tre quadrati di interi positivi se, e soltanto se, $n \neq 4^e(8h + 7)$, con e, $h \geq 0$ interi.*

Alla luce di tali possibilità risulta ***g(2)=4***.

La congettura sui cubi era basata probabilmente sul dato empirico di tabelle e lo stesso Waring ne compilò una in cui erano scomposti in somma di nove i cubi i primi 3000 interi positivi. Il primo tentativo di una dimostrazione costruttiva è dovuto a E. Maillet nel 1895. Egli riuscì a rappresentare ogni intero come somma di al più diciassette cubi.

Nel 1909, A. Wieferich provò che ***g(3)=9***, ma la dimostrazione non risultò corretta a causa di un errore numerico che ometteva dallo studio un ampio insieme di numeri. Bachmann nel 1910 fallì nel tentativo di sanare l'errore e ne commise a sua volta uno che influenzò le ricerche di Linnik. Infine Kempner, nel 1912, portò il contributo determinante alla dimostrazione di Wieferich. Da questi lavori emersero comunque risultati altrettanto importanti che portarono allo studio di un'altra quantità, denotata con $G(k)$ e definita come il più piccolo numero di potenze k-esime sufficiente a rappresentare tutti gli interi positivi, con la sola eccezione di un numero finito di essi. Infatti, L.E. Dickson provò che solo i numeri 23 e 239 richiedono nove cubi (cfr. Teorema 2.11), mentre Linnik trovò che solo un numero finito di interi positivi necessita di otto cubi, ossia che da un certo punto in poi, ogni intero può esprimersi come somma di al più sette cubi. Dunque $G(3) \leq 7$.

Alla luce dei Teoremi 1.7 e 1.12 e da teoremi classici, segue che $g(2) = G(2) = 4$ (cfr. Teorema 1.14).

Nel 1772, J.A. Eulero, figlio di Leonard Eulero, osservò che gli interi della forma $2^k - q$, dove $q = [(\frac{3}{2})^k]$, necessitavano di $I(k)$ potenze k-esime, fissando così il numero $I(k) = 2^k + q - 2$ come un limite inferiore per $g(k)$.

La speranza di determinare un'espressione per $g(k)$ si basò da allora sul tentativo di mostrare che $I(k)$ potenze fossero anche sufficienti.

Allora diremo che vale il *Teorema ideale di Waring per k*, se $g(k) = I(k)$. Tra il 1933 e il 1936, L.E. Dickson e Vinogradov diedero, in una serie di lavori, la soluzione del problema di Waring dimostrando il seguente

Teorema 3.2 *Sia* $3^k = 2^k q + r$, *con* $q = [(\frac{3}{2})^k]$ *e* $1 \leq r < 2^k$.
Se $k \geq 9$ *e*

$$r \leq 2^k - q - 3$$

allora $g(k) = I(k) = 2^k + q - 2$.

Inoltre, sempre Dickson provò che il caso $r = 2^k - q - 1$ non è mai possibile per ogni scelta di k (cfr. paragrafo 3.3.1 caso f)).

In verità il Teorema 3.2 era valido anche per gli esponenti $k = 7, 8$, ma in questi due casi le tecniche usate si discostavano dalle precedenti in quanto si prevedeva l'uso di tabelle. Negli stessi anni S.S. Pillai accertava la validità del Teorema 3.2 per $k \geq 8$ in modo del tutto indipendente dai colleghi e solo nel 1940 determinò il valore ideale ***g(6)=73***, mentre il valore ***g(5)=I(5)=37*** rimase sconosciuto fino al 1964, anno in cui J. Chen diede la dimostrazione definitiva.

Nel 1944 I. Niven utilizzerà le stesse tecniche di Dickson per provare il Teorema ideale qualora $r = 2^k - q - 2$. Nel 1942, R.K. Rubugunday aveva illustrato un diverso aspetto di tale studio, determinando i valori di k per cui $r \neq 2^k - q - 2$ e con lo stesso metodo dimostrava che il caso $r = 2^k - q$ non si realizza per alcun valore di k.

Si deve inoltre a Dickson e Vinogradov il risultato complementare che enunciamo nel seguente

Teorema 3.3 *Se $k \geq 9$ ed $r \geq 2^k - q$, posto $f = [(\frac{4}{3})^k]$, allora si ha*

$$\begin{array}{rclcl} g(k) & = & 2^k + q + f - 2 & \quad se \quad & 2^k = fq + f + q \\ g(k) & = & 2^k + q + f - 3 & \quad se \quad & 2^k < fq + f + q \end{array}$$

Effettuando un calcolo esplicito, Pillai verificò le ipotesi del Teorema 3.2 compilando una tabella con i valori 2^k, q, r per gli esponenti $4 \leq k \leq 100$, il cui limite superiore fu ampliato a 400 da Dickson per mezzo di considerazioni teoriche. Nel 1964, R.M. Stemmler estese la verifica fino a 200.000 e nel 1990 tale limite fu portato a 471.600.000 da Kubina e Wunderlich avvalendosi delle tecniche di Stemmler. Nel 1957 K. Mahler trovò una speciale applicazione al problema di Waring di un suo risultato sulle approssimazioni razionali di numeri algebrici.
Teorema 5.3 *Siano u,v interi tali che MCD(u,v)=1 e $2 \leq v < u$. Sia $\epsilon > 0$ un numero reale arbitrariamente piccolo. Posto y^* l'intero più vicino a $(\frac{u}{v})^k$, la disuguaglianza*

$$\left| \left(\frac{u}{v}\right)^k - y^* \right| < e^{-\epsilon k}$$

è soddisfatta al più da un numero finito di interi positivi k.

Mahler dimostra che la disuguaglianza $r > 2^k - q$ è possibile solo per un numero finito di valori dell'esponente k. Nonostante tale dimostrazione non sia costruttiva, in quanto non fornisce alcuna indicazione sui numeri k, alla luce dei dati sopra riportati si congettura che tale insieme sia vuoto.

Solo recentemente, nel 1986, Balasubramanian, Deshouillers e Dress annunciarono la dimostrazione che ***g(4)=I(4)=19*** completando la discussione sul problema di Waring.

La tesi è organizzata come segue:

Il Capitolo Preliminare è dedicato ai richiami di teoria delle congruenze e di teoria delle forme quadratiche ternarie di cui faremo largo uso nei primi due capitoli. Daremo inoltre la descrizione del problema di Waring, enunceremo il teorema di Hilbert e definiremo i numeri $g(k)$ e $G(k)$, incentrando sullo studio di $g(k)$ l'oggetto della nostra tesi.

Nel Capitolo 1 si affronta il problema della scomposizione di un intero positivo in somma di quadrati di interi positivi. Presenteremo le dimostrazioni dei risultati fondamentali di Fermat, Eulero e Lagrange che hanno come fine ultimo quello di provare che $g(2) = 4$. Daremo inoltre una caratterizzazione degli interi somma di due quadrati di interi e un teorema di Legendre-Dirichlet per la caratterizzazione degli interi somma di tre quadrati di interi positivi e concluderemo che $g(2) = G(2) = 4$.

Nel Capitolo 2 mostreremo come ogni intero positivo può essere scritto come somma di al più nove cubi di interi positivi e daremo un teorema di Dickson per cui $G(3) \leq 8$. In entrambe le dimostrazioni, la teoria è stata supportata dalla realizzazione di programmi in linguaggio Turbo Pascal sulla scomposizione di interi positivi in somma di cubi e di cui troveremo i listati in Appendice.

Il Capitolo 3 rappresenta la parte centrale della nostra tesi. Oggetto dello studio è la soluzione del problema di Waring, ossia la ricerca di un'espressione esplicita di $g(k)$, per ogni k.

Le prime considerazioni sono mosse da un'osservazione di J.A. Eulero sugli interi n della forma $2^k q - 1$, dove $q = [(\frac{3}{2})^k]$. Poiché

$$2^k q - 1 < 3^k,$$

il numero $2^k q - 1$ può essere rappresentato solo dalle potenze 1 e 2^k, cioè

$$n = (q-1)2^k + (2^k - 1)$$

è la rappresentazione di n in somma di potenze k-esime intere non negative, utilizzando il minor numero di potenze.

In questo modo per esprimere ogni intero > 0 come somma di potenze k-esime di interi non negativi, sono necessari almeno $I(k)$ termini, fissando

$$I(k) = 2^k + q - 2$$

e quindi $I(k) \leq g(k)$.

Per mostrare che $I(k)$ potenze sono anche sufficienti partiremo da un risultato asintotico di I. Vinogradov, basato su tecniche di teoria analitica dei numeri, che esula dagli scopi di questa tesi, e dal metodo dell'ascesa di L.E. Dickson. A partire dal numero di potenze k-esime che descrivono un intervallo finito di interi positivi, tale metodo consentirà di controllare il numero di potenze k-esime sufficienti a descrivere intervalli sempre più grandi di interi.

La combinazione di questo con il risultato di Vinogradov permetterà di passare dalla rappresentazione di intervalli finiti di interi, seppur molto grandi, alla rappresentazione di interi positivi maggiori di un intero L fissato.

Lo studio degli interi minori di L, che impegnerà la seconda parte del capitolo, riguarda essenzialmente il modo di rappresentare in somma di potenze k-esime gli intervalli finiti. Nonostante la tecnica adottata nelle dimostrazioni sia ricorrente, si presenteranno delle varianti a seconda della scelta di L. Tale scelta è legata al numero

$$3^k = 2^k q + r, \qquad q = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right], \qquad 1 \le r < 2^k$$

ed in particolare al resto r. A tale proposito divideremo la trattazione in due casi, qualora si assuma $r < 2^k - q$ oppure $r \ge 2^k - q$ ed in corrispondenza di ciascuno di essi andremo a studiare la validità del Teorema ideale.

I risultati relativi a questa parte fanno capo a vari articoli, di contenuto a volte oscuro su cui è stato pertanto eseguito un lavoro dettagliato di ricostruzione. In particolare, si è riscontrato talvolta come alcune stime numeriche di carattere elementare, siano state trattate con qualche superficialità; a supporto della teoria abbiamo verificato tali stime e realizzato tabelle per mezzo di programmi compilati il linguaggio Turbo Pascal che troveremo in Appendice.

Il Capitolo 4 è completamente dedicato allo studio del caso $r = 2^k - q - 2$, tralasciato da Dickson e risolto completamente da I. Niven, per cui andremo ad accertare che $g(k) = I(k)$. Saranno sfruttate le idee e le tecniche presentate nel Capitolo 3.

Un aspetto diverso di tale trattazione è dovuto allo studio di R.K. Rubugunday sui valori dell'esponente k per cui $r \ne 2^k - q - 2$. Avendo trovato difficoltà nel reperire fonti bibliografiche, abbiamo esposto l'idea su cui è incentrata la dimostrazione. Allo stesso modo Rubugunday prova che il caso $r = 2^k - q$ non si realizza per alcun valore di k.

Nel Capitolo 5 ci occupiamo degli interi k per cui potrebbe non valere la formula $g(k) = I(k)$, cioè il Teorema ideale di Waring: essi sono gli interi per cui $r > 2^k - q$. Dickson, Stemmler, Kubina-Wunderlich trovano che tali interi soddisfano $k \ge 471.600.000$.

Nel 1957 Mahler dimostra il seguente teorema

Teorema 5.3 *Siano u,v interi tali che MCD(u,v)=1 e* $2 \le v < u$. *Sia* $\epsilon > 0$ *un numero reale arbitrariamente piccolo. Posto* y^* *l'intero più vicino a* $(\frac{u}{v})^k$, *la disuguaglianza*

$$\left| \left(\frac{u}{v} \right)^k - y^* \right| < e^{-\epsilon k}$$

è soddisfatta al più da un numero finito di interi positivi k.

Se $r > 2^k - q$, si ha

$$0 < (q+1) - \left(\frac{3}{2}\right)^k < \frac{q}{2^k} < \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Ponendo $u = 3$, $v = 2$, $\epsilon = \log \frac{4}{3}$, $n = k$, nel Teorema 5.3, risulta che solo per un numero finito di k può non valere $r < 2^k - q$. Le ricerche finora effettuate portano a congetturare che in effetti non esista k per cui non valga $r < 2^k - q$ e dunque che il Teorema ideale di Waring sia valido per ogni $k \geq 3$.

Raccogliamo in queste tabelle un resoconto sulla famiglia di casi del Teorema ideale.

$k = 2$	$g(2) = 4$	Lagrange, 1770
$k = 3$	$g(3) = I(3) = 9$	Wieferich-Kempner, 1912
$k = 4$	$g(4) = I(4) = 19$	Balasubramanian, 1986
$k = 5$	$g(5) = I(5) = 37$	Chen,1964
$k = 6$	$g(6) = I(6) = 73$	Pillai, 1940

$k \geq 7$ e $r \leq 2^k - q - 3$	$g(k) = I(k) = 2^k + q - 2$	Dickson, 1936
$k \geq 8$ e $r \leq 2^k - q - 3$	$g(k) = I(k) = 2^k + q - 2$	Pillai, 1936
$k \geq 7$ e $r = 2^k - q - 2$	$g(k) = I(k) = 2^k + q - 2$	Niven, 1944

$k \geq 7$ $r > 2^k - q$ $2^k = fq + f + q$	$g(k) = I(k) + f$	Dickson, 1936
$k \geq 7$ $r > 2^k - q$ $2^k < fq + f + q$	$g(k) = I(k) + f - 1$	Dickson, 1936

Non esiste k tale che $r = 2^k - q - 1$	Dickson, 1936
Non esiste k tale che $r = 2^k - q$	Rubugunday, 1942

Riferimenti bibliografici

[1] Bachmann P., *Niedere Zahlentheorie*, vol.2 (1910), pp. 477-8.

[2] Baer W.S., *Beiträge zum Waringschen Problem*, Dissertation, Göttingen, (1913).

[3] Dickson, L.E., Simpler proofs of Waring's theorem on cubes, with various generalizations, *Trans. Amer. Math. Soc.* vol.30 (1928), pp. 1-7.

[4] Dickson, L.E., *History of the Theory of Numbers, vol.2*, Carnegie Institute.

[5] Dickson, L.E., All integers except 23 and 239 are sum of 8 cubes, *Bull. Amer. Soc.* vol.45 (1933), pp. 588-591.

[6] Dickson, L.E., Proof of the ideal Waring theorem for exponents 7-180, *Amer. J. Math.*, vol 58 (1936), pp. 521-529.

[7] Dickson, L.E., Solution of Waring's problem,*Amer. J. Math.*, vol.58 (1936), pp. 530-535.

[8] Dickson, L.E., *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol.39 (1933), pp. 701-711.

[9] Dickson, L.E., The Waring problem and its generalizations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v.42 (1936), pp. 833-837.

[10] Fontana M., *Teoria delle congruenze*, Appunti del Corso di Introduzione alla Teoria dei numeri.

[11] Hardy G.H., Wright E.M., *Introduction to the Theory of numbers*, Clarendom Press, Oxford, (1960).

[12] Landau , *Elementary number theory*, Chelsea, New York, (1966).

[13] Mahler K., On the fractional part of the powers of a rational number (II), *Mathematika*, vol.4 (1957), pp. 112-124.

[14] Niven I., An unsolved case of the ideal Waring, *Amer. Journal of Math.*, vol.66 (1944), pp. 137-143.

[15] Ridout D., Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, vol.4 (1957), pp. 125-131.

[16] Rubugunday R.K., On $g(k)$ in Waring's problem, *Journal Indian Math. Soc. (2)*, vol.6 (1942), pp. 192-198.

[17] Stemmler R.M., The Ideal Waring Theorem for Exponents 401-200.000, *Math. Comp*, vol.18 (1964), pp. 144-146.

[18] Vinogradov I., *Annals of Mathematics*, vol.36 (1935), pp. 395-405.

[19] Wieferich A., *Matematische Annalen*, vol.66 (1909), pp. 95-101.