UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di

Adriana Raja

La Geometria Euclidea nell'opera di Saccheri

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

Maggio 2006

Classificazione AMS: 51-01, 01A05
Parole chiave: Quinto postulato, Saccheri, disco di Poincaré

Sintesi.

Di Euclide come persona sappiamo poco, Proclo scrisse che fu il più giovane dei discepoli di Platone e più vecchio di Archimede quindi possiamo dedurre che scrisse *Gli Elementi* intorno al 300 a.C.. Visse sicuramente ad Alessandria d'Egitto, da non confondere con Euclide di Megara che visse un secolo prima e che fu un filosofo seguace di Socrate. Cercare l'originalità vera e propria degli *Elementi* è inutile perchè quest'opera riassume, coordina e sistema l'opera dei matematici predecessori, inoltre, essendo le prime copie manoscritte, era inevitabile che fossero leggermente diverse fra loro, poi con l'avvento della stampa, secolo XV, le varie edizioni furono talmente numerose da essere superate solo dalla Bibbia. *Gli Elementi* sono sostanzialmente un trattato organico sulle parti fondamentali della geometria e della aritmetica; sono suddivisi in 13 libri, dove i primi 6 riguardano la geometria piana, i successivi 3 la teoria dei numeri ed i restanti la geometria solida. Il libro inizia "brutalmente" con l'elenco degli elementi di partenza: 23 termini, 5 postulati e 5 nozioni comuni che possono essere interpretati rispettivamente come definizioni, proposizioni primitive e nozioni primitive. Poniamo l'attenzione sul quinto postulato che costituirà un problema per molti matematici nel corso dei successivi due millenni:

"Se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti".

Ad Euclide era già chiara la differenza sostanziale tra i primi quattro postulati e l'ultimo e fece lo sforzo di dimostrare il maggior numero di teoremi evitando di ricorrere al quinto postulato. Con le prime 28 proposizioni egli costruisce una specie di geometria non euclidea, nel senso che non si tratta di una geometria che nega il quinto postulato ma di una geometria assoluta che ne prescinde. Di seguito sono riportate le proposizioni fondamentali della teoria delle parallele con l'intento di mettere in evidenza il momento in cui emerge il quinto postulato, dando base a quella che da noi è conosciuta come geometria euclidea. Possiamo dire comunque che le prime proposizioni del libro I hanno un carattere introduttivo al punto da poter essere considerate una specie di prolungamento dei postulati; successivamente viene enunciato quello che comunemente chiamiamo "primo criterio di uguaglianza dei triangoli", in cui viene fatto uso del movimento, tecnica usata raramente da Euclide, e il "terzo criterio di uguaglianza dei triangoli" che quindi in Euclide appare al secondo posto. Seguono delle proposizioni fondamentali per la teoria delle parallele, per esempio la proposizione 16 in cui afferma che "in ogni triangolo, se si prolunga uno dei due lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti. Il significato rispetto alla teoria delle parallele è il seguente: se due rette AB e CA si incontrano in un punto A, cioè non sono parallele, esse tagliate da una trasversale BD, formano angoli corrispondenti (ABC e ACD) disuguali, segue che quando gli angoli corrispondenti sono uguali, le rette sono necessariamente parallele. La proposizione 17 invece può essere considerata un corollario immediato della precedente e costituisce un ruolo fondamentale anche per l'opera di Saccheri; essa afferma che "in ogni triangolo la somma dei due angoli, comunque presi, è minore di due retti".

Da questa segue la distinzione dei triangoli in rettangoli, ottusangoli ed acutangoli. Segue quello che comunemente chiamiamo "secondo criterio di uguaglianza dei triangoli" che appunto in Euclide occupa il terzo posto. Nelle proposizioni 27 e 28 si garantisce l'esistenza della parallela ad una retta condotta da un punto esterno, per arrivare con la proposizione 29 al punto in cui Euclide è costretto a far ricorso al quinto postulato. Dopo aver dato anche la definizione di parallelogramma, con le proposizioni finali Euclide si avvicina all'enunciazione delle formule che si trovano nei testi moderni, come per esempio il teorema di Euclide. Le critiche al lavoro svolto da Euclide non tardarono a venire nel mondo greco, infatti l'intenzione di molti studiosi era quella di trovare una dimostrazione per il quinto postulato e che quindi non era una realtà così evidente. Per quanto estremamente diversi fra loro, tutti questi vari tentativi possono sostanzialmente farsi rientrare in uno dei seguenti tre tipi:

1) assunzione di una definizione di rette parallele diversa quella euclidea;
2) sostituzione del quinto postulato con un'altra proposizione più intuitiva e quindi di più facile accettazione;
3) dimostrazione del quinto postulato come teorema, deducendolo dai quattro postulati rimanenti.

Introduciamo ora i più importanti tentativi di dimostrazione del quinto postulato: per quanto riguarda l'antichità, la nostra migliore fonte d'informazione è Proclo (411 d.C., 485 d.C.) che prima di presentare una propria personale proposta di soluzione riferisce nel suo *Commento al I libro di Euclide* vari tentativi di predecessori a cominciare da quello di Posidonio. Egli fu il primo studioso ad avere dei dubbi riguardo al quinto postulato ed impostò la propria ricerca su una particolare concezione del parallelismo secondo la quale due rette parallele quando appartengono allo stesso piano devono essere equidistanti ma ammettere ciò equivale ad introdurre un nuovo postulato aggirando l'ostacolo con una diversa definizione di rette parallele. L'intento di Posidonio era di riorganizzare la geometria euclidea depennando il quinto postulato dalla lista degli assiomi e ponendolo a teorema. Ma le due definizioni non sono forse equivalenti? Chiaramente Posidonio intendeva che lo fossero ed il successo di questa idea dipendeva dal fatto che la comunità accettasse o mettesse in dubbio questi due enunciati:

a) Se due rette sono equidistanti allora non si incontrano mai;
b) Se due rette non si incontrano mai allora sono equidistanti.

Naturalmente nessuno mette in dubbio l'affermazione a), per l'affermazione b), anche se sappiamo che due rette non si incontrano mai per quanto prolungate, non possiamo essere sicuri che la distanza fra loro non oscilli. Abbiamo quindi bisogno di dimostrare la b) ma il fatto che le rette siano equidistanti è la conseguenza della proposizione 34 di Euclide che nella dimostrazione dipende dal quinto postulato e che quindi non possiamo usare perché è quello eliminato da Posidonio. Quindi il quinto postulato è declassato a rango di teorema ed il suo posto è preso dall'enunciato b). La definizione di parallelismo di Posidonio fu ripresa da Giordano Vitale e Francesco Maria Franceschinis.

Tra i matematici che si proposero di dimostrare il quinto postulato ricordiamo: Gemino (I secolo a.C.) e Tolomeo il quale assumeva che "se due rette parallele sono tagliate da una trasversale, tutto ciò che vale per gli angoli interni da una parte deve necessariamente valere per gli angoli interni dall'altra".

Anche questo tentativo di "simmetrizzare" il problema conduce ad un enunciato che equivale al quinto postulato quindi il problema cambia forma ma non si sposta. Proclo fra gli autori classici è senz'altro il più autorevole; egli osserva che, essendo la proposizione inversa del postulato euclideo la diciassettesima, si rifiuta di assumere come postulato una proposizione la cui inversa è un teorema. Egli conclude mettendo come nuovo postulato: "la distanza fra due punti, presi su rette che si intersecano, può essere resa grande a piacere".

Da questo deduce il lemma secondo il quale una retta che incontra una di due rette parallele deve necessariamente incontrare anche l'altra. In questa dimostrazione introduce l'ipotesi che la distanza fra due rette parallele rimane finita e da questa deduce il postulato euclideo ma l'assunzione di questo nuovo postulato non è di certo più evidente. Anche commentatori arabi introdussero ipotesi od adottarono dimostrazioni talora geniali: ricordiamo l'opera di Al Narizi (IX secolo) che segue sostanzialmente il procedimento di Posidonio e l'originale tentativo di Nasir-Ed-Din. Di quest'ultimo abbiamo due asserti:

"Se due rette qualsiasi r ed s sono intersecate da altre linee rette in modo che siano sempre perpendicolari ad una di esse e seghino l'altra sempre con angoli disuguali, cioè da una parte sempre sotto angolo ottuso e dall'altra sempre sotto angolo acuto, allora queste rette sono da ritenere sempre più fra loro convergenti dalla parte degli angoli acuti e divergenti dalla parte degli angoli ottusi". L'altro asserto è il reciproco del primo, con queste ipotesi egli deduce

prima che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due retti e poi il quinto postulato. Durante il rinascimento ed il secolo XVII, le critiche al postulato euclideo iniziarono solo dopo che fu possibile disporre della versione latina dei *Commentari* di Proclo, di questo periodo ricordiamo soltanto alcuni nomi: Federigo Commandino che segue Proclo e Cristoforo Clavio, Francesco Patrici, Antonio Cataldi che seguono Nasir-Ed-Din.
Giovanni Alfonso Borelli invece scrisse l'*Euclides restitutus* in cui fa apparire il concetto di movimento ed il quinto postulato viene sostituito con l'assioma: "se un segmento si muove in un semipiano di bordo una retta data, con un estremo su tale retta e mantenendosi sempre perpendicolare a questa, allora l'altro estremo del segmento considerato descrive una seconda retta".
Uno dei più notevoli tentativi compiuti nel XVII secolo per dimostrare il postulato euclideo e quello di John Wallis che, considerata l'infruttuosità delle vie di molto predecessori fondata sul concetto di equidistanza, propose di sostituire il postulato euclideo con il seguente: "dato un segmento di retta, è sempre possibile costruire su di esso un triangolo simile ad un triangolo dato".
Il risultato di Wallis è il seguente: se esistono due triangoli simili non uguali allora vale il quinto postulato. Può risultare difficile immaginare come Wallis riuscisse a dedurre il quinto postulato da questo ma da un punto di vista logico il postulato di Wallis non è molto più lontano di quanto lo fosse quello di Posidonio. Gauss non ha pubblicato contributi chiari e precisi ma ha scritto solo alcune lettere ad amici matematici che si occupavano della questione, comunque l'enunciato gaussiano sostitutivo è: "è possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data".
Questo postulato è psicologicamente ancora più distante di quanto lo fosse quello di Wallis. Anche Hilbert con i *Grundelagen der Geometrie* (1899) si interessò ad una riorganizzazione della geometria. Da Euclide ad Hilbert c'è stato un lungo periodo di circa 2200 anni. Possiamo dire inoltre che il tenace rifiuto di trovare postulati sostitutivi per i matematici era perché essi erano

consci che qualunque postulato sostitutivo era equivalente a quello euclideo. Nel 1781 poi era stata pubblicata la *Critica della ragion pura* di Kant nel quale veniva esposte la famosa dottrina dello spazio e del tempo in cui queste potevano essere concepite arbitrariamente e quindi erano intuizioni pure. Kant non farà altro che sistemare filosoficamente una concezione che si era tramandata fin dall'antichità greca per quanto riguarda la natura della geometria come interprete fedele ed assoluto dello spazio fisico. Il vero problema si comincia ora a comprendere, cioè era quello di chiedersi se il quinto postulato fosse dimostrabile o no. Una volta liberati da preconcetti si giungerà appunto alla costituzione delle geometrie non euclidee, ossia a vedere che il quinto postulato non è una di molte possibili ipotesi.

Gerolamo Saccheri fu suo malgrado un precursore della geometria non euclidea, al punto da essere considerato un precursore di Lobachevskij. Scrisse l'*Euclides ab omni naevo vindicatus* pubblicato a Milano nell'anno della sua morte. In quest'opera egli accetta i primi quattro postulati di Euclide e le prime 28 proposizioni del libro I degli *Elementi* (geometria assoluta o neutrale) e tenta di dimostrare le conseguenze, per lui assurde, che si ottengono se non si ammette come vero il quinto postulato. Saccheri ne ottiene lucide ed articolate conseguenze che però gli giocano uno scherzo: nessuna di esse è una assurdità logica, sebbene egli, in conclusione, dichiari soddisfatto il contrario.

Egli pensò di dimostrare il quinto postulato *a contrariis*: sia questo postulato ciò che bisogna dimostrare, si assuma a punto di partenza la negazione di esso, se questa negazione nel corso del procedimento si distrugge da sé, essa risulterà falsa e quindi il quinto postulato vero. In conclusione pone a punto di partenza due ipotesi negative del quinto postulato che dimostrò inconsistenti solo perché non coerenti con l'impianto sistematico della stessa geometria euclidea. Saccheri prende le mosse dalla considerazione di una figura fondamentale: il quadrilatero birettangolare isoscele, ottenuto innalzando dagli estremi A e B della base AB due lati AD e BC uguali fra loro e perpendicolari alla base.

Dimostra innanzitutto che i due angoli in C e D sono uguali, $\gamma = \delta$ (prop. 1), nel caso che questi angoli siano a loro volta retti, siamo nell'ipotesi euclidea e se assumiamo che essi siano o entrambi acuti o entrambi ottusi, neghiamo implicitamente il quinto postulato di Euclide. Saccheri prende in esame le tre seguenti ipotesi relative agli angoli γ e δ:

1) Ipotesi dell'angolo retto : $\gamma = \delta = 90°$
2) Ipotesi dell'angolo ottuso : $\gamma = \delta > 90°$
3) Ipotesi dell'angolo acuto : $\gamma = \delta < 90°$

Fra le prime interessanti proposizioni che ricava dalla sua analisi, una è quella secondo cui, se si può dimostrare una di queste ipotesi, vera in un caso singolo, allora quella ipotesi vale per tutti i quadrilateri costruiti con le medesime condizioni (prop. 5,6,7). Come abbiamo già accennato prima, delle tre ipotesi sopra indicate, Saccheri si preoccupa di dimostrare l'assurdità delle ultime due e per quanto concerne l'ipotesi dell'angolo ottuso, sebbene il ragionamento di Saccheri non sia soddisfacente, tuttavia la conclusione è accettabile perché tale ipotesi è incompatibile con l'infinità della retta ammessa da Euclide ed accettata da Saccheri. Successivamente con la proposizione 8 dimostra che l'angolo esterno sarà uguale, minore o maggiore dell'interno opposto quando sia vera l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso od acuto. Nella proposizione 13 egli dimostra che il quinto postulato è vero nell'ipotesi dell'angolo retti ed ottuso affermando che in tale ipotesi, se la retta XA interseca AD ed XL e forma con esse angoli interni XAD e AXL con somma minore di due retti, allora tali due rette si incontreranno a distanza finita. Siamo giunti così alla proposizione 14 riguardante l'insostenibilità dell'ipotesi dell'angolo ottuso affermando che essa "distrugge se stessa". Infatti abbiamo dimostrato che nell'ipotesi dell'angolo ottuso la somma di due angoli acuti nel triangolo APX, rettangolo in P, è maggiore di un retto, risulta che si potrà prendere un angolo PAD tale che insieme ai predetti angoli acuti formi due retti. D'altra parte la retta AD dovrà ad un certo punto intersecare PL ed XL. Questo è assurdo e contrario ad

Euclide per la proposizione 17 che appunto afferma che in un triangolo la somma di due angoli comunque presi è minore di due retti. Inizia qui la battaglia contro l'ipotesi dell'angolo acuto ed il problema si presenta subito più complesso; sarà proprio in occasione di questa dimostrazione che Saccheri verrà meno a quel sottile rigore che aveva contraddistinto fin'ora la sua opera, concludendo alla fine che l'ipotesi dell'angolo acuto è falsa "perché ripugna la natura della retta". Ma vediamo nei particolari: nelle proposizioni 15 e 16 si dimostra che restano stabilite le ipotesi dell'angolo retto, ottuso od acuto a seconda che, in qualsiasi triangolo rettangolo (o quadrilatero), gli angolo siano insieme uguali, maggiori o minori di tre (quattro) angoli retti. Seguono altre proposizioni nelle quali si producono altre prove per distinguere l'ipotesi vera dalla falsa. Nelle proposizioni 23 e 25 Saccheri afferma che nell'ipotesi dell'angolo acuto si hanno tre possibilità per le coppie di rette nel piano:

1) sono incidenti;
2) non sono incidenti ed hanno una perpendicolare comune;
3) non sono incidenti e non hanno una perpendicolare comune.

Con quest'ultima si stabilisce l'esistenza di rette asintotiche (si potrebbe dire "parallele non euclidee") e si giunge nelle proposizioni 30, 31, 32 a risultati che possono essere presentati come segue:

nell'ipotesi dell'angolo acuto, nel fascio di rette per un punto, esistono due rette asintotiche ad una retta data che dividono le rette del fascio in due classi, alla prima appartengono quelle rette del fascio che incontrano la retta data, alla seconda quelle che hanno con essa una perpendicolare comune.

E' chiaro che se prendo le rette del fascio per A, ci sarà un limite massimo per cui le rette non intersecheranno più la retta data ed un limite minimo per cui le rette non intersecheranno più la retta data e non avranno una perpendicolare comune. Stabiliti questi teoremi Saccheri ha urgenza di concludere facendo slittare il suo ragionamento, finora rigoroso, su un piano intuitivo e di puro convincimento psicologico. Le considerazioni a proposito sono contorte e

spesso oscure ma nel complesso equivalgono all'affermazione che se l'ipotesi dell'angolo acuto fosse vera allora la retta a (retta data) e la retta p (retta asintotica) avrebbero una perpendicolare comune all'infinito. Secondo Saccheri quindi, le rette asintotiche, che si intersecano all'infinito avrebbero invece una perpendicolare comune in tale punto e questo è contrario alla natura della retta. Con ciò egli cade in errore, poiché estrapola all'infinito proprietà valide al finito, infatti non è evidentemente la stessa cosa, per due rette, avere in comune un punto ed avere in comune un punto all'infinito; nel primo caso le rette si tagliano, nel secondo caso si toccano ma non si tagliano. A questo punto Saccheri enuncia 5 lemmi che ci portano a dimostrare il principale assunto contro l'ipotesi dell'angolo acuto e conclude affermando: "che due linee rette si congiungano in una medesima linea retta non è meno ripugnante del fatto che una medesima linea retta si divida in due linee rette, contro il lemma secondo. Poiché è similmente contrario alla natura delle linee rette che due linee rette siano perpendicolari in un medesimo punto ad una qualunque terza retta, bisogna riconoscere come assolutamente falsa, perché ripugnante alla predetta natura, l'ipotesi dell'angolo acuto, secondo la quale le due rette AX e BX debbano essere perpendicolari in uno stesso punto X ad una certa terza retta che con loro giace nel medesimo piano. Può anche darsi che l'esistenza di rette asintotiche aventi questo particolare comportamento asintotico "ripugni la natura della linea retta" ma purtroppo questa non è una contraddizione. Il Saccheri stesso non fu soddisfatto di questa conclusione, tanto che cercò di dimostrare di nuovo l'insostenibilità della terza ipotesi ricorrendo ad una argomentazione fondata sul vecchio concetto di equidistanza ma in questo secondo approccio non ottenne alcun risultato interessante e che comunque aggiunga qualcosa ai meriti, peraltro grandissimi del Saccheri.
Siamo giunti al XVIII secolo, ossia il secolo dei veri e propri precursori delle geometrie non euclidee. Nella fase iniziale si dovettero superare difficoltà di natura sia psicologica che culturale perché le nuove geometrie venissero prese

in considerazione. L'opera del Saccheri suscitò indubbiamente largo eco fra i suoi contemporanei anche se cadde ben presto nella dimenticanza più assoluta. Viene comunque citata in vari trattati di Storia della matematica, come per esempio Heilbronner con la *Historia matheseos* e Montucla con la *Histoire des mathématiques*. Corrado Segre nel suo articolo *Congetture intorno all'influenza di Gerolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea* afferma che tutti coloro che tentarono vie assolutamente nuove nel campo delle parallele, cercarono di conoscere quanto di più importante si era scritto per dimostrare il quinto postulato. A tal fine un mezzo che si presentava spontaneo consisteva nel consultare una Storia delle matematiche. Segre ricorda che la *Histoire* era molto diffusa ed il Montucla in Francia era molto stimato quindi, per mezzo di questa Storia, l'opera del Saccheri deve essere passata sotto gli occhi di molti e molti. E' probabile che, per esempio Legendre, occupandosi di dimostrare il quinto postulato, non abbia tentato di conoscere quei pochi Autori citati dal Montucla? Secondo Segre si dovrebbero fare delle ricerche a Parigi per stabilire se Legendre conobbe l'opera del Saccheri. Va menzionata anche la dissertazione del Klugel, *Conatuum*, importante perché fu il primo ad avanzare qualche dubbio sulla dimostrabilità del quinto postulato. In quest'opuscolo, che ha quasi 30 pagine di testo, vengono analizzati lavori sulle parallele ma l'analisi più lunga (di quasi 5 pagine) è quella dell'opera di Saccheri. Secondo il Segre queste citazioni fatte dal Klugel possono costituire una solida base per la geometria non euclidea e se pure un ingegno potente si fosse messo a lavorare, a quei tempi, intorno al vecchio enigma delle parallele (se pur non ricorreva alla fonte prima, al libro di Saccheri) ne poteva trovare in esso un forte aiuto per la sua dottrina. La dissertazione di Klugel viene molto discussa da Lambert nella sua *Theorie der Parallellinien.* Oggi è usanza metterla insieme con l'opera del Saccheri ma secondo Segre non è giusto poiché Lambert aveva appreso dal *Conatuum* di Klugel i teoremi del Saccheri, anzi è probabile che il matematico svizzero abbia anche preso conoscenza diretta dell'opera del dotto italiano. Ora nelle prime parti del lavoro di Lambert non vi è nulla di essenziale; la figura fondamentale questa volta è un quadrilatero trirettangolare, ossia tre angoli retti e le analoghe ipotesi del Saccheri sulla natura del quarto angolo. Segre ci informa che il Klugel scrisse il *Conatuum* sotto la guida e l'influenza di A.G.Kaestner, professore all'università di Gottinga e che inoltre vi era a Gottinga un altro conoscitore delle ricerche sulla teoria delle parallele: K.F.Seyffer. Se quindi, verso la fine del XVIII secolo, un giovane intelligente che studiasse a quella università veniva a parlare di quella teoria con il Kaestner o con il Seyffer, non c'è dubbio che costoro avrebbero subito indicato il lavoro di Klugel, come pure quello di Lambert da poco comparso e se pure, né un professore né l'altro indicasse l'opera del Saccheri, il giovane poteva poi consultare quel libro nella biblioteca universitaria. Queste considerazioni si possono applicare anzitutto a Gauss ed a Wolfgang Bolyai, i quali studiarono a Gottinga. Quest'ultimo si interessò al problema delle parallele dimostrando l'esistenza di rette equidistanti ma Gauss scoprì l'errore nella sua dimostrazione. L'accanimento di Walfgang Bolyai verrà in un certo senso compensato dal fatto che toccherà al figlio Janos legare il proprio nome alla scoperta della geometria non euclidea. Walfgang istruì egli stesso il figlio nella matematica, richiamando l'attenzione sulle lacune esistenti nella teoria delle parallele quindi per il Segre nulla esclude che egli abbia comunicato alcune delle cose che egli stesso può aver serbato in mente dalla lettura di Saccheri, o di Klugel, o di Lambert. Quando nel 1823 Janos comunica al padre la propria scoperta, egli lo esorta a pubblicare al più presto i propri risultati, purtroppo passeranno circa 10 anni prima che il lavoro di Janos vede la luce cosicché la paternità della scoperta verrà assunta nel 1829 dal russo Lobachecskij. Anche su Lobachecskij è probabile che abbia influito l'opera del Saccheri, sia pur indirettamente. Essi comunque pubblicarono delle presentazioni organiche di geometria non euclidea rendendosi pienamente conto che questa nuova geometria era dal punto di vista logico altrettanto legittima quanto quella di

Euclide. Queste due teorie geometriche, pur essendo entrambe interamente non contraddittorie, sono però tali che parecchi enunciati dell'una rappresentano la negazione più o meno diretta di altrettanti enunciati dell'altra. Ciò comportava che esse non potessero essere simultaneamente vere e che, quindi, una solo di esse fosse la vera, oppure entrambe non fossero né vere, né false. Fu quest'ultimo punto di vista che prevalse, dando luogo a quella che chiamiamo prospettiva dell'assiomatica moderna. David Hilbert propone una assiomatizzazione della geometria che tiene conto delle nuove geometrie non euclidee e del dibattito sugli *Elementi*. L'idea è quella di stabilire per la geometria un sistema di assiomi completo e semplice quanto più possibile e di dedurre, dai medesimi, le proposizioni geometriche più importanti. la differenza sostanziale tra gli assiomi di Hilbert e quelli di Euclide è che essi non sono verità evidenti ma definizioni implicite. Possiamo suddividere gli assiomi della geometria in cinque gruppi: *assiomi di collegamento*, che stabiliscono un collegamento tra gli oggetti del sistema: punti, rette e piani; *assiomi di ordinamento*, che servono per definire il concetto di "stare fra" e rendono possibile l'ordinamento dei punti su una retta, in un piano e nello spazio; *assiomi di congruenza*, che caratterizzano il concetto di uguaglianza tra segmenti ed angoli e quindi anche quello di movimento; *assioma della parallela*, nel quale Hilbert assume come assioma l'unicità della parallela e da questo seguono come teoremi tutte le proposizioni equivalenti al quinto postulato di Euclide che non richiedono gli assiomi di continuità; *assiomi di continuità*, con questi Hilbert afferma che dall'assunzione che non esistono parallele segue che la somma degli angoli di un triangolo è più grande di due retti. Inoltre ricorda che altri postulati oltre quello di parallelismo, possono essere negati senza contraddizione e che esistono molte geometrie logicamente possibili, oltre alle note geometrie non euclidee.

Un esempio di geometria non euclidea nel quale esistono diverse parallele ad una retta data, passanti per uno stesso punto, è il modello di Poincaré. Egli fornì un modello euclideo delle geometrie non euclidee, “traducendo” gli oggetti euclidei in equivalenti non euclidei in modo tale che continuino a valere i teoremi euclidei. Si fissa in un piano euclideo una circonferenza S di centro O e raggio *r* che chiamiamo *orizzonte.* Le rette possono essere di due tipi:

1) i diametri del cerchio S vengono dette *rette del primo tipo;*
2) gli archi di circonferenza aventi gli estremi su S vengono dette *rette del secondo tipo.*

In questo modello della geometria iperbolica si verifica che gli assiomi di Euclide sono validi tranne quello delle parallele. Si capisce pertanto perché tutti i secolari tentativi di dimostrazione fossero destinati al fallimento, infatti, se il quinto postulato fosse conseguenza logica degli altri postulati, ogni insieme di enti che soddisfa tali proposizioni dovrebbero soddisfare anche il quinto postulato. Ma, come si è visto, gli enti del modello di Poincaré soddisfano appunto tutti gli altri assiomi e non il quinto postulato.

Un altro modello simile, che segue le stesse regole e definizioni del precedente, è il semipiano di Poincaré; in esso i diametri diventano rette perpendicolari alla retta e gli archi ortogonali, circonferenze aventi centro sulla retta. Il vantaggio più rilevante di questo modello, che lo fa preferire quando si vuole presentare un modello della geometria iperbolica, è che in esso è più semplice il tracciamento delle rette ed è più facilmente visibile come in esso non valga l’assioma delle parallele.

Riferimenti bibliografici

[1] *"Gli Elementi"* di Euclide, Classici della scienza, Collezione diretta da Ludovico Geymonat, Classici U.T.E.T.

[2] Gerolamo Saccheri, *Euclide liberato da ogni macchia*. A cura di Pierangelo Frigerio, Introduzione di Imre Toth ed Elisabetta Cattanei, Bompiani.

[3] Evandro Agazzi e Dario Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della scienza.*

[4] R.Troudeau. *La geometria non euclidea.* Bollati Boringheri, 1991.

[5] Roberto Bonola. *Non Euclidea Geometry*, Dover Publications, Inc., New York.

[6] Corrado Segre. *Congetture intorno alla influenza di Gerolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea.* Atti Acc. Scienze di Torino, T. XXXVIII. (1903)

[7] P.Buzano. *Critica dei fondamenti della geometria.*