UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

SINTESI
della Tesi di Laurea in Matematca
di

Aureliana Barghini

Il minimo numero di curve singolari di una fibrazione semistabile su $\mathbb{P}^1$

Relatore
Prof. Lucia Caporaso

Il Candidato Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2007 - 2008
LUGLIO 2008

Classificazione AMS: primaria 14H10, secondaria 14D06
Parole Chiave: Fibrazioni Semistabili, Curve Singolari, Superfici

In questa tesi di laurea ci siamo occupati della risposta di Beauville alla domanda di Szpiro: 'Sia $f : S \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ una famiglia di curve semistabili non isotriviale. Qual è, allora, il numero minimo di fibre singolari di f?' La domanda era naturale al tempo, poiché già si sapeva che ogni famiglia di curve a moduli variabili (i.e. le cui fibre lisce non sono tutte isomorfe) di genere $g \geq 1$ su $\mathbb{P}^1$ ammette almeno tre fibre singolari ed erano conosciuti esempi di fibrazioni con esattamente tre fibre singolari per ogni genere $g \geq 1$ (cfr. tesi, cap. 3, par. 8).

Nel primo capitolo abbiamo trattato preliminarmente la Jacobiana di una curva e la sua polarizzazione principale, data dalla classe del divisore Θ, per poi evidenziarne alcune proprietà. In effetti la Jacobiana principalmente polarizzata della curva racchiude in sé tutte le informazioni necessarie per ricostruire la curva stessa. È questo il contenuto del famoso teorema di Torelli:

Teorema 1.5.7 (Teorema di Torelli). *Siano C e C' curve lisce. Siano $(J(C), [\Theta])$ e $(J(C'), [\Theta'])$ le corrispondenti Jacobiane principalmente polarizzate. Se $(J(C), [\Theta]) \cong (J(C'), [\Theta'])$, allora $C \cong C'$.*

La dimostrazione di tale teorema si basa principalmente su due risultati: la formula di Poincaré e il teorema della singolarità di Riemann.

Dalla formula di Poincaré segue che $W_{g-1} = u(C^{g-1})$, ovvero l'immagine dei divisori effettivi di grado $g-1$ nella Jacobiana di C, $J(C)$, tramite la mappa di Abel u, è un rappresentante della polarizzazione principale. In effetti $W_{g-1}(C)$ si rivela essere un oggetto maneggevole, di cui è possibile studiare più facilmente la struttura locale. Il teorema della singolarità di Riemann fornisce, appunto, una caratterizzazione dei punti singolari di $W_{g-1}(C)$. L'idea principale è quella di rivedere lo spazio tangente proiettivizzato di $J(C)$ in un punto come lo spazio ambiente del morfismo canonico: $W_{g-1}(C)$ è liscia in D se e soltanto se $dim|D| = 0$, e lo spazio tangente a $W_{g-1}(C)$ nei punti lisci è quello generato dall'immagine di D tramite il morfismo canonico in $\mathbb{P}^{g-1}$.

Quest'ultimo risultato dà un'idea di come si comporta la mappa di Gauss $(W_{g-1}(C))_{reg} \to (\mathbb{P}^{g-1})^*$, dove $(W_{g-1}(C))_{reg}$ sta ad indicare il luogo liscio di $W_{g-1}(C)$. La dimostrazione del teorema di Torelli è appunto basata sullo studio del luogo di diramazione di tale mappa. Nel caso non iperellittico, un divisore D, di grado $g-1$, effettivo e tale che $\dim |D| = 0$, è un punto di ramificazione per la mappa di Gauss se e soltanto se D non è ridotto, ovvero se l'immagine di D tramite la mappa canonica genera un iperpiano tangente alla curva canonica. In effetti il fulcro della dimostrazione del teorema di Torelli consiste nel mostrare che la chiusura del luogo di diramazione della mappa di Gauss è C^*, ovvero l'insieme degli iperpiani tangenti alla curva, e da questo segue la tesi. Nel caso iperellittico la dimostrazione è analoga, con l'accortezza di notare che il luogo di diramazione è dato non solo dagli iperpiani tangenti, ma anche dagli iperpiani passanti per i punti di diramazione della g_2^1, attraverso la quale si fattorizza il morfismo canonico.

Il teorema di Torelli si rivela essenziale per la dimostrazione del teorema di Beauville, oggetto principale di questa tesi e a cui è dedicato il secondo capitolo:

Teorema 2.4.3 (Beauville, 1981). *Sia $f : X \to \mathbb{P}^1$ una fibrazione semistabile non isotriviale. Si ha che:*

1. *f ha almeno quattro fibre singolari.*
2. *Se f ha esattamente quattro fibre singolari allora:*
   - *(a) X è algebricamente semplicemente connessa;*
   - *(b) $h^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$;*
   - *(c) le componenti irriducibili delle fibre singolari sono curve razionali (eventualmente singolari);*
   - *(d) le classi delle componenti irriducibili delle fibre singolari generano un iperpiano nello spazio vettoriale $\mathbb{Q} \otimes Pic(X)$.*

Diamo brevemente una traccia della dimostrazione.

Nella prima parte abbiamo assunto che le fibre singolari siano al più quattro e abbiamo fissato un insieme di quattro fibre $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, tale che le eventuali fibre singolari siano contenute in esso. Abbiamo dimostrato poi, sotto queste ipotesi, che $h^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, che le classi delle componenti irriducibili delle fibre singolari generano un iperpiano in $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$, infine che $h^1(C_i^\nu, \mathcal{O}_{C_i}) = q$, per ogni i, dove C_i^ν è la normalizzazione di C_i, e q è l'irregolarità di X. Da quest'ultimo risultato su $h^1(C^\nu, \mathcal{O}_C)$, se si suppone che le fibre singolari siano strettamente minori di quattro, segue che le fibre singolari sono di tipo compatto e quindi che il Pic_f^0 è una famiglia di varietà abeliane principalmente polarizzate che induce un morfismo da $\mathbb{P}^1$ ad A_g, lo spazio di moduli grezzo delle varietà abeliane principalmente polarizzate. È ben noto che tale mappa deve essere necessariamente costante. Per il teorema di Torelli quindi, tutte le fibre lisce sono isomorfe e dalla semistabilità segue che tutte le fibre sono isomorfe. Qui si conclude la dimostrazione del primo punto del teorema.

Nell'ultima parte del capitolo sono stati dimostrati i punti 2.a, 2.c, 2.d. Il passo fondamentale è mostrare che $q = h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Si procede per assurdo.

Il caso $q \geq 2$ si esclude facilmente: se così fosse, infatti, la superficie sarebbe rigata (poiché $p_g = 0$). Inoltre, dato che $h^1(C_i^\nu, \mathcal{O}_{C_i^\nu}) = q$, applicando il lemma di rigidità, si otterrebbe che le fibre singolari di f sono unione di una sezione del morfismo che definisce la rigatura $p : X \to B$ e di alcune curve che vengono invece contratte. Da questo seguirebbe che tutte le fibre lisce di f sono sezioni di p e quindi tutte isomorfe, il che è un assurdo.

Escludere il caso $q = 1$ richiede un po' più di lavoro: sfruttando la mappa di Albanese si costruisce un rivestimento non ramificato di X, che si rivela essere ancora una fibrazione semistabile, con lo stesso numero di fibre singolari della fibrazione di partenza. Infine, con un conto sulla caratteristica di Eulero del fascio strutturale, si arriva ad una contraddizione.

Da $q = 0$ seguono i punti $2.c$ e $2.d$, mentre il punto $2.a$ si ottiene per assurdo, calcolando nuovamente la caratteristica di Eulero dell'eventuale rivestimento non ramificato.

L'ultimo capitolo della tesi è dedicato alla costruzione di alcuni esempi di fibrazioni semistabili con:

a. quattro fibre singolari di genere 1 (A. Beauville, 1981);

b. sei fibre singolari per ogni genere $g \geq 1$ (A. Beauville, 1981);

c. cinque fibre singolari di genere 3 (A. Beauville, 1981);

d. cinque fibre singolari di genere 2 (S. L. Tan, 1995);

e. sei fibre singolari di genere 3 (S. L. Tan, Y. Tu, A. G. Zamora, 2005).

Mentre il primo esempio è semplicemente un sistema lineare 1-dimensionale di curve di genere 1 in $\mathbb{P}^2$, scoppiato nei suoi punti base, gli altri hanno una costruzione più complessa. La fibrazione, negli esempi successivi, si ottiene desingolarizzando un rivestimento doppio $\pi : \mathbb{P}^1 \times C \to \mathbb{P}^1$ ramificato lungo un divisore effetivo D tale che $D \sim 2D'$, per qualche $D' \in Div(X)$. Affinché la fibrazione ottenuta sia semistabile, si dovrà avere l'accortezza di richiedere che $\pi|_D$, la proiezione su $\mathbb{P}^1$ ristretta al divisore, abbia punti con indice di ramificazione al più 2. In questo caso $D|_F$, dove F è una fibra di π, ha al più punti doppi e quindi il suo rivestimento è al più nodale. Il numero di fibre singolari è dato, quindi, dal numero di punti di diramazione di $\pi|_D$ mentre il genere delle fibre si ottiene dalla formula di Riemann-Hurwitz, tenendo conto che il numero di punti di ramificazione per una fibra generica è dato da $D \cdot F$.

Nell'ultimo paragrafo del capitolo, infine, abbiamo presentato un esempio di fibrazione a moduli variabili, non semistabile e con tre fibre singolari.

Bibliografia

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] W. Barth, C. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] A. Beauville. Le nombre minimum de fibres singulières d'un courbe stable sur $\mathbf{P}^1$. *Astérisque*, (86):97–108, 1981.

[4] A. Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.

[5] A. Calabri. *Rivestimenti del piano - Sulla razionalità dei piani doppi e tripli ciclici*, volume 1 of *Linee di Confine*. Edizioni Plus - Pisa University Press, Pisa, 2006.

[6] L. Caporaso. *Introduction to moduli of curves*. Unpublished, 2004.

[7] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[8] J. Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[9] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[10] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 5.

[11] S.L. Tan. The minimal number of singular fibers of a semistable curve over $\mathbf{P}^1$. *J. Algebraic Geom.*, 4(3):591–596, 1995.

[12] S.L. Tan, Y. Tu, and A. G. Zamora. On complex surfaces with 5 or 6 semistable singular fibers over $\mathbb{P}^1$. *Math. Z.*, 249(2):427–438, 2005.