



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica  
di

Alessandra Busia

**Modelli statistici per il rischio  
di credito ed il progetto  
StarRisk**

Relatore

Prof. Sergio Scarlatti

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

OTTOBRE 2003

Classificazione AMS : 65C05, 11K45, 91B28, 68N01

Parole Chiave: VaR, Simulazione Monte Carlo, Rischio di Credito, StarRisk.

# Sintesi

In questa tesi, partendo da una ricognizione del tema del controllo del Rischio di Credito nella realtà italiana, forniremo dapprima una rassegna delle più importanti metodologie statistiche che si sono affermate sul tema sia come modelli teorici che nella pratica dei mercati e in seguito illustreremo le caratteristiche di **StarRisk**, un sistema per il Credit Risk Management sviluppato da Datamat in collaborazione con il mondo accademico Luiss Management, alla realizzazione del quale ho partecipato in maniera attiva nei mesi di stage presso la suddetta società.

E' un fatto, che in questo ultimo decennio le Banche e le istituzioni finanziarie, nazionali ed internazionali, hanno posto crescente attenzione alle tecniche di misurazione, monitoraggio e copertura dei rischi assunti.

Nel campo dei rischi finanziari, è utile distinguere tra **rischio di mercato** e **rischio di credito**.

Il rischio di mercato si riferisce alla possibilità di subire perdite dovute a variazioni nei prezzi delle attività finanziarie, mentre il rischio di credito è connesso alla possibile inadempienza della controparte nel soddisfare un obbligo contrattuale.

Le azioni, ad esempio, sono soggette esclusivamente al rischio di mercato, dal momento che non prevedono nessuna promessa di pagamento. Al contrario, il rischio di un prestito bancario dipende principalmente dalla possibilità che chi ha richiesto il prestito non sia in grado di soddisfare i pagamenti contrattuali.

La distinzione tra il rischio di mercato e quello di credito non è sempre così

precisa. Un'obbligazione, ad esempio, è soggetta ad entrambe le tipologie di rischio, poichè il suo valore è sensibile sia al tasso di interesse sia al merito creditizio dell'emittente. Inoltre, i due tipi di rischio possono anche interagire: variazioni del valore di mercato di un'attività finanziaria dovute a modifiche del tasso di interesse possono influenzare la capacità di pagamento dell'emittente.

Parallelamente, anche il concetto di **Value at Risk** (VaR) dipende dal tipo di rischio sottostante. Nel caso del rischio di mercato, il VaR misura la massima perdita potenziale (ad esempio con il 99% di confidenza) di attività finanziarie negoziabili, che hanno cioè un mercato di riferimento (come, ad esempio, le azioni). Nel caso del rischio di credito, il VaR, invece, misura la massima perdita potenziale dovuta all'inadempienza del debitore.

In quest ultimo campo, il lavoro pionieristico intrapreso dalle più importanti società di consulenza mondiali e dai maggiori esperti della finanza teorica applicata, nella seconda metà degli anni '90, ha aperto la strada allo sviluppo di sofisticate metodologie per la misura del rischio di credito delle attività finanziarie. Questi metodi sono largamente fondati sulla statistica matematica e, in particolare, si riferiscono a modelli probabilistici di determinazione del merito creditizio. Si sono così affermati sul mercato diversi modelli di questo tipo, tra cui i più diffusi sono:

- Creditmetrics, elaborato dalla banca statunitense JP Morgan;
- CreditRisk+, messo a punto dalla banca d'affari Credit Suisse First Boston;
- Portfolio Manager, sviluppato dalla società di consulenza KMV;
- CreditPortfolioView, ideato dalla società di consulenza McKinsey.

Diamo ora una descrizione più accurata dei capitoli di questo lavoro. Nel primo capitolo della tesi richiameremo alcune nozioni di probabilità e di

finanza necessarie per capire meglio i problemi che affronteremo nel seguito. In particolare arriveremo a descrivere il modello Black- Scholes per la valutazione dei contratti derivati.

Nel secondo capitolo discuteremo in generale il concetto di rischio, fino ad arrivare a definire il Rischio di Credito, e a stabilire i passi necessari per la sua stima.

In pratica, per calcolare il rischio associato ad un portafoglio di esposizioni creditizie dobbiamo essere in grado di calcolare la distribuzione delle probabilità dei valori che possono essere assunti dal Portafoglio creditizio. Per fare ciò il primo passo consiste nell'individuare i valori che può prendere ciascuna esposizione presente in portafoglio considerata singolarmente. A tal fine è necessario poter fornire una risposta accettabile alle seguenti domande:

1. Qual è la probabilità di fallimento di una data controparte?
2. Quale sarà l'esposizione verso detta controparte al momento di un suo eventuale fallimento?
3. Qual è la parte dell'esposizione che si presume di poter recuperare in caso di fallimento?

Vediamo dapprima 'quando' una controparte fallisce; per far questo ci avvaliamo del modello teorico sviluppato da Merton.

### **Il modello di Merton**

Si tratta di un tipo di approccio che deriva dal modello di pricing delle opzioni sviluppato originariamente da Black e Scholes (1973).

Merton ha applicato questa teoria al rischio di insolvenza basandosi sull'idea seguente:

Sia  $T$  un tempo futuro noto. Se al tempo  $T$  il *saldo attivo* dell'azienda considerata è inferiore al valore del *saldo passivo* allora l'azienda è fallita, altrimenti no.

Sono due le ipotesi più importanti su cui si regge il modello originariamente sviluppato da Merton. La prima consiste nel fatto che si immagina il debito

aziendale come quello derivante da un prestito che va a scadenza al tempo  $T$ . La seconda ipotesi prevede invece che il valore dell'attività della società esposta al rischio di insolvenza segua un processo diffusivo geometrico Browniano. Illustreremo ora le argomentazioni di Merton (ref [SR01]).

Supponiamo che un'azienda abbia un debito nei confronti dei creditori pari a  $D$  euro, sotto forma di un bond zero-coupon, che va a scadenza al tempo  $T$ . Se  $V_t$  denota il valore dell'azienda al tempo  $t$  ( $\leq T$ ) l'ammontare ricevuto alla data di scadenza ( $t = T$ ) da parte dei creditori sarà pari a  $D$  se l'azienda è in grado di onorare il suo debito altrimenti, nel caso di fallimento, riceveranno il valore dell'azienda  $V_t$ . In modo più formale possiamo dire che i creditori riceveranno al tempo  $T$

$$\begin{cases} D & \text{se } V_T \geq D \\ V_T & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

cioè  $\min\{D, V_T\}$  che è equivalente al  $D - \max\{D - V_T, 0\}$ .

Quest'ultima osservazione permette di dare la seguente interpretazione finanziaria del rischio associato ad una possibile insolvenza per fallimento.

Infatti, il termine  $\max\{D - V_T, 0\}$  può essere visto come il pay-off terminale di un contratto put di strike  $k = D$  scritto sul valore  $V_t$  dell'impresa in questione ovvero

$$p(T) = \max\{D - V_T, 0\}$$

Denotiamo inoltre con  $P(t, T)$  il prezzo al tempo  $t$  di uno zero coupon bond (z.c.b.) che alla scadenza restituisce  $D$  euro, i.e.  $P(T, T) = D$ .

A questo punto  $D - \max\{D - V_T, 0\}$  può essere visto come il valore al tempo  $t = T$  di un portafoglio detenuto dai creditori e costituito da uno z.c.b. che paga  $D$  a scadenza e da una put venduta agli azionisti cosicchè, denotando con  $P^d(T, T)$  il valore di tale portafoglio si ha che:

$$P^d(T, T) = D - \max\{D - V_T, 0\} \quad (2)$$

Sia  $t$  un tempo intermedio,  $P^d(t, T)$  il valore di tale portafoglio al tempo  $t$  e  $P(t, T)$  il valore dello zero coupon a  $t$ , allora vale

$$P^d(t, T) = P(t, T) - p(t) \quad (3)$$

con  $p(t) = p(t, V_t)$  put su  $V_t$  con strike  $K = D$ .

Ovviamente vale  $P^d(t, T) \leq P(t, T)$ .

Quindi riscrivendo la (3) adoperando la formula di Black and Scholes per un'opzione put avremo:

$$P^d(t, T) = P(t, T) - P(T, T) e^{-r(T-t)} N\left(-d + \sigma_v \sqrt{T-t}\right) + V_t N(-d) \quad (4)$$

con

$$d = \frac{\log \frac{V_t}{D} + r + \frac{1}{2} \sigma_V (T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}$$

Il valore economico degli attivi dell'impresa debitrice segue un moto browniano geometrico:

$$dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dB_t \quad (5)$$

dove  $\mu_V$  e  $\sigma_V$  sono rispettivamente il *drift* e la volatilità di  $V_t$ , mentre  $B_t$  è un browniano standard.

Ovviamente ciò comporta che il logaritmo del valore degli attivi, ad una certa data futura  $t$ :

$$\log V_t = \log V_0 + \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) t + \sigma_V \sqrt{t} \epsilon \quad (6)$$

segua una distribuzione normale con media  $\log V_t + \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right) t$  e varianza  $\sigma_V^2 t$ . A sua volta il valore degli attivi segue una distribuzione lognormale con media  $V_t e^{\mu t}$  e varianza  $V_t^2 e^{2\mu t} \left(e^{\sigma_V^2 t} - 1\right)$ .

Possiamo quindi dire che l'insolvenza ha luogo se e solo se, al tempo  $t$ , il valore degli attivi del debitore,  $V_t$ , è minore del valore del suo debito  $X_t$ . Ciò

significa che la probabilità di default  $PD$  è pari a:

$$\begin{aligned}
 PD &= \mathbb{P}(V_t < X_t) = \mathbb{P}(\log V_t < \log X_t) & (7) \\
 &= \mathbb{P}\left(\log V_t + \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t + \sigma_V\sqrt{t}\epsilon < \log X_t\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\frac{\log \frac{V_t}{X_t} + \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t}{\sigma_V\sqrt{t}} < -\epsilon\right) \\
 &= \Phi\left(-\frac{\log \frac{V_t}{X_t} + \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t}{\sigma_V\sqrt{t}}\right) = \Phi(-d_2)
 \end{aligned}$$

dove  $\Phi(\cdot)$  è la funzione di densità cumulata normale e  $d_2$  è simile alla quantità utilizzata nella formula di Black e Scholes.

Dopo aver analizzato ‘quando’ una controparte è definita insolvente, dobbiamo ora definire ‘quanto’ si prevede di perdere. Per fare ciò ci avvaliamo della metodologia nota in finanza sotto il nome di **Valore a Rischio** o più brevemente **Var** di portafoglio.

Formalmente il VaR misura la perdita del valore del portafoglio che ci si può aspettare in un prefissato intervallo di tempo, in condizioni normali di mercato a un dato livello di confidenza.(ref [Hu97])

Per spiegare il Var supponiamo che un’ istituzione finanziaria o un investitore detenga un portafoglio  $\mathcal{P}$  il cui valore odierno risulti pari a  $v_t = v_t(\mathcal{P}) (> 0)$  euro.

Denotiamo con

$$L_t = v_{t+1} - v_t$$

la variazione di valore di tale portafoglio al termine della giornata borsistica di domani.

Essendo  $v_{t+1}$  variabile aleatoria, oggi  $L_t$  non è determinabile.

Modellizzando la sua distribuzione è possibile però calcolare quale soglia  $V$  di perdita (in euro) potrebbe essere superata ad esempio nel 5% dei casi.

La quantità monetaria  $V$  prende il nome di Valore a Rischio (giornaliero) ad

esempio al 5%.

In termini matematici  $V > 0$  è soluzione dell'equazione

$$\mathbb{P}(L_t \leq -V) = 0.05 \quad (8)$$

Più in generale:

Si definisce VaR al livello di confidenza  $\alpha$  con orizzonte temporale  $\Delta t$  la soluzione  $V > 0$  dell'equazione

$$\mathbb{P}(L_t \leq -V) = 1 - \alpha \quad (9)$$

con  $L_t = v_{t+\Delta t} - v_t$

Il terzo capitolo di questa tesi riguarda la descrizione, tramite esempi, del **modello Credit Metrics**.

Questo modello, per la misurazione del Var relativo al rischio di credito, sviluppato da J.P. Morgan nel 1997, si pone come obiettivo la valutazione del potenziale impatto del peggioramento della qualità delle controparti affidatarie dei crediti (incluso il caso estremo di insolvenza) sul valore di mercato del portafoglio costituito da tali crediti. Credit Metrics quindi considera sia il rischio di default che il rischio di peggioramento del merito creditizio di un'azienda. In particolare, i differenti possibili livelli di rischio diversi dall'insolvenza fra i quali una singola controparte può migrare sono identificati dalle *classi di rating* definite dalle principali agenzie quali Moody's o Standard & Poor's: secondo questi schemi il miglior rating è AAA. Si ritiene che le obbligazioni con questo rating abbiano una probabilità di insolvenza quasi nulla. Il miglior rating a seguire è AA, vengono poi A, BBB, BB, B e CCC. La valutazione del rischio di credito per la singola esposizione secondo Credit Metrics si basa sulla previsione della distribuzione di probabilità del valore di mercato della posizione a un anno dalla data in cui si effettua la valutazione. Ciò è possibile ricorrendo alle *matrici di transizione*, anche queste elaborate dalle agenzie di rating, costruite su serie storiche.

Nonostante sia relativamente semplice ricavare la distribuzione dei valori di



mercato di un bond aziendale dopo un anno, valutare l'intero portafoglio risulta molto più complicato.

Innanzitutto è necessario definire una modalità per introdurre la correlazione tra i movimenti di *upgrading* o *downgrading* delle diverse controparti. Seguendo il modello del valore delle attività aziendali proposto da Merton, il default di un'azienda si verifica quando il valore delle sua attività scende al di sotto del valore delle passività. Per quanto concerne Credit Metrics assume che **il tasso di rendimento delle attività aziendali di più controparti si distribuisca secondo una distribuzione normale standard multivariata.**

Se il tasso di default per una determinata azienda  $i$  è  $p_i$ , allora il valore soglia tra default e non default è dato da  $\Phi^{-1}(p_i)$ , dove  $\Phi^{-1}()$  è l'inversa della funzione di densità cumulata di una distribuzione normale standard.

Per procedere nel calcolo del Var di un portafoglio occorre conoscere la correlazione fra i rendimenti delle azioni delle singole controparti. Credit Metrics introduce a questo punto un'ulteriore ipotesi, e cioè che tale correlazione (che non è osservabile direttamente) possa essere approssimata dalla correlazione fra i rendimenti delle azioni delle singole controparti. Dato che stimare questa correlazione per ogni coppia di controparti sarebbe improponibile (a causa dell'elevato numero di conti), si raggruppano in *cluster* ciascuno contenente uno specifico settore economico.

Per procedere al calcolo del Var di portafoglio si utilizzano quindi tecniche di Simulazione Monte Carlo. A ogni 'giro' della simulazione si estrae un vettore di  $n$  numeri casuali da una distribuzione normale multivariata (dove  $n$  è il numero di cluster nel portafoglio); in funzione dei valori estratti è possibile associare a ogni controparte una classe di rating: estraendo valori correlati da una distribuzione multivariata si simula dunque un percorso di migrazione congiunta delle diverse controparti in portafoglio. In funzione della classe di rating così individuata è possibile rivalutare ognuna delle posizioni in portafoglio e giungere così a un valore di mercato dell'intero portafoglio. Ripetendo il processo un numero sufficientemente elevato di

volte si ottiene una distribuzione ‘simulata’ per i possibili valori di mercato del portafoglio. Tale distribuzione viene quindi utilizzata per determinare la perdita del portafoglio in questione su un orizzonte annuale ad un livello di confidenza del 99%.

Nel quarto capitolo di questo lavoro descriveremo **StarRisk**, il prodotto sviluppato da Datamat, creato appositamente per stimare del rischio di credito in una realtà come quella italiana dove alcune delle assunzioni che sono alla base dei modelli citati in precedenza non sono verificate.

Il sistema è composto da più blocchi, ognuno dei quali con un compito e una finalità specifica.

I blocchi principali del prodotto StarRisk sono due:

- StarRating
- StarPortfolio

**StarRating** è composto da due moduli, uno *statistico* e uno *qualitativo*.

Il primo utilizza tecniche statistiche tradizionali come l’analisi discriminante e altre tecniche più innovative come le reti neurali e gli alberi decisionali per arrivare a stimare, per raggruppamenti omogenei di soggetti, la probabilità di insolvenza.

Il secondo modulo è costituito da una serie di questionari creati *ad hoc* per differenti raggruppamenti di soggetti. Ogni questionario è configurabile a livello di direzione centrale ed è costituito da tre aree indipendenti, relative all’analisi della controparte, del settore di appartenenza e del Paese di operatività.

Il modulo e’ stato concepito con due obiettivi primari: includere nella valutazione di un soggetto anche aspetti qualitativi, che a volte sono più significativi di dati quantitativi e raccogliere ed archiviare informazioni supplementari sui diversi fruitori del prestito, finora mai tenute in considerazione dalle banche o comunque non conservate su supporto elettronico per poter

poi essere riutilizzate a vari fini. Ci sono inoltre categorie di soggetti come le imprese start-up, che possono essere valutate esclusivamente sulla base di dati qualitativi, dal momento che per loro non sono disponibili né dati di bilancio né dati andamentali.

Al termine della compilazione i punteggi associati alle diverse risposte vengono ponderate in base ai pesi attribuiti agli argomenti e alle domande e concorrono al calcolo dello score (punteggio) qualitativo che determina, insieme agli altri score intermedi, il rating della controparte non definitivo. Il modello di rating interno ideato prevede infatti alla fine del processo la possibilità di intervento da parte di un analista, che può rivisitare la valutazione ottenuta alla luce di informazioni non entrate a far parte del modello di stima, di natura soprattutto qualitativa. Questo rater può procedere ad un downgrade o ad un upgrade del giudizio di rating non definitivo con un margine di oscillazione al massimo di due classi e deve giustificare la sua scelta con motivazioni tali da lasciare il minor spazio possibile alla discrezionalità. Questo procedimento, da noi chiamato forzatura, deve essere comunque validato da un livello superiore rispetto al rater, in grado di rifiutare la proposta di forzatura ritenendo le motivazioni insufficienti, confermarla oppure lasciarla pendente chiedendo ulteriori dettagli.

In **StarPortfolio** la logica seguita è stata quella del VaR (Value at Risk), sviluppando parte degli argomenti che abbiamo già illustrato nel contesto di CreditMetrics. Il modello è basato su tecniche di simulazione Monte Carlo e sulla stima di Default Correlation e Asset-Return Correlation geo-settoriale. Contemporaneamente alle tecniche di *simulazione* si è proceduto alla determinazione del VaR, sostituendo ai metodi di Simulazione una tecnica analitica caratterizzata da formule chiuse.

Tale metodologia ha permesso di ridurre al minimo i tempi di elaborazione.

Il mio contributo personale nello sviluppo di questo progetto presso la DATA-MAT S.p.a. è stato quello di supporto al team per quanto riguarda l'aspetto statistico-matematico. Per il blocco **StarRating** ho partecipato alla pro-

gettazione dei questionari, ho effettuato, tramite il supporto del programma statistico SPSS, l'analisi dei questionari e l'analisi statistica sui dati di bilancio determinando le funzioni discriminanti e i coefficienti per l'assegnazione di ogni controparte ad una classe di rating.

Il sistema StarRisk è costituito da varie componenti, alcune esclusivamente utilizzate da StarRating e altre solo da StarPortfolio.

Vi sono infine delle componenti comuni per garantire perfetta integrazione a livello di piattaforma e di alimentazione dati. Infatti in un unico sistema il software concentra tutte le fasi di alimentazione dati, controllo e calcolo, razionalizzando e ottimizzando i processi. Il modello di business è condiviso con i diversi utenti del sistema. Viene così evitata la necessità di integrazioni e raccordi, garantendo l'univocità dell'informazione ai fini decisionali.

Il database (SQL) si alimenta con dati interni alla banca e dati esterni (es. rating settoriali, rating di paese,...). Sulla base di questi dati si calcola prima di tutto il *Rating interno di controparte*, ossia la Probabilità di default ad un anno di una controparte, successivamente il Tasso di Recupero (ovvero la 'quantità' di credito che si presume di poter recuperare a seguito del fallimento della controparte interessata) stimato con un approccio top down sulla base di alcune caratteristiche del credito considerato, ed infine la Esposizione al Momento del Default (EAD). Si definisce quindi la Perdita Attesa *PA* relativa ad ogni singolo credito come il prodotto di queste tre grandezze. Gli outputs dei moduli suddetti confluiscono nel modello di portafoglio che a sua volta permette di calcolare, per l'intero portafoglio, il Var ad un dato livello di confidenza.

Infatti per calcolare il rischio di credito associato ad un portafoglio di esposizioni creditizie, il sistema di Credit Risk Management deve essere in grado di calcolare, in modo esplicito, la funzione di densità di probabilità delle perdite che possono essere originate dal portafoglio creditizio. Per far ciò, il primo passo consiste nell'individuazione della distribuzione dei valori che possono essere assunti da ciascun'esposizione presente nel portafoglio

considerata singolarmente. E' quindi necessario calcolare il valore atteso della probabilità di insolvenza della controparte messo a disposizione dal sistema di 'rating interno', nel nostro caso da StarRating, e successivamente calcolare, attraverso il valore che si presume di poter recuperare in caso di fallimento, la funzione di densità di probabilità delle perdite. Una volta che si conoscono le informazioni calcolate per la controparte e la sua singola esposizione, queste possono essere aggregate utilizzando un modello di portafoglio che tenga conto delle correlazioni tra le singole controparti.

Per misurare il rischio di credito occorre definire il concetto di perdita al quale ci riferiamo.

Il Comitato di Basilea sulla Vigilanza Bancaria definisce la perdita in base a due approcci: **Default Mode** (DM) e **Mark to Market** (MTM). Il modello realizzato da Datamat è di tipo 'default mode', ossia considera un unico evento sfavorevole: quello dell'insolvenza; non viene quindi stimato il possibile deprezzamento del valore del portafoglio prestiti a seguito di un peggioramento del merito creditizio.

Il modello si alimenta come già detto con le probabilità di default derivate da un sistema di rating interno ed è basato su un orizzonte temporale annuo per la stima del Var di Portafoglio.

I crediti presenti in portafoglio vengono riclassificati per settore economico. Attualmente consideriamo i quindici settori economici utilizzati anche nella BIP (Base Informativa Pubblica della Banca d'Italia), a cui abbiamo aggiunto un settore 'Nessun ramo di attività economica' per il Retail.

Sulla base della stessa riclassificazione vengono calcolate le correlazioni tra tassi di insolvenza e le correlazioni tra asset return a partire dai tassi di decadimento pubblicati da Banca d'Italia.

Per tassi di decadimento si intende 'il rapporto tra i clienti passati a sofferenza rettificata nell'arco di un anno e la base di clientela 'sana' in essere all'inizio del periodo'.

Inoltre l'approccio è detto per 'grandi blocchi' in quanto si ipotizza che

debitori appartenenti al medesimo cluster (es. area geografica e settore economico) risentano in ugual misura dei medesimi fattori macroeconomici suscettibili di determinarne il dissesto.

Seguendo questo schema di ragionamento, diventa possibile modellare la correlazione tra prenditori facendo riferimento direttamente al cluster di appartenenza, e limitandosi a stimare ‘per gruppi’ il grado di dipendenza tra vaste famiglie geo-settoriali di controparti.

Il vantaggio di suddividere i nostri prenditori in gruppi (o cluster) è, oltre a quello di ridurre le dimensioni della matrice di Default Correlation e di alleggerire quindi il calcolo, di avere una maggiore ‘generalità’ delle nostre matrici che ovviamente non variano al variare del numero dei prenditori. Sono state stimate matrici di correlazione settoriali sia su campione nazionale che su campione relativo ad una determinata area geografica. A seconda delle esigenze della banca si potrà applicare una di queste matrici.

Il calcolo per ricavare queste matrici percorre i seguenti passi:

- Stima da parte della Banca d’Italia dei tassi di decadimento delle aziende su un arco temporale di 15 anni
- Calcolo della media e della varianza dei dati per ciascuno dei 16 cluster.
- Costruzione della matrice Varianza- Covarianza tra i tassi di Decadimento.
- Creazione della matrice di Default Correlation media attraverso le seguenti formule:

- Per prestiti appartenenti allo stesso gruppo il coefficiente medio di default correlation è derivato dalla varianza della serie storica dei tassi di decadimento:

$$\bar{\rho} \cong \frac{\sigma_{cr}^2}{p_{cr}(1-p_{cr})} \quad (10)$$

- Per prenditori appartenenti a cluster differenti:

$$\bar{\rho}_{kl} = \frac{\text{Cov}(p_k, p_l)}{\sqrt{p_k(1-p_k)}\sqrt{p_l(1-p_l)}} \quad (11)$$

Si può passare dalla Default correlation alla Asset return correlation attraverso il modello di Merton.

Tale teoria identifica il default nel momento in cui il valore degli attivi aziendali scende al di sotto di un certo livello. Quindi si crea un modello in cui si assume che il tasso di rendimento delle attività aziendali abbia una distribuzione multivariata.

Se il tasso di default medio del cluster  $i$  è  $p$ , il valore soglia (default - non default) è dato dall'inversa della funzione di densità cumulata della distribuzione normale standardizzata:  $\Phi^{-1}(p_i)$ .

Come abbiamo già detto le metodologie messe a disposizione dal sistema per la stima del Var di portafoglio sono di due tipi:

- Simulazione Monte Carlo
- Formula Chiusa

Per quanto riguarda la Simulazione Monte Carlo riportiamo di seguito uno schema logico di quelli che sono i passi salienti nella determinazione della distribuzione delle perdite:

1. Stima delle probabilità di default (definite dal modulo StarRating nel nostro caso)
2. Stima della matrice delle asset return correlation
3. Generazione di numeri casuali correlati (attraverso la scomposizione della matrice delle asset return correlation – Cholesky factorization)
4. Definizione della soglia di insolvenza per ogni impresa, pari all'inversa normale standard della probabilità di insolvenza (*Merton*)
5. Assegnazione dei valori 0 oppure 1 della variabile casuale bernoulliana  $D_i$ , secondo la regola:
  - numero casuale correlato  $>$  soglia di insolvenza = 0  $D_i$
  - numero casuale correlato  $<$  soglia di insolvenza = 1  $D_i$

6. perdita di portafoglio dopo un ‘giro’ è data da:

$$L^1 = \sum_{i=1}^n D_i^1 e_i$$

Iterando il procedimento di Simulazione (per circa 20000 iterazioni) avremo  $L^1, \dots, L^n$  e potremo finalmente tracciare il grafico della distribuzione delle perdite e calcolare quindi il Var ‘tagliando’ la nostra distribuzione empirica ad un dato livello di confidenza.

Mentre la Simulazione Monte Carlo da risultati precisi, nel calcolo del Var, a discapito di tempi di calcolo molto onerosi, la formula chiusa, cioè esclusivamente analitica, risponde ad un’esigenza di ‘velocizzare’ il calcolo producendo in ogni caso dei risultati soddisfacenti.

Ovviamente per far sì che questo sia possibile è necessario fare delle ipotesi a monte sul nostro portafoglio crediti.

Le principali ipotesi che il nostro portafoglio dovrà soddisfare sono:

1. Esposizioni di piccolo ammontare
2. Tasso di recupero deterministico
3. Correlazione solo all’interno dello stesso cluster.

A questo punto si ipotizza di avere un portafoglio omogeneo, ossia con esposizioni di uguale ammontare e determiniamo il numero di default d un dato livello di confidenza. Avendo quest’ultimo, è possibile stimare la perdita come prodotto del numero di default per l’esposizione media tenendo però conto delle Asset Return Correlations e dell’intervallo di confidenza. Quindi per poter passare dalla perdita stimata per un portafoglio omogeneo alla perdita per un portafoglio eterogeneo è necessario trovare la relazione che lega i due portafogli.

Tale relazione è derivata dalle volatilità dei cluster dei due portafogli. E’ verificato infatti che il rapporto tra le suddette volatilità è uguale al rapporto tra



le massime perdite possibili dei due portafogli anche in caso di distribuzioni non normali (ref [Za02]). Quindi calcolando entrambe le volatilità e il loro rapporto si ottiene un multiplo; la massima perdita eterogenea sarà data dal prodotto del multiplo per la massima perdita omogenea. Cioè

$$\frac{\sigma_p(Omogeneo)}{\sigma_p(Eterogeneo)} = \frac{ICC_{Om}}{ICC_{Ete}} = \frac{MaxPerd_{Om}}{MaxPerd_{Ete}}$$

dove

$$ICC_{Om} = \sum_{k=1}^{16} \sqrt{\tilde{\rho}_{kk} + \frac{1 - \tilde{\rho}_{kk}}{n}}$$

e

$$ICC_{Ete} = \sum_{k=1}^{16} \sqrt{\tilde{\rho}_{kk} + IC^2 (1 - \tilde{\rho}_{kk})} \quad \text{con} \quad IC = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N e_i^2}}{\sum_{i=1}^N e_i}$$

Per cui avremo che

$$MaxPerd_{Ete} = \frac{ICC_{Ete}}{ICC_{OM}} MaxPerd_{Om}$$

A questo punto non ci resta che calcolare la Massima perdita omogenea la cui forma è illustrata nel *teorema* (4.4.2).

Nell'ultimo capitolo della tesi riportiamo alcune schermate fondamentali del prodotto StarRisk e alcuni test effettuati su portafogli fittizi e reali, appartenenti a cinque delle banche consorziate con il CSE di Bologna.

Nello spreadsheet, relativo al modello CreditRisk+, reperito su Internet, viene fornito un portafoglio di test rivelatosi molto utile per permettere un immediato confronto con i risultati prodotti dal modello StarPortfolio di Datamat e quello della Credit Suisse First Boston.

Tale portafoglio è composto da 25 crediti di cui vengono messe a disposizione le informazioni relative agli importi, al tasso di default, ed alla deviazione standard di quest'ultimo.

Id. credito	Prob. default	Deviazione standard	Importo
1	0.3	0.15	358475
2	0.3	0.15	1089819
3	0.1	0.05	1799710
4	0.15	0.075	1933116
5	0.15	0.075	2317327
6	0.3	0.075	2410929
7	0.15	0.15	2652184
8	0.3	0.075	2957685
9	0.05	0.025	3137989
10	0.05	0.025	3204044
11	0.015	0.0075	4727724
12	0.05	0.025	4830517
13	0.05	0.025	4912097
14	0.3	0.15	4928989
15	0.1	0.05	5042312
16	0.075	0.0375	5320364
17	0.05	0.025	5435457
18	0.03	0.015	5517586
19	0.075	0.0375	5764596
20	0.03	0.015	5847845
21	0.3	0.15	6466533
22	0.3	0.15	6480322
23	0.016	0.008	7727751
24	0.1	0.05	15410406
25	0.075	0.0375	20238895

Tabella 1: Portafoglio di test di CreditRisk+

E' da notare l'esiguità dei dati necessari per alimentare il modello CreditRisk+: ciò può tramutarsi da 'limite' a pregio in una realtà che, come quella italiana, mostra allo stato attuale, una difficoltà degli Istituti di Credito a 'produrre' serie storiche di particolari tipi di dati.

Quello che si è cercato di fare per il modello **StarPortfolio** è di integrare i dati richiesti dal prodotto del Credit Suisse First Boston, con pochi altri facilmente reperibili, al fine di incrementare il più possibile la 'sensibilità' dei risultati prodotti, e quindi le capacità di decisione.

Le informazioni aggiuntive del modello Datamat, consistono nei dati relativi alla matrice di correlazione geo-settoriale tra tassi di default, a quelli relativi all'area geografica, al ramo di attività economica a cui appartiene la controparte ed il tasso di recupero associato alla forma tecnica del credito.

Come si può immaginare è estremamente difficile ‘validare’, anche a posteriori, la bontà della funzione di distribuzione delle perdite (f.d.p.) che costituisce, sostanzialmente, l’output principale del modello. Tale difficoltà, è dovuta al fatto che ciò che si desidera modellizzare, non è una semplice previsione su quanto avverrà allo scadere dell’orizzonte temporale di riferimento; bensì una previsione, in termini probabilistici, di tutti i possibili scenari futuri. In casi come questo, dunque, ciò che può essere fatto è confrontare l’output con un altro modello per ‘saggiare’ i risultati prodotti. Grazie ad una versione ‘demo’ del modello CreditRisk+ reperibile su Internet è stato possibile effettuare tale confronto.

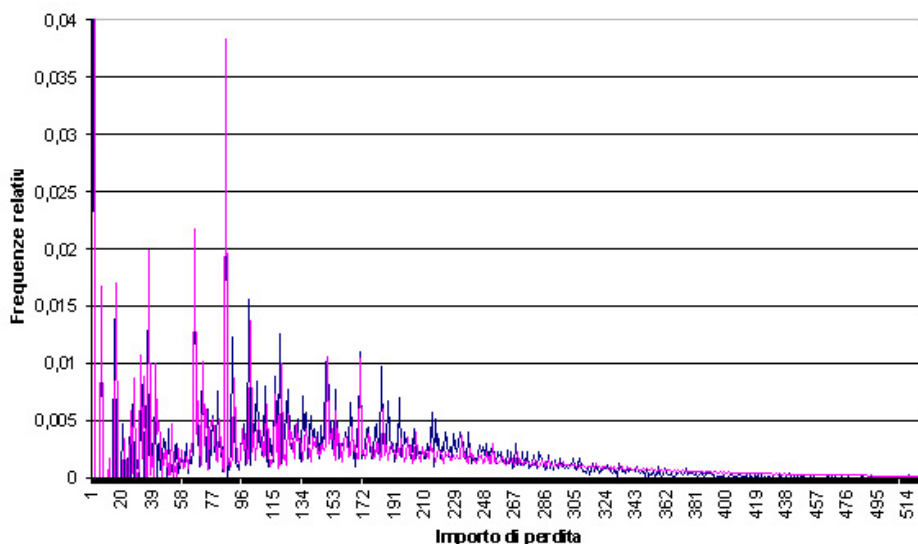


Figura 1: Confronto tra le due f.d.p..

Come si può osservare nella figura (1) le due curve sono qualitativamente praticamente identiche.

Ci si potrebbe a questo punto domandare come mai tali curve siano così simili se un modello (StarPortfolio) tiene conto delle correlazioni geo-settoriali mentre l’altro (CreditRisk+) no; ebbene in realtà, il dato principale a cui siamo interessati, il VaR ad un certo livello di confidenza, è funzione, a meno di una costante (la perdita attesa della f.d.p. delle perdite), dell’integrale di

tali curve. Da ciò consegue che tutte le differenze tra le due vengono ‘cumulate’ via-via che ci si sposta, durante l’integrazione, verso gli importi di perdita più elevati.

Come conseguenza di questo, i VaR calcolati risultano essere quantitativamente differenti, giustificando l’introduzione, nel modello di simulazione, della correlazione geo-settoriale come evidenziato nella seguente figura.



Figura 2: Confronto tra le frequenze cumulate dei due modelli.

Come si può facilmente riscontrare, per valori delle frequenze cumulate prossimi al valore massimo (pari ad 1) la perdita massima prevista, con quel livello di confidenza, sarà inferiore nel modello StarPortfolio (che tiene conto delle correlazioni e quindi dell’effetto diversificazione) rispetto a quella fornita dal modello CreditRisk+. Per verificare tutto ciò graficamente è sufficiente immaginare di tracciare una linea orizzontale in corrispondenza, ad esempio, del valore 0,98 nella (figura 2); è immediato dunque, osservare che la retta intersecherà le due curve delle distribuzioni di probabilità, stimate in punti corrispondenti a importi di perdita differenti.

Un discorso esattamente ‘speculare’ può essere fatto per bassi valori delle frequenze cumulate: in questo caso sarà l’output fornito dal modello CreditRisk+ (non tenendo conto dell’effetto diversificazione in base all’apparte-

nenza delle controparti a differenti clusters) a fornire un valore dell'importo di perdita inferiore a quello 'letto' in corrispondenza della funzione di distribuzione di probabilità individuata attraverso il modello StarPortfolio.

Una spiegazione di questo comportamento differente, fra i due modelli, può risiedere nel fatto che per bassi valori delle frequenze cumulate (corrispondenti a bassi importi di perdita, quindi a scenari 'favorevoli'); un approccio diversificato non è in grado di garantire degli importi di perdita inferiori a quelli che si otterrebbero se si avesse la possibilità di conoscere a priori, quali sarebbero i crediti 'migliori' selezionandoli opportunamente al momento dell'affidamento. Tale circostanza, è proprio quella che corrisponde ai valori corrispondenti a frequenze assolute più basse registrate sulla curva della funzione di distribuzione di probabilità ottenuta con il modello CreditRisk+.

Dalla funzione di densità delle perdite possono, successivamente, essere calcolate le *grandezze sintetiche* di interesse mostrate nella seguente tabella:

Percentile	Massima Perdita		Var	
	CreditRisk+	StarPortfolio	CreditRisk+	StarPortfolio
75%	20498062	20015217	6276199	5793354
95%	38908486	33675000	24686623	19453137
97,50%	46152128	38410000	31930265	24188137
99%	55311503	44183333	41089640	29961470
99,50%	62033181	47816667	47811318	33594803
99,75%	68612540	52216667	54390677	37994803
99,90%	77133478	56583333	62911615	42361470

Tabella 2: Confronto tra le misure sintetiche.

Si può notare facilmente come gli importi di perdita stimati con i vari livelli di confidenza (e di conseguenza i rispettivi VaR) differiscano di pochissimo fino al 90° percentile e successivamente differiscano sempre di più all'aumentare del percentile. Come già spiegato in questo paragrafo tali differenze sono per lo più dovute ad una 'gestione più sensibile' dell'effetto diversificazione tramite le correlazione tra tassi di insolvenza delle correlazioni geo-settoriali da parte del modello StarPortfolio.

# Bibliografia

- [Ba00] P. Baldi, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*. Pitagora Editrice, 2000.
- [Ba98] P. Baldi, *Calcolo delle probabilità e statistica*. McGraw-Hill Libri Italia srl 1998.
- [Be00] A. Beltratti, *I mercati finanziari*, Carocci Editore, Roma 2000.
- [Bo01] Dai Bo, *Value at risk*, (undergraduate Research opportunity), University of Singapore, 2001.
- [dL00] De Laurentis, *Rating interni e credit risk management*, Bancaria Editrice, 2000.
- [EL01] L. Elie Lapeyere, *Introduction aux methodes de Montecarlo*, 2001.
- [GHS00] P. Glasserman, P. Heidelberger, P. Shahabuddin, *Efficient Monte Carlo methods for value-at-risk*. *Mathematical Finance*, 9:117-152, 2000.
- [Hu97] J. Hull, *Opzioni futures e altri derivati*, Il Sole24ore libri, 1997.
- [LL96] D. Lamberton & B. Lapeyre, *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [Lu01] Giovanni della Lunga, *Il metodo Montecarlo*, appunti lezione, Bologna 2001.

- [Ma00] F.Masera, *Rischio di credito e derivati creditizi per le istituzioni finanziarie*, Futura 2000, 2000
- [Me01] Fernando Metelli, *Il rischio finanziario. Origine e strumenti di misura*, Il sole24ore libri, 2001.
- [Re01] A. Resti, *Misurare e gestire il Rischio di Credito nelle Banche*, Alpha Test, Milano 2001
- [RS01] A.Resti, A. Sironi, *Legame tra probabilità di default e tasso di recupero atteso:un possibile inquadramento teorico basato sul modello di Merton.*, working papers, 2001.
- [Ru83] Rubinstein, *Simulation and the Montecarlo Method*, John Wiley & Sons, 1983.
- [SR01] Rangarajan K. Sundaram, *The Merton/KMV Approach to Pricing Credit Risk*, 2001.
- [SA00] A. Saunders, L. Allen *Credit Risk Measurement*, Wiley Finance, 2000
- [ZB02] C. Zazzara Benninga,(Capitolo 25) Il VaR sul rischio di credito: un'applicazione del modello CreditMetrics *Credit Metrics*, Roma, 2002
- [Za02] C. Zazzara , *Credit Risk in the Traditional Banking Book: A VaR Approach Under Correlated Defaults*, Research in Banking and Finance, Vol. 2, pp. 355-384, Elsevier Science Ltd., North Holland, 2002.