UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Il Teorema della Ricorrenza per passeggiate aleatorie

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica
di Claudio Celegato
Relatore: Prof. Elisabetta Scoppola

Sia $X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite di codominio $\{+1, -1\}$ tali che

$$\mathbf{P}(X_j = +1) = \mathbf{P}(X_j = -1) = \frac{1}{2} \qquad \forall j \geqslant 1.$$

Indichiamo poi con $\{S_n\}$ la successione delle somme parziali definite tramite

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \qquad (S_0 := 0).$$

Sarà la nostra *passeggiata aleatoria (semplice e simmetrica)*, di cui daremo una definizione equivalente con le *catene di Markov* nel Capitolo 2. Intuitivamente associeremo il valore di S_n allo spostamento di una particella localizzata nell'origine ad un tempo iniziale nullo. Analizziamo quindi la definizione di ricorrenza.

Definizione 0.0.1. *La passeggiata aleatoria è* ***ricorrente*** *se la particella torna con probabilità 1 nell'origine. In caso contrario diremo che è* ***transiente****.*

Si osservi che non si è dato rilievo alla direzione del primo passo (destra o sinistra) della particella. Ci poniamo le seguenti domande.

1. La particella ritorna prima o poi nell'origine? Vi ritorna infinite volte? Ovvero qual'è la probabilità che l'evento $\{S_n = 0\}$ si realizzi per qualche n, o per infiniti valori (i.o. come abbreviazione) di n?

2. E se ciò accade, dopo quanto tempo (in media) mi aspetto avvenga?
3. Cosa succede se la dimensione dello spazio ($\mathbb{Z}^d$) è maggiore di uno?

Ai punti 1 e 3 daremo una risposta nei Capitoli 3,4 tramite varie tecniche dimostrative che fanno uso dei Lemmi di Borel-Cantelli, della Legge 0-1, della Legge del Logaritmo Iterato, di un'applicazione della teoria delle martingale (la "rovina del giocatore") e via dicendo, argomenti tutti raccolti nel Capitolo 1. Al punto 2 risponderemo nel Capitolo 3.4 tramite i risultati della teoria delle martingale.

In particolare dimostreremo quanto sviluppato da Pólya nel 1921:

Teorema della Ricorrenza

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{S}_{2n} = \mathbf{0},\ \text{i.o.}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad d \leqslant 2 \\ 0 & \text{se} \quad d > 2 \end{cases} .$$

Introduciamo ora un *mezzo aleatorio*, ovvero una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite

$$\mathcal{E} = \{\ldots, E_{-2}, E_{-1}, E_0, E_1, E_2, \ldots\}$$

con funzione di distribuzione

$$F(x) = \mathbf{P}(E_0 < x), \qquad F(0) = 0, \qquad F(1) = 1.$$

Per definire la passeggiata (in un mezzo aleatorio) ci serviremo ancora delle catene di Markov; al posto del parametro $p = 1/2$ quale probabilità di transizione vi sarà però una variabile aleatoria E_l.

Le domande saranno le stesse del caso precedente. Mancherà giusto la 3, dato che analizzeremo il caso unidimensionale. Le risposte saranno raccolte nel Capitolo 5. In particolare, perdendo la simmetria che caratterizzava i precedenti Capitoli, dovremo riformulare il concetto di *ricorrenza*. Questo perchè, mentre nella definizione precedente (in virtù della simmetria del sistema) non aveva importanza se il primo passo veniva fatto a destra o a sinistra dell'origine, ora tale cosa assume un'importanza fondamentale, tanto da meritarsi una definizione.

Definizione 0.0.2. *In un mezzo aleatorio assegnato $\mathcal{E}$, definisco* ***escursione a destra (sinistra)*** *una passeggiata aleatoria unidimensionale il cui primo passo è fatto a destra (sinistra). Definisco quindi tale sistema* ***ricorrente a destra (sinistra)*** *se per ogni escursione a destra del sito di partenza (origine) la particella vi torna con probabilità 1. Infine il sistema è* ***ricorrente****, se è ricorrente a destra e a sinistra.*

Dimostreremo quindi il seguente teorema.

Teorema della Ricorrenza di Solomon. In un mezzo fissato $\mathcal{E}$ e sotto le condizioni

(a) esiste $\beta \in (0, 1/2)$ tale che

$$\mathbf{P}_1(\beta < E_0 < 1 - \beta) = 1,$$

(b)

$$0 < \sigma^2 := \mathrm{Var}\,[V_0] < \infty, \qquad V_0 := \log \frac{1 - E_0}{E_0},$$

il sistema è

(i) ricorrente a destra se e solo se

$$\mathbb{E}_1 \left[\log \frac{1 - E_0}{E_0} \right] \geqslant 0;$$

(ii) ricorrente a sinistra se e solo se

$$\mathbb{E}_1 \left[\log \frac{1 - E_0}{E_0} \right] \leqslant 0;$$

(iii) ricorrente se e solo se

$$\mathbb{E}_1 \left[\log \frac{1 - E_0}{E_0} \right] = 0.$$

Bibliografia

[1] P. Révész, *"Random Walk in Random and Non-random Environments"*, World Scientific, 1990.

[2] B.D. Hughes, *"Random Walks and Random Environments"*, Vol. I, Clarendon Press, 1995.

[3] B.D. Hughes, *"Random Walks and Random Environments"*, Vol. II, Clarendon Press, 1995.

[4] P. Billingsley, *"Probability and Measure"*, Second Edition, John Wiley & Sons, 1986.

[5] F. Spitzer, *"Principles of Random Walks"*, Springer-Verlag, 1976.

[6] K.L. Chung, *"A Course in Probability Theory"*, Second Edition, Academic Press, 1974.

[7] S.M. Nikolskij, *"Corso di Analisi Matematica"*, Vol. I,II, Prima Edizione, Edizioni Mir, 1985.

[8] S.I. Resnick, *"A Probability Path"*, Birkhauser, 1998.

[9] D. Williams, *"Probability with Martingales"*, Cambridge University Press, 1992.