UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica di

Sara Cervone

Regressione dei quantili e metodo della copula per la stima del valore a rischio di un portafoglio

Relatore

Prof. Alessandro Ramponi

Il Candidato | Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004

Classificazione AMS : 62Jxx, 62P05, 91B82,

Parole Chiave : Regressione dei quantili, funzione di copula, Valore a Rischio, Metodi Monte Carlo .

Sara Cervone è nata a Roma il 17/05/1981.

Ha conseguito il diploma di Liceo Scientifico indirizzo P.N.I., con la votazione 90/100, presso il Liceo Scientifico Statale 'Augusto Righi' nel Luglio 1999.

Si è immatricolata nel settembre 1999 alla facoltà di Matematica presso l'università degli studi 'Roma Tre'.

Nell' A.A. 2001-2002 ha vinto la borsa di collaborazione presso i laboratori di informatica per il corso di studio in Matematica. Nell' A.A. 2002-2003 ha vinto la borsa di collaborazione presso i laboratori di informatica per il corso di studio in Fisica.

Ha scelto le seguenti prove di qualificazione: 'Corpo nero e fotoni' e 'Dinamiche di prezzo binomiale: il modello di CRR'. Ha discusso la seconda nel novembre 2003.

Sintesi

I disastri finanziari degli ultimi anni hanno enfatizzato l'importanza della valutazione del rischio effettivo insito nelle operazioni finanziarie. L'uso di misure di rischio quantitative è diventato indispensabile nella gestione dei portafogli tanto da esser introdotto nei modelli dei rendimenti. Queste misure vengono utilizzate, ad esempio, per le decisioni di investimento o per i rischi delle allocazioni di capitali. Il Valore a Rischio è diventato negli ultimi anni una misura di rischio standard impiegata dalle istituzioni finanziarie e dai loro regolatori. Il VaR non è altro che una stima di quanto un certo portafoglio può perdere in un dato periodo di tempo e ad un dato livello di confidenza. La grande popolarità che questo strumento ha raggiunto tra i professionisti della finanza è dovuta alla semplicità del suo concetto: malgrado questa sua semplicità concettuale però, il calcolo del VaR è un problema statistico rilevante e nessuna delle metodologie finora sviluppate ci fornisce soluzioni soddisfacenti.

I modelli esistenti per calcolare il VaR differiscono tra loro nella metodologia usata, cioè cambiano le assunzioni fatte e il metodo per l'implementazione. Possiamo dire però che i modelli attualmente esistenti seguono una struttura generale comune, che può essere schematizzata in tre punti:

1. Il portafoglio è 'agganciato' al mercato, risente cioè delle mutazioni giornaliere del mercato. Vengono a questo proposito utilizzati opportuni modelli che stimano i parametri delle distribuzioni considerate, tenendo conto dei fattori esterni che influenzano l'andamento, ad esempio, del mercato borsistico;

2. Determinazione della distribuzione dei rendimenti del portafoglio. Il caso più semplice, ma anche quello meno realistico, è l'assunzione di una distribuzione Gaussiana;

3. Calcolo del VaR del portafoglio stesso, visto come il quantile della suddetta distribuzione.

Le principali differenze tra i diversi modelli sono relative al secondo punto, cioè al problema della determinazione della distribuzione del portafoglio. Il calcolo del VaR si riduce quindi alla stima di uno specifico quantile della distribuzione del valore del portafoglio. L'obiettivo principale di questa tesi è stato quello di presentare due tra i più recenti modelli per la determinazione del VaR; la regressione quantilica ed il metodo delle copule. Convenzionalmente l'approccio varianza-covarianza con l'assunzione che i rendimenti siano 'log-normali' è quello più usato per il calcolo del VaR, anche se nel mercato reale molti studi empirici hanno mostrato che, frequentemente, i rendimenti non sono distribuiti in modo gaussiano. La regressione lineare classica, che si basa sulla minimizzazione delle somme di differenze di quadrati, ci permette di stimare **modelli per le medie condizionate**. La regressione dei quantili ci offre invece un meccanismo per stimare **modelli per le mediane condizionate** o per un qualunque quantile condizionato: il quantile della distribuzione opportunamente scelta è dunque il valore a rischio da noi richiesto.

Un altro potente e, ultimamente anche molto usato, metodo per il calcolo del VaR è rappresentato dall'uso delle copule: esse infatti presentano un modo generale per costruire distribuzioni multivariate e per studiare la struttura di dipendenza tra le variabili aleatorie. Una copula non è nient'altro che la funzione di distribuzione congiunta di un vettore di variabili aleatorie uniformi, siamo quindi in grado di separare le marginali di tale vettore dalla struttura di dipendenza, rappresentata proprio dalla copula. Il concetto di copula fu introdotto da Sklar [1959] e studiato in seguito da altri. In questa trattazione si è fatto riferimento al libro di Nelsen [1999].

Nel **Capitolo 1** abbiamo approfondito il concetto di quantile, sia nel caso della teoria non condizionata che in quella condizionata, verificando che valgono le seguenti relazioni:

$$\bar{X}_n = arg \min_{\mu \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2,$$

$$m_n = arg \min_{c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |x_i - c| \, .$$

Abbiamo quindi generalizzato ad un generico quantile l'ultima di queste relazioni, enunciando il teorema di Koenker e Basset del 1978, che afferma che:

$$\hat{Q}_n(\tau) = arg \min_{c \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau (y_i - c),$$

dove $\hat{Q}_n(\tau)$ è il τ–esimo quantile empirico e ρ_τ è la 'funzione di test'.

Facendo un parallelo con la regressione lineare classica abbiamo definito il modello di regressione lineare quantilica che specifica una relazione lineare tra i quantili di una variabile dipendente Y ed i valori di un insieme di variabili indipendenti, o covariate, $X_1, \cdots, X_n$ ed il corrispondente problema di stima la cui soluzione è:

$$\hat{\beta}(\tau) = arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau (y_i - x_i^{'} \beta),$$

dove $0 < \tau < 1$ è un arbitrario quantile e $\rho_\tau = \tau u I_{[0,+\infty)} - (1-\tau) u I_{(-\infty,0)}$. Abbiamo quindi illustrato i più noti risultati della teoria quantilica sviluppata da Koenker e Basset, riguardanti l'esistenza e l'unicità della soluzione al problema di minimo precedente, mettendo in evidenza, con il famoso esempio di Engel, quanto la regressione classica senta molto di più rispetto a quella quantilica l'influenza di valori detti 'outliers'.

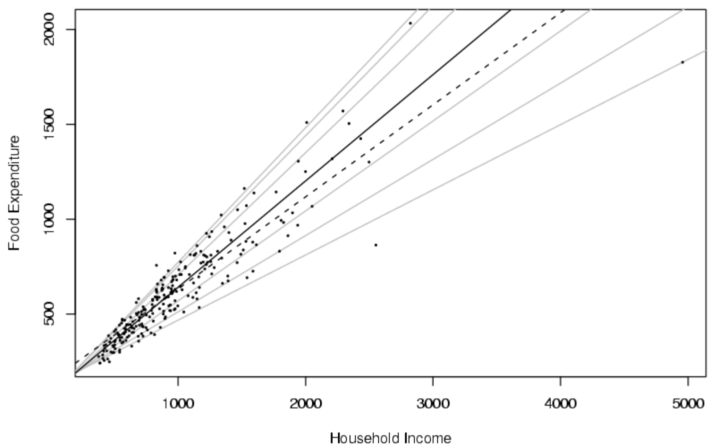


Figura 1: La curva di Engel

Analizzando i metodi e gli algoritmi di stima, abbiamo concentrato la nostra attenzione sull'algoritmo di Koenker e D'Orey, il quale però utilizza un metodo detto di 'interior points'. Dopo aver definito i log-rendimenti come

$$R - t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}},$$

(dove S_t è il prezzo al giorno t di ogni singola azione), abbiamo applicato il suddetto algoritmo per 'spiegare' i log-rendimenti di *S.T.Microsoft Electronics* attraverso i log-rendimenti di *Finmeccanica*, considerando un periodo di 200 giorni borsistici (dal 1 Gennaio 2002 al 25 Settembre 2002). La regressione quantilica ai diversi quantili è riportata in Figura 2.

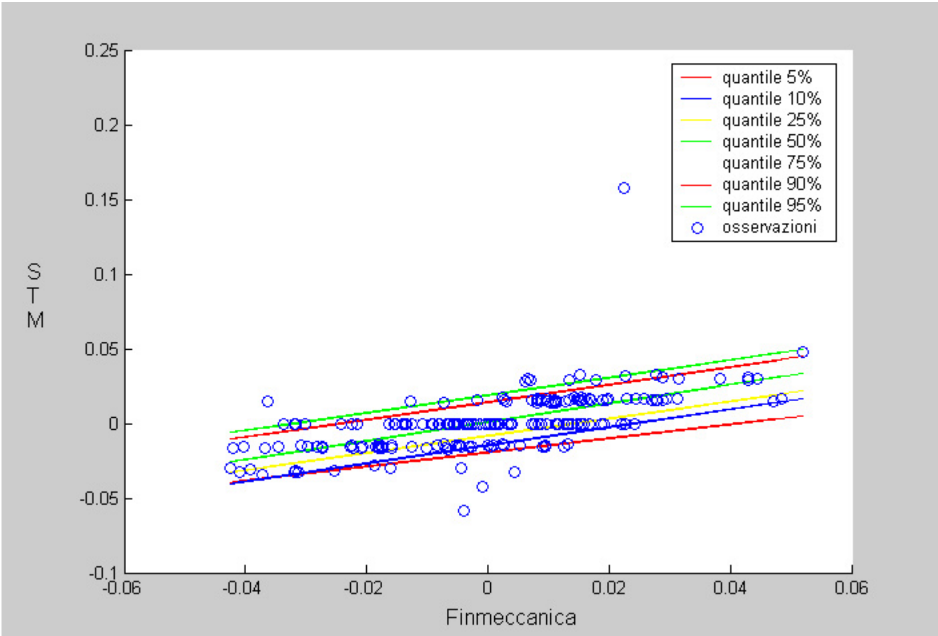


Figura 2: Regressione quantilica

In ultimo abbiamo brevemente discusso le proprietà principali della regressione quantilica: equivarianza, invarianza per trasformazioni monotone, robustezza, goodness of fit e asintoticità.

Nel **Capitolo 2** abbiamo introdotto per la prima volta il concetto di copula come 'funzione che associa distribuzioni bivariate a distribuzioni marginali unidimensionali', o come 'funzione di distribuzione le cui marginali unidimensionali sono uniformi'. Si è poi data la definizione di copula ed analizzato i principali risultati della teoria associata, dando particolare rilievo al risultato più importante: il teorema di Sklar [1959], il quale enuncia l'unicità della copula quando la distribuzione bivariata delle due variabili aleatorie è nota e le marginali sono continue:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)),$$

dove H è la funzione di distribuzione congiunta, F e G le funzioni di distribuzione di due variabili aleatorie X e Y. E' stata di particolare utilità, ai fini del lavoro, l'analisi delle famiglie di copule a due parametri: la copula Gumbel-Hougaard

$$C_\theta(u, v) = \exp\left\{- \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}$$

e la copula Gaussiana

$$C_{Gauss}(u, v) = \int_{-\infty}^{\phi_1^{-1}(u)} dy_1 \int_{-\infty}^{\phi_2^{-1}(v)} dy_2 f(y_1, y_2),$$

dove ϕ_1 è una funzione di densità normale unidimensionale.

Partendo dal più comune e più noto modello Delta-Normale, nel **Capitolo 3**, abbiamo illustrato dei metodi per il calcolo del valore a rischio ad un certo livello di confidenza, abbiamo cioè calcolato il V^* tale:

$$P(\Delta V \leq -V^*) = \tau,$$

supponendo che i rendimenti delle azioni costituenti il nostro portafoglio azionario siano distribuiti secondo una legge

$$R_t \sim N(0, \sigma^2 \Delta t).$$

In altri termini $-V^*$ è il τ–quantile della variabile aleatoria ΔV; con le notazioni del Capitolo 1 si ha:

$$-V^* = Q_{\Delta V}(\tau).$$

Sotto l'ipotesi di Delta Normalità per un portafoglio con più tipologie di azione, ad esempio due, vale la proprietà di *sub-additività*, cioè se $-V^* = W^*$ si ha

$$W^*_\tau(Y_1 + Y_2) \leq W^*_\tau(Y_1) + W^*_\tau(Y_2).$$

Questa condizione **può essere violata nel caso in cui si prendessero altre distribuzioni**, ma ciò da un punto di vista finanziario determina un indebolimento della robustezza teorica del concetto di VaR, in quanto risulterebbe più rischioso investire in un portafoglio di titoli aggregati piuttosto che nei singoli titoli.

Applicando il suddetto modello ad un portafoglio con m tipologie di azione, si può esprimere una formula più generale per il calcolo del VaR come segue:

$$V^* = z_{1-\tau}\sqrt{\Delta t}\left(\sum_{i,j=1}^{m} n_i n_j S_0^{(i)} S_0^{(j)} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\right)^{1/2}.$$

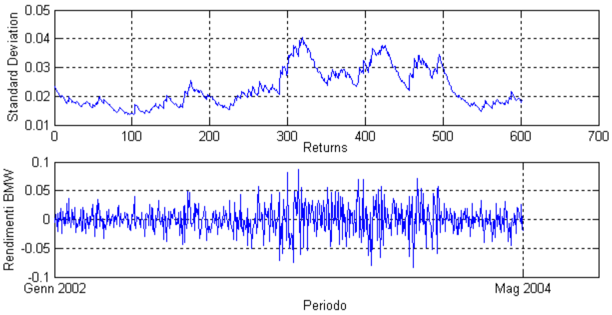
In tutti i modelli però, il nodo cruciale per il calcolo del VaR è rappresentato dalla stima della volatilità: il modello da noi utilizzato più in dettaglio è stato il modello GARCH(1,1) (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), proposto da Bollerslev nel 1986, descritto dalle seguenti equazioni:

$$R_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

dove R_t sono i rendimenti condizionati alle informazioni possedute fino al tempo $t-1$, denotate con $\mathcal{F}_{t-1}$. In altri termini, abbiamo applicato tale modello ad un portafoglio composto solo da azioni di tipo *BMW*, considerando un periodo di circa 600 giorni che va da Gennaio 2002 a Maggio 2004. Abbiamo, tramite la funzione di verosimiglianza, stimato i parametri del modello ottenendo così i seguenti risultati: Infine abbiamo calcolato il valore a ris-

Parametri	**Valori stimati**
α_0	6.3414e-006
β_1	0.92385
α_1	0.065258



chio con uno dei più comuni metodi simulativi: il metodo Monte Carlo. Lo abbiamo applicato in tre differenti situazioni: la prima puramente artificiale, non considerando cioè un vettore di dati reali, la seconda in cui abbiamo costruito la matrice delle varianze empiriche basandoci sulle 2 serie storiche dei dati reali considerati, quali *Finmeccanica* e *S.T.Microsoft Electronics*; nel terzo abbiamo calcolato la distribuzione empirica di ΔV, basandoci sui rendimenti dei titoli presi in considerazione per la precedente situazione.

A conclusione del lavoro svolto, abbiamo finalmente visto che ruolo gioca la regressione dei quantili e l'applicazione delle copule al VaR giornaliero.

Supponendo pari ad 1 euro il valore iniziale del portafoglio, otteniamo $\Delta V = R_t$; abbiamo dovuto quindi modellizzare R_t e lo abbiamo fatto assumendo un modello autoregressivo semplice del tipo AR(1), cioè

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \epsilon_t,$$

dove assumiamo che gli ϵ_t siano IID, e che

$$\mathbb{E}\left[\epsilon_t\right] = 0,$$

$$\mathrm{var}\left[\epsilon_t\right] = \sigma^2.$$

Assumendo $t-1$ come il momento corrente, abbiamo calcolato il valore a rischio di domani in base ai dati di oggi e al modello prescelto, determinando il $-V^*$ tale che:

$$\begin{aligned} \tau = P(\Delta V_t < -V_t^*|\mathcal{F}_{t-1}) &= \\ &= P(R_t < -V_t^*|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= P(\alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + \epsilon_t < -V_t^*|\mathcal{F}_{t-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} -V_t^*(\tau) &= f(Q_{\epsilon_t}(\tau)) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 R_{t-1} + Q_{\epsilon_t}(\tau|\mathcal{F}_{t-1}), \end{aligned} \tag{2}$$

dove $Q_{\epsilon_t}(\tau|\mathcal{F}_{t-1})$ è il τ–esimo quantile condizionato. Il valore a rischio è quindi determinato dalla seguente relazione:

$$V_t^*(\tau) = -\alpha_0 - \alpha_1 R_{t-1} - Q_{\epsilon_t}(\tau|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Per poter quantitativamente calcolare V^*, si è dovuto necessariamente modellizzare il quantile condizionato di ϵ_t, tramite l'algoritmo di Koenker e Basset.

Con i valori stimati si è giunti a definire il VaR come:

$$V_t^*(\tau) = -\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 R_{t-1} - \hat{\beta}_0(\tau) - \hat{\beta}_1(\tau) \left| R_{t-1} \right|.$$

Abbiamo esaminato più in dettaglio la teoria delle copule, perchè recentemente esse sono state introdotte con successo in finanza per il calcolo del VaR. Abbiamo calcolato quindi il valore a rischio del portafoglio composto da azioni *Fiat* e *BMW*, per un periodo che va dal 1 Gennaio 2002 al 31 Maggio 2004, tramite l'uso delle copule, generando, sempre con il metodo Monte Carlo, coppie di valori basati però su variabili aleatorie la cui struttura di dipendenza è definita tramite una copula. Supponendo che le due variabili aleatorie, corrispondenti ai rispettivi rendimenti, Y_1 e Y_2 abbiano funzione di distribuzione $F_1(y_1)$ e $F_2(y_2)$, denotate anche semplicemente con F_1 e F_2, abbiamo considerato la copula per la struttura di dipendenza, appartenente alla famiglia delle Gumbel-Hougaard. Tramite la massimizzazione della funzione di verosimiglianza

$$\hat{l}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_\theta(u, v) \left|_{u=\phi_1(Y_{1i}), v=\phi_2(Y_{2i})} \right. \right)$$

abbiamo stimato il parametro $\hat{\theta}$ per θ della copula. L'algoritmo poi implementato per arrivare al calcolo del VaR consiste nei seguenti passi:

1. Generiamo dunque due variabili indipendenti in $[0, 1]$ uniformi u e w.

2. Calcoliamo $v = C_{\theta_{max},u}^{-1}(w)$, dove $C_{\theta_{max},u}$è data dall'equazione

$$C_{\theta,u}(v) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial u} C_\theta(u, v)$$

3. Finalmente determiniamo $Y_1 = \phi_1^{-1}(u)$ e $Y_2 = \phi_2^{-1}(v)$ per ottenere una coppia (Y_1, Y_2) di numeri random con la struttura di dipendenza desiderata.

A questo punto abbiamo ottenuto n coppie di valori (Y_1, Y_2) e per ognuna di esse calcolato il valore del portafoglio

$$\Delta V = \alpha Y_1 + (1 - \alpha) Y_2,$$

ne abbiamo fatto l'istogramma (v. figura seguente) e ne abbiamo calcolato il quantile ad un dato livello.

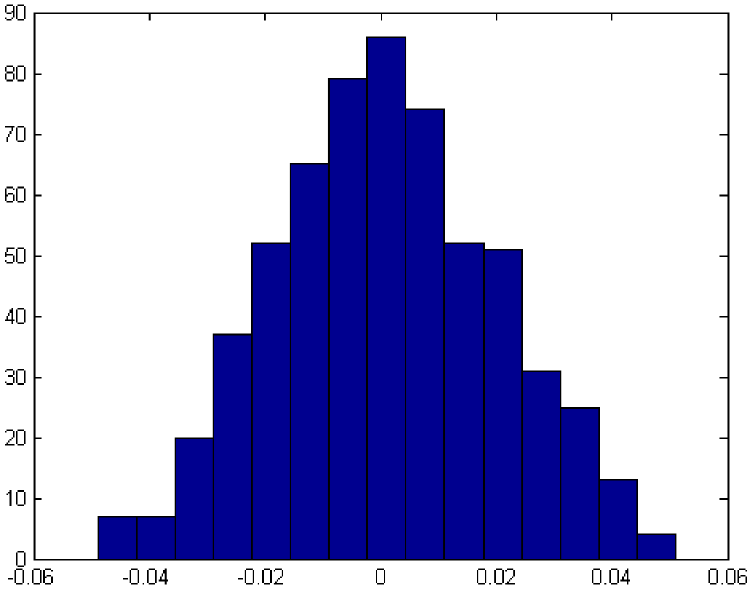


Figura 3: Istogramma del portafoglio

Nelle Appendici sono riportate per esteso le implementazioni in linguaggio Matlab dei suddetti algoritmi.

Bibliografia

[AMGB82] R. Alexander M. Mood, Franklin A.Graybill, Duane C.Boes *Introduzione alla statistica*, McGraw-Hill.

[Hu99] John C.Hull (1999) *Opzioni Futures e altri derivati*, Il sole 24 ore.

[Ne99] Roger B. Nelsen (1999) *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.

[KB78] R. Koenker and G.Basset (1978) Regression quantiles, *Econometrica*, 46, 33-50.

[KP87] R. Koenker and S.Portinoy (1987) L-Estimation for Linear Models, *Journal of the American Statisticial Association*, Vol.82, No 399, 851-857.

[YLS03] K. Yu, Z. Lu and J. Stander (2003) Quantile regression: applications and current research areas, *The Statistician*, 52, Part 3, 331-350.

[KD87] R. Koenker and V. D'Orey (1987) Computing Regression Quantiles, *Applied Statistics*, 36, 383-393.

[Va96] R.J. Vanderbei (1996) *Linear Programming: Foundations and Extensions*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[EM99] R. Engle and Manganelli (1999) CAViaR: conditional autoregressive value at risk by regression quantiles, *NBER*, 7341.

[WX02] G. Wu and Z. Xiao (2002) An analysis of risk measures, *Journal of Risk*, 3, 53-60.

[JR00] Jorn Rank (2000) Copulas in Financial Risk Management.