



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Tesi di Laurea Specialistica in Matematica  
Sintesi

# La geometria della sfera e applicazioni

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Candidato

Valeria Congedo

Anno Accademico 2010-2011

Luglio 2011

Parole chiave: sfera, curvatura, GPS

MRcode: 53C22, 53C30

# *Sintesi*

In questo elaborato si studia la geometria della sfera perché la Terra, in una prima approssimazione, può essere considerata sferica. La geometria sferica, già nota dall'antichità, fu messa in relazione con la problematica delle geometrie non euclidee inconsapevolmente da Saccheri e definitivamente da Bernhard Riemann. Essa possiede una immediata interpretazione nella geometria euclidea, infatti il suo modello si presenta come descritto dalla geometria della superficie di una sfera e questo è solo uno dei punti di vista attraverso i quali si studia tale geometria. Dopo aver parlato della sua nascita, la geometria sferica viene analizzata sotto un primo aspetto sintetico in cui si mettono in luce le differenze e le analogie con il piano euclideo, inclusi gli aspetti trigonometrici. In un secondo momento si esamina tale geometria da un punto di vista analitico, dove le relazioni algebriche mettono in evidenza altri aspetti della geometria sferica e viene presentata una completa descrizione del gruppo delle isometrie sulla superficie sferica e la classificazione dei suoi sottogruppi finiti. La geometria della sfera, inoltre, è analizzata attraverso un ulteriore strumento matematico: la geometria differenziale, la quale mette a fuoco sia la proprietà principale della sfera, quella di essere l'unica superficie ad avere curvatura costante positiva, e sia le proprietà dei cerchi massimi: geodetiche in senso differenziale; fino ad arrivare alla sua applicazione nella moderna tecnologia: il GPS, un sistema di posizionamento particolarmente preciso, creato dal Dipartimento della Difesa Statunitense per fini militari e successivamente utilizzato per scopi civili, è basato su una costellazione di satelliti artificiali, mediante il quale qualsiasi utente, che disponga di un idoneo apparato ricevente, è in grado di rilevare le proprie coordinate planimetriche ed altimetriche in qualunque punto della terra esso si trovi. Numerosi sono gli ambiti di applicazione del sistema GPS: navigazione aeronavale, ricerca di percorsi stradali, creazione di mappe, ricerche sui terremoti, studi climatici e persino giochi all'aperto come il geocaching (la caccia al tesoro dell'era digitale).

Nel dettaglio la tesi è così organizzata:

**Nel primo capitolo** viene presentato il problema del V postulato degli Elementi di Euclide ed il grande dibattito, ad esso legato, che ha coinvolto, per più di duecento anni, tutta la matematica occidentale e che ha portato alla nascita delle geometrie non euclidee, quali la geometria iperbolica e quella ellittica. Si puntualizza il fatto che esistono due diversi tipi di geometria ellittica: la *geometria ellittica semplice*, in cui si identificano i punti diametralmente opposti sulla superficie sferica e la geometria ellittica doppia, detta *geometria sferica* dove tali punti non sono identificati. Già Euclide nei Libri XI e XII analizza la sfera e Saccheri nel tentativo di dimostrare il V postulato, utilizzando il famoso "quadrilatero", contempla la geometria sferica nell'ipotesi dell'angolo ottuso. In riferimento alla riformulazione del sistema assiomatico euclideo di Hilbert, viene, poi, definito quello della geometria sferica apportando le opportune modifiche.

**Nel secondo capitolo** si analizza la geometria sferica dal punto di vista sintetico. Si descrivono i concetti base del modello sferico quali: cerchio massimo, archi di cerchio massimo, punti antipodali, fuso sferico, triangolo sferico e le loro proprietà, confrontandoli con quelli del piano euclideo. In particolare si mette in luce che

**Teorema 1.** *La curva di lunghezza minima che congiunge due punti  $P$  e  $Q$  sulla superficie sferica, è l'arco di cerchio massimo passante per essi.*

Nella dimostrazione di questo teorema si analizza anche il fatto che sulla superficie sferica vale la disuguaglianza triangolare sia per gli archi di cerchio massimo sia per gli angoli al centro da essi sottesi.

**Teorema 2.** *Dato un triangolo sferico costruito su una sfera di raggio  $R$  di angoli  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , l'area  $A$  del triangolo è:*

$$A = R^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

**Teorema 3.** *La somma degli angoli interni di un triangolo sferico è sempre maggiore di  $\pi$  ed è espressa dalla formula ellittica, che in una sfera di raggio  $R$ , è pari a*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/R^2 .$$

*Il termine  $A/R^2$  prende il nome di eccedenza angolare o eccesso sferico del triangolo e si indica con  $E$ .*

In geometria sferica i criteri di congruenza dei triangoli sono quattro: oltre ai tre validi nel piano euclideo, si ha che

**Teorema 4.** *Due triangoli sferici sono congruenti (o uguali) se hanno angoli corrispondenti congruenti (o uguali).*

Questo teorema mette in luce che

**Corollario 1.** *Triangoli sferici simili sono necessariamente uguali.*

Nel terzo capitolo si mettono in relazione i lati e gli angoli dei triangoli sferici e si analizzano i principali teoremi di trigonometria sferica: prima quelli riguardanti triangoli sferici qualunque, poi i teoremi applicati ai triangoli rettangoli sferici, tra cui

**Teorema 5. TEOREMA DEL SENO**

*In un triangolo sferico il rapporto fra il seno di un angolo e il seno del lato opposto è costante.*

**Teorema 6. TEOREMA DI EULERO (O DEL COSENO)**

*In un triangolo sferico il coseno di un lato è uguale al prodotto dei coseni degli altri due più il prodotto dei seni degli stessi moltiplicati per il coseno dell'angolo compreso.*

**Teorema 7. TEOREMA DELLA COTANGENTE**

*In un triangolo sferico due lati e due angoli consecutivi sono in relazione nel seguente modo:*

$$\begin{aligned}\cot a \sin c &= \cos c \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cot \widehat{A} \\ \cot a \sin b &= \cos b \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cot \widehat{A} \\ \cot b \sin a &= \cos a \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cot \widehat{B} \\ \cot b \sin c &= \cos c \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cot \widehat{B} \\ \cot c \sin a &= \cos a \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cot \widehat{C} \\ \cot c \sin b &= \cos b \cos \widehat{A} + \sin \widehat{A} \cot \widehat{C}\end{aligned}$$

**Teorema 8. TEOREMA DI PITAGORA**

*Su una sfera di raggio  $R$ , per un triangolo rettangolo i cui cateti sono lunghi  $a$  e  $b$  e l'ipotenusa sia lunga  $c$  si ha*

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right) \cos\left(\frac{b}{R}\right).$$

Nella dimostrazione di questo teorema si analizza il fatto che tale relazione si riduce al classico Teorema di Pitagora quando il raggio della sfera tende all'infinito.

**Il quarto capitolo** studia la geometria sferica da un punto di vista analitico. Facendo uso dell'algebra vettoriale, si pone l'attenzione sulla geometria analitica della sfera, intesa come sottoinsieme di uno spazio tridimensionale. Si ripropongono alcune definizioni e proposizioni dei capitoli precedenti e se ne studiano altre. In particolare si descrivono le isometrie sulla sfera:

**Definizione 1.** *Per ogni cerchio massimo  $l$ , la riflessione rispetto a  $l$  è la mappa  $\Omega_l$  definita da  $S^2$  in  $S^2$ , data da*

$$\Omega_l X = X - 2 \langle X, \xi \rangle \xi$$

dove  $\xi$  è un polo per  $l$ .

**Definizione 2.** Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono cerchi massimi passanti per un punto  $P$ , allora l'isometria  $\Omega_\alpha\Omega_\beta$  è detta rotazione intorno a  $P$ . Il caso speciale di  $\alpha = \beta$  determina l'identità, una rotazione banale. Se  $\alpha \neq \beta$  la rotazione è detta non banale. L'insieme di tutte le rotazioni intorno a  $P$  si denota con  $ROT(P)$ .  
Notare che  $ROT(P) \cong SO(2)$ .

**Definizione 3.** Sia  $l$  un cerchio massimo e siano  $m$  e  $n$  rette perpendicolari a  $l$ . La trasformazione  $\Omega_m\Omega_n$  è detta traslazione lungo  $l$ . Se  $m \neq n$ , la traslazione è non banale. L'insieme di tutte le traslazioni lungo  $l$  si indica con  $TRANS(l)$ .

**Teorema 9.**

1. Ogni traslazione su  $S^2$  è anche una rotazione.
2. Ogni rotazione su  $S^2$  è anche una traslazione.

**Definizione 4.** Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono cerchi massimi perpendicolari alla retta  $l$ , allora  $\Omega_\alpha\Omega_\beta\Omega_l$  è detta glissoriflessione rispetto all'asse  $l$ .

**Teorema 10.** Ogni rotazione può essere scritta come il prodotto di due mezzi giri.

Il quinto capitolo descrive la sfera di raggio  $R$  da un ulteriore punto di vista, quello differenziale. Utilizzando le principali definizioni, proposizioni e teoremi di geometria differenziale, si evince che

**Proposizione 1.** La sfera di raggio  $R$ , indicata con il simbolo  $S_R^2$

$$S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

è una superficie regolare.

e che

**Proposizione 2.**  $S_R^2$  è una superficie orientabile.

La sfera può essere descritta dalle coordinate geografiche:

**Definizione 5.** *Le coordinate geografiche sono determinate dalla seguente applicazione:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : V &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (\theta, \phi) &\longmapsto (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) \end{aligned}$$

dove  $V = \{(\theta, \phi) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ ,  $\theta$  è detta colatitudine e  $\phi$  è detta longitudine.

per mezzo delle quali si ottiene che

**Proposizione 3.** *La prima forma fondamentale della sfera di raggio  $R$  è*

$$\mathbf{I}_p(S_R^2) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

e che

**Proposizione 4.** *La seconda forma fondamentale della sfera di raggio  $R$  è*

$$\mathbf{II}_p(S_R^2) = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Si studiano le proprietà della sfera legate alla curvatura.

**Proposizione 5.** *La curvatura gaussiana e la curvatura media della sfera di raggio  $R$  sono rispettivamente:*

$$\begin{aligned} K &= \det(\mathrm{dN}) = k_1 k_2 = \frac{1}{R^2}, \\ H &= \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2}(a + d) = -\frac{1}{R}, \end{aligned}$$

**Proposizione 6.** *Sia  $\Sigma$  una superficie differenziabile connessa di  $\mathbf{R}^3$ . Tutti i punti di  $\Sigma$  sono ombelicali se e solo se  $\Sigma$  è contenuta in un piano oppure in una sfera. In tal caso la sua curvatura principale è costante, uguale a zero nel caso planare e diversa da zero nel caso sferico.*

**Teorema 11.** *Sia  $\Sigma$  una superficie compatta, connessa e orientabile avente curvatura gaussiana ovunque positiva, allora  $\Sigma$  è diffeomorfa a  $S^2$ .*

Dato che la sfera è una superficie di rotazione, si studiano tali superfici nello stesso modo.

Nel sesto capitolo viene introdotta quella classe di curve che svolgono per le superfici il ruolo che hanno le rette per il piano. La caratterizzazione analitica locale delle rette è quella di essere curve con vettore tangente costante. Per misurare la variazione di un campo vettoriale lungo una curva su di una superficie si utilizza la derivata covariante che tiene conto solo la componente tangenziale della derivata del campo.

**Definizione 6.** *Sia  $w$  un campo vettoriale differenziabile in un aperto  $U \subset \Sigma$ , sia  $p \in U$  e sia  $y \in T_p(\Sigma)$ . Si consideri una curva parametrizzata  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , con  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = y$ , e sia  $w(t)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  la restrizione del campo vettoriale  $w$  alla curva  $\alpha$ . Il vettore ottenuto dalla proiezione normale sul piano  $T_p(\Sigma)$  di  $(\frac{dw}{dt})(0)$  è detto derivata covariante in  $p$  del campo vettoriale  $w$  relativo al vettore  $y$ . La derivata covariante si denota nel seguente modo:*

$$\frac{Dw}{dt}(0) \text{ oppure } (D_y w)(p) .$$

*Dunque*

$$\frac{Dw}{dt}(0) = \pi_{\alpha'(0)} \left( \frac{dw}{dt}(0) \right) .$$

**Definizione 7.** *Un campo vettoriale lungo una curva parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  è detto parallelo se  $\frac{Dw}{dt} = 0$  per ogni  $t \in I$ .*

Le curve parametrizzate  $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$  di un piano, lungo le quali il campo dei loro vettori tangenti  $\gamma'(t)$  è parallelo, sono precisamente le linee rette di quel piano. Le curve parametrizzate che soddisfano una condizione analoga per una superficie sono dette geodetiche.



**Definizione 8.** Una curva parametrizzata non costante  $\gamma : I \rightarrow \Sigma$ , è detta geodetica in  $t \in I$  se il campo dei suoi vettori tangenti  $\gamma'(t)$  è parallelo lungo  $\gamma$  in  $t$ , ovvero

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0 ;$$

$\gamma$  è una geodetica massimale se è una geodetica per ogni  $t \in I$ .

**Definizione 9.** Sia  $C$  una curva regolare orientata contenuta in una superficie orientata  $\Sigma$ , e sia  $\alpha(s)$  una parametrizzazione di  $C$ , in un intorno di  $p \in \Sigma$ , per mezzo dell'ascissa curvilinea. Il valore algebrico della derivata covariante

$$\left[ \frac{D\alpha'(s)}{ds} \right] = k_g$$

di  $\alpha'(s)$  in  $p$  è detta curvatura geodetica di  $C$  in  $p$ .

Da un punto di vista estrinseco alla superficie, il valore assoluto della curvatura geodetica  $k_g$  di  $C$  in  $p$  è il valore assoluto della componente tangenziale del vettore  $\alpha''(s) = kn$ , dove  $k$  è la curvatura di  $C$  in  $p$  e  $n$  è il vettore normale di  $C$  in  $p$ . Si ricorda, inoltre, che il valore assoluto della componente normale del vettore  $kn$  è il valore assoluto della curvatura normale  $k_n$  di  $C \subset \Sigma$  in  $p$ , dunque

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2 .$$

**Teorema 12.** Siano  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrizzazione ortogonale, cioè con  $F = 0$ , di un intorno di una superficie orientata  $\Sigma$  e  $w(t)$  un campo differenziabile di vettori unitari lungo la curva  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ , allora

$$k_g = \left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\phi}{dt} ,$$

dove  $\phi(t)$  è l'angolo tra  $\mathbf{x}_u$  e  $w(t)$  nella data orientazione.

**Proposizione 7.** Sia  $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$  una superficie, allora per ogni  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p(\Sigma)$  esiste una geodetica  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  tale che  $0 \in I$ ,  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Inoltre, se  $\tilde{\alpha} : \tilde{I} \rightarrow \Sigma$  è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni, allora  $\alpha$  e  $\tilde{\alpha}$

coincidono in  $I \cap \tilde{I}$ . In particolare, per ogni  $p \in \Sigma$  e  $v \in T_p(\Sigma)$  esiste un intervallo aperto massimale  $I_v \subseteq \mathbf{R}$  e un' unica geodetica  $\alpha_v : I_v \rightarrow \Sigma$  tale che  $\alpha_v(0) = p$  e  $\alpha'_v(0) = v$

Inoltre, si definiscono le equazioni di una geodetica in un intorno coordinatizzato:

**Definizione 10.** Sia  $\gamma : I \rightarrow \Sigma$  una curva parametrizzata di  $\Sigma$  e sia  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrizzazione di  $\Sigma$  in un intorno  $V$  di  $\gamma(t_0)$ ,  $t_0 \in I$ . Sia  $J \subset I$  un intervallo aperto contenente  $t_0$  tale che  $\gamma(J) \subset V$ . Sia  $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ ,  $t \in J$ , l'espressione di  $\gamma : J \rightarrow \Sigma$  nella parametrizzazione  $\mathbf{x}$ , il campo vettoriale tangente  $\gamma'(t)$ ,  $t \in J$ , è dato da

$$w = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v .$$

Infine, si dimostra che

**Proposizione 8.** *Le geodetiche della sfera sono tutti e solo i cerchi massimi.*

Nel **settimo capitolo** si introduce il GPS (Global Positioning System): un sistema di posizionamento particolarmente preciso e basato su una costellazione di satelliti artificiali, mediante il quale qualsiasi utente, che disponga di un idoneo apparato ricevente, è in grado di rilevare le proprie coordinate planimetriche ed altimetriche in qualunque punto della terra esso si trovi. Il funzionamento del GPS è legato al segmento spaziale, ossia 24 satelliti orbitanti di cui 21 effettivamente operativi e tre di riserva. Le orbite sono circolari e distribuite su 6 piani orbitali in modo che in ogni momento ogni punto della terra venga visto da almeno 4 satelliti contemporaneamente.

Oltre ai satelliti, ci sono anche 5 stazioni di controllo a terra che costituiscono il segmento di controllo e che si occupano costantemente di verificare lo stato dei satelliti.

Il resto del lavoro viene fatto dal segmento utenza, ovvero dalle antenne e dai ricevitori GPS che rilevano con precisione e in tempo reale la posizione e la velocità dell'utente eseguendo le seguenti operazioni attraverso il metodo della trilaterazione: un ricevitore GPS determina la sua posizione istantanea misurando le distanze dalla sua antenna ai satelliti visibili in quel momento, dei quali è nota la posizione nello spazio. Per ogni satellite si calcola la superficie sferica, il cui centro è il satellite stesso e il cui raggio è la distanza che intercorre tra il satellite e il ricevitore. Da un punto di vista teorico, la trilaterazione geometrica garantisce che per conoscere la propria località basterebbero tre misure di distanza rispetto a tre oggetti noti (tre satelliti). Conoscendo tre distanze da tre punti noti si identificano in realtà due punti nello spazio tridimensionale, dati dall'intersezione di tre sfere il cui raggio è pari alla distanza misurata tra ricevitore e punto di riferimento. Ciò è possibile perché l'intersezione di due sfere determina una circonferenza ed una terza misura individua su questa circonferenza due punti. Dei due punti, uno è in genere manifestamente errato e può essere facilmente scartato, l'altro è quello che individua la posizione del ricevitore GPS. In realtà sono però necessari quattro satelliti per introdurre anche la variabile tempo, in modo da eliminare l'imprecisione dovuta a uno scostamento costante dell'orologio del ricevitore. Si analizzano le condizioni secondo le quali, con il metodo della trilaterazione, è possibile individuare la posizione del ricevitore GPS tramite l'intersezione di tre sfere. Si consideri un sistema di riferimento cartesiano centrato nel centro della Terra.

Sia  $T = (t_x, t_y, t_z)$  un generico punto sulla superficie terrestre su cui giace il ricevitore. Sia  $S_1$  la superficie sferica, il cui centro è il satellite individuato dalla posizione, esterna alla Terra,  $C_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$ , e il cui raggio è la distanza che intercorre tra il punto  $T$  e  $C_1$ :  $\overline{TC_1}^2 = (t_x - \alpha)^2 + (t_y - \beta)^2 + (t_z - \gamma)^2$ .

**Definizione 11.** *L'equazione che descrive  $S_1$  è:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + \Gamma z + \Delta_1 = 0 ,$$

dove  $A = -2\alpha$ ,  $B = -2\beta$ ,  $\Gamma = -2\gamma$  e  $\Delta_1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (t_x - \alpha)^2 - (t_y - \beta)^2 +$

$$-(t_z - \gamma)^2.$$

Sia  $S_2$  la superficie sferica, il cui centro è il satellite individuato dalla posizione, esterna alla Terra,  $C_2 = (\epsilon, \eta, \mu)$ , e il cui raggio è la distanza che intercorre tra il punto  $T$  e  $C_2$ :  $\overline{TC_2}^2 = (t_x - \epsilon)^2 + (t_y - \eta)^2 + (t_z - \mu)^2$ .

**Definizione 12.** *L'equazione che descrive  $S_2$  è:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ex + Hy + Mz + \Delta_2 = 0 ,$$

dove  $E = -2\epsilon$ ,  $H = -2\eta$ ,  $M = -2\mu$  e  $\Delta_2 = \epsilon^2 + \eta^2 + \mu^2 - (t_x - \epsilon)^2 - (t_y - \eta)^2 - (t_z - \mu)^2$ .

Sia  $S_3$  la superficie sferica, il cui centro è il satellite individuato dalla posizione, esterna alla Terra,  $C_3 = (\nu, \sigma, \phi)$ , e il cui raggio è la distanza che intercorre tra il punto  $T$  e  $C_3$ :  $\overline{TC_3}^2 = (t_x - \nu)^2 + (t_y - \sigma)^2 + (t_z - \phi)^2$ .

**Definizione 13.** *L'equazione che descrive  $S_3$  è:*

$$x^2 + y^2 + z^2 + Nx + \Sigma y + \Phi z + \Delta_3 = 0 ,$$

dove  $N = -2\nu$ ,  $\Sigma = -2\sigma$ ,  $\Phi = -2\phi$  e  $\Delta_3 = \nu^2 + \sigma^2 + \phi^2 - (t_x - \nu)^2 - (t_y - \sigma)^2 - (t_z - \phi)^2$ .

Mettendo a sistema  $S_1$  con  $S_2$  e  $S_1$  con  $S_3$  si nota che la loro intersezione genera due circonferenza che giacciono rispettivamente sui piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

**Definizione 14.** *L'equazione del piano su cui giace la circonferenza individuata dall'intersezione di  $S_1$  e  $S_2$  è*

$$(A - E)x + (B - H)y + (\Gamma - M)z + (\Delta_1 - \Delta_2) = 0 .$$

**Definizione 15.** *L'equazione del piano  $\pi_2$  su cui giace la circonferenza individuata dall'intersezione di  $S_1$  e  $S_3$  è*

$$(A - N)x + (B - \Sigma)y + (\Gamma - \Phi)z + (\Delta_1 - \Delta_3) = 0 .$$

L'intersezione di  $\pi_1$  con  $\pi_2$  genera una retta a patto che i due piani non siano paralleli. Ciò avviene se e solo se il rango della matrice, i cui elementi sono i coefficienti delle incognite presenti nelle equazioni dei piani, sia massimo, ovvero

$$rg \begin{pmatrix} A - E & B - H & \Gamma - M \\ A - N & B - \Sigma & \Gamma - \Phi \end{pmatrix} = 2 .$$

Dunque affinché l'intersezione di tre sfere, individuate con i criteri della trilaterazione, si intersechino in almeno un punto, i centri di tali sfere non devono giacere sullo stesso piano. Nel sistema GPS le misure delle distanze satellite-ricevitore sono influenzate da diverse forme di errore, ma in questo lavoro si pone l'attenzione solo su quello relativo alla geometria dei satelliti. La precisione della localizzazione che si ottiene elaborando i dati ricevuti dai satelliti è legata anche alla loro posizione rispetto al ricevitore GPS. Il DOP (diluizione di precisione) è un numero puro che quantifica il contributo della configurazione satellitare alla precisione della posizione. Valori bassi del DOP corrispondono ad una buona configurazione satellitare ed ad una non eccessiva propagazione degli errori di misura che risultano dal posizionamento. Ci sono vari tipi di DOP, ognuno dei quali dipende unicamente dalla particolare coordinata o combinazioni di coordinate di cui si vuole considerare la precisione. Si studia il caso più generale: GDOP legato alle tre coordinate e al tempo. Le equazioni di osservazione nel caso di quattro satelliti GPS sono

$$\sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2} + \delta T c = R_i \quad , \text{ con } i = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

con  $X, Y, Z$  le coordinate incognite del ricevitore,  $\delta T$  l'offset incognito dell'orologio del ricevitore,  $X_i, Y_i, Z_i$  le coordinate dell' $i$ -esimo satellite ed  $R_i$  i valori misurati di pseudo-range. Le (1) sono equazioni non lineari che possono essere linearizzate mediante uno sviluppo in serie di Taylor a partire da un punto  $X_0, Y_0, Z_0$  ed un tempo  $T$  stimato a priori Tale sviluppo, arrestato ai termini di primo ordine, porta alle seguenti equazioni:

$$a\Delta X + b\Delta Y + c\Delta Z + \Delta T = \Delta R_i \quad , \text{ con } i = 1, \dots, 4 ,$$

con  $\Delta R_i$  la differenza tra le misure di range stimate e quelle osservate,  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ,  $\Delta T$  le correzioni ai valori stimati i cui coefficienti sono i coseni direttori  $a_{ij}$  delle normali orientate ai luoghi di posizione.

Questo sistema di equazioni può essere espresso in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta R_1 \\ \Delta R_2 \\ \Delta R_3 \\ \Delta R_4 \end{pmatrix}$$

dove

**Definizione 16.** *La matrice*

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{pmatrix},$$

è detta *matrice di misura*.

Per mezzo di calcoli statistici si trova l'espressione analitica del GDOP

$$GDOP = \sqrt{\text{tr}((H^T H)^{-1})}$$

e che si può scrivere GDOP in funzione di  $1/\det(H)$ , nel seguente modo:

$$GDOP = \frac{1}{\det(H)} \sqrt{S}, \quad (2)$$

dove  $S$  è la sommatoria dei quadrati dei minori complementari di tutti gli elementi del determinante  $H$ .

Il GDOP è inversamente proporzionale al volume di un tetraedro, i cui vertici giacciono su una sfera di raggio unitario centrata nel ricevitore e che sono individuati dai versori delle direzioni ricevitore-satelliti.

Il GDOP dipende dal valore del determinante  $H$ , per cui è importante studiare la dipendenza di esso dal volume rappresentato dallo stesso determinante; per un volume massimo si ha, ovviamente, un GDOP minimo, per cui risulta interessante studiare la variazione del volume al variare della configurazione dei satelliti rispetto alla direzione scelta come principale (satellite  $S_1$ ). Supposto il satellite allo zenit del ricevitore (Figura 1) coincidente con la direzione dell'asse  $Z$ , si considerano le altre 3 direzioni in modo che formino lo stesso angolo con la  $1$ ; con questa ipotesi, i tre satelliti si trovano su una circonferenza ed equidistanti fra loro di un angolo di  $120^\circ$ . Il volume di questo tetraedro è costituito dalla somma delle due piramidi considerate. Se per ipotesi si considerano i tre satelliti appartenenti alla circonferenza minore di raggio  $\sin \theta$  di una circonferenza di raggio unitario e centro l'antenna del ricevitore, allora è lecito considerare che il volume totale del tetraedro considerato è proporzionale alla piramide di base rappresentata dai tre satelliti considerati sul cerchio minore di altezza  $h$  pari a  $(1 - \cos \theta)$ ; la Figura 1 illustra la geometria semplificata dei tre satelliti ( $S_2, S_3, S_4$ ) rispetto al satellite  $S_1$ , supposto allo zenit dell'antenna del ricevitore  $R$ .

Supposto fisso  $\theta$ , allora il volume massimo si ha quando questo triangolo equilatero si trova su una circonferenza minore il cui raggio forma con la direzione dello zenit (satellite  $S_1$ ) un angolo di  $\theta = 109^\circ$ . La configurazione ottimale, per avere un GDOP minimo, si ha quando un satellite si trova allo zenit e 3 satelliti sull'orizzonte a  $120^\circ$  di azimut l'uno dall'altro e con i tre vettori uscenti dal ricevitore formano con lo zenit un angolo costante di  $109^\circ$ . Al contrario la situazione degenera quando, tenendo conto dell'espressione analitica delle GDOP, il determinante della matrice  $H$  si annulla, cioè quando si annulla il volume del tetraedro che degenera in una superficie piana.

Si analizza anche un particolare modello matematico che utilizza il GPS rispetto al quale la posizione di un punto  $P$  viene data in funzione di una coppia di coordinate geografiche ellissoidiche, dette latitudine ellissoidica ( $\phi$ ), longitudine ellissoidica ( $\lambda$ ) e quota ellissoidica ( $h$ ), oppure in funzione delle sue coordinate nel

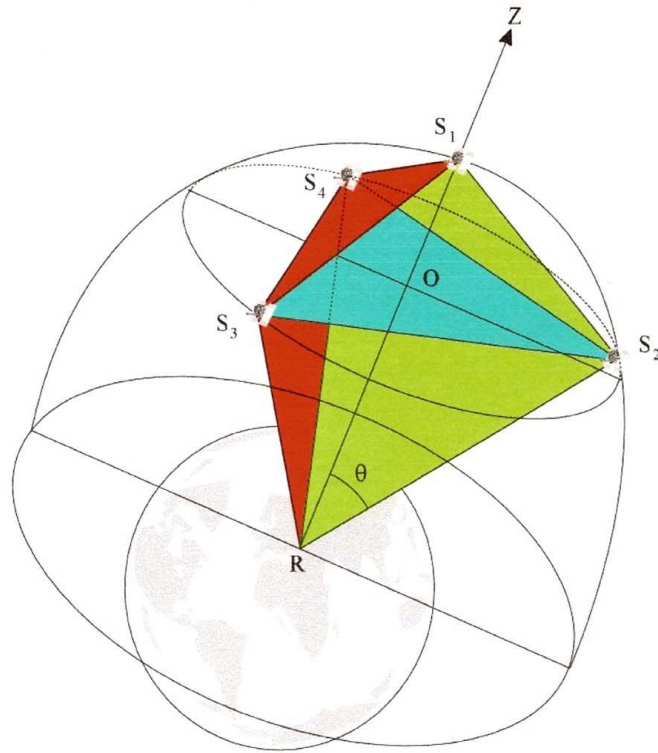


Figura 1: Rappresentazione del volume del tetraedro associato a quattro satelliti di cui uno allo zenit del ricevitore R.

sistema geocentrico dette coordinate cartesiane ellissocentriche  $X_p, Y_p, Z_p$ . La Terra assomiglia molto ad una sfera, ma in realtà non lo è e considerarla tale porta ad un'approssimazione che in alcuni casi è accettabile, ma in altri risulta troppo grossolana. Gli studi e le ricerche condotti sulla determinazione della superficie fisica della Terra e quindi sulla determinazione della superficie di riferimento da adottare per le operazioni di misura, hanno portato nel corso degli anni alla definizione di modelli della superficie terrestre di tipo geometrico (ellissoide) e di tipo fisico (geoide). Tale dualismo deriva dal fatto che mentre i modelli di tipo geometrico, quali la sfera o l'ellissoide di rotazione, sono facilmente trattabili dal punto di vista matematico e risultano adatti alla costruzione di sistemi di riferi-



mento per la determinazione della posizione di un punto per mezzo di coordinate, i modelli di tipo fisico approssimano in modo più fedele la reale forma della Terra, determinata, appunto, da una combinazione di forze fisiche. La superficie ufficiale di riferimento del GPS è costituita da un sistema geocentrico associato all'ellissoide definito dal DMA (Defence Mapping Agency) sulla base delle misure e delle conoscenze scientifiche disponibili nel 1984. Tale sistema di riferimento mondiale è denominato WGS84 (World Geodetic System 1984).

**Definizione 17.** *WGS84 è un sistema di riferimento così caratterizzato:*

1. *origine nel centro di massa della terra;*
2. *asse Z passante per il polo convenzionale terrestre (CTP);*
3. *asse X definito dall'intersezione del piano meridiano passante per Greenwich con il piano equatoriale terrestre;*
4. *asse Y univocamente determinato in modo da ottenere una terna destrorsa di assi cartesiani ortogonali.*

**Definizione 18.** *La superficie di rotazione, a cui il GPS fa riferimento, è l'ellissoide che ha centro nell'origine degli assi e che è il luogo dei punti  $x,y,z$  dello spazio che soddisfano l'equazione:*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 , \quad (3)$$

*dove il parametro  $a$  indica il semiasse maggiore o equatoriale dell'ellissoide, il parametro  $b$  il semiasse minore o polare.*

I parametri  $a$  e  $b$  permettono di definire altri parametri geometrici adimensionati:

**Definizione 19.** *Lo schiacciamento dell' ellissoide (3) è*

$$\alpha = \frac{a - b}{a} .$$

**Definizione 20.** *L'eccentricità dell' ellissoide (3) è*

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} .$$

L'ellissoide risulta definito univocamente se vengono assegnati dei valori ai due semiassi  $a$  e  $b$ , oppure ad un semiasse  $e$  e ad uno dei parametri adimensionati. Nella tabella successiva vengono riportati i parametri caratterizzanti i principali ellissoidi utilizzati nel corso degli anni:

Nome (anno)	a [m]	b [m]	$\alpha$	$e^2$
Bessel (1841)	6377397.155	6356078.963	1/299.152813	$6.67437223 \cdot 10^{-3}$
Hayford (1909)	6378388.000	6356911.946	1/297.000000	$6.72267002 \cdot 10^{-3}$
WGS-84 (1984)	6378137.000	6356752.314	1/298.257224	$6.69437990 \cdot 10^{-3}$

**Definizione 21.** *Fissato il sistema di riferimento e l'ellissoide associato, è possibile definire le coordinate geografiche o ellissoidiche di un punto  $P$ : latitudine  $\phi$ , longitudine  $\lambda$ , quota ellissoidica  $h$ :*

1. *latitudine  $\phi$ : angolo compreso tra la normale all'ellissoide condotta per  $P$  ed il piano equatoriale  $XY$ ;  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ;*
2. *longitudine  $\lambda$ : angolo compreso tra il piano meridiano passante per  $P$  ed un piano meridiano assunto come origine (meridiano di Greenwich);  $\lambda \in [0, 2\pi]$ ;*
3. *quota ellissoidica  $h$ : distanza, misurata lungo la normale all'ellissoide condotta per  $P$ , tra l'ellissoide ed il punto  $P$  stesso.*

**Definizione 22.** *Gran normale o raggio di curvatura maggiore (dell'intersezione dell'ellissoide con il piano contenente la verticale al punto  $P$  ed ortogonale al piano contenente il meridiano) è la quantità:*

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} .$$

Utilizzando la Gran normale, le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ y = (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ z = (N(1 - e^2) + h) \sin \phi \end{cases}$$

Esprimere le coordinate geografiche ellissoidiche in funzione di quelle cartesiane è molto più difficile:

$$\begin{cases} \phi = \arctan \frac{z + e^2 N \sin \phi}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \lambda = \arctan \frac{y}{x} \\ h = \frac{z - (1 - e^2) N \sin \phi}{\sin \phi} \end{cases}$$

# Bibliografia

- [1] Richard Trudeau *La rivoluzione non euclidea* Bollati Boringhieri, 2004.
- [2] V. V. Nikulin, I. R. Shafarevich *Geometries and Groups*. Springer, 1994.
- [3] Anthony D. Stanley *An elementary treatise of spherical geometry and trigonometry*. Durrie and Peck, 1854.
- [4] Patrick J. Ryan *Euclidean and non-euclidean geometry an analytic approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] Edoardo Sernesi *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 2000.
- [6] Manfredo P. Do Carmo *Differential Geometry of Curves and Surface* . Prentice-Hall, 1976.
- [7] M. Abate, F. Tovena *Curve e superfici*. Springer, 2006.
- [8] John M. Lee *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2006.
- [9] J. V. Lamar, L. N. Rowel, J. J. Mate *Geometric Performance of Pseudorange Navigation Satellite System: A Computer Program* Rand, 1977
- [10] [http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria\\_sulla\\_sfera/geo.htm](http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm)
- [11] [www.itgcanova.it/docenti/prof\\_berto/Geometria%20sferica.pdf](http://www.itgcanova.it/docenti/prof_berto/Geometria%20sferica.pdf)
- [12] <http://progettomatematica.dm.unibo.it/NonEuclidea/File/ellittica%202.htm>

- [13] [www.dif.unige.it/epi/hp/pal/NonEucl-5.pdf](http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/NonEucl-5.pdf)
- [14] [www.bathmath.it/matematica/a\\_ageo/cap0/hilbert.htm](http://www.bathmath.it/matematica/a_ageo/cap0/hilbert.htm)
- [15] [www.aero.polimi.it/~lavagna/bacheca/meccanica\\_orbitale/dispense\\_2.pdf](http://www.aero.polimi.it/~lavagna/bacheca/meccanica_orbitale/dispense_2.pdf)
- [16] [www.mat.uniroma3.it/users/magrone/2010\\_11/magistrale/lasfera17nov.pdf](http://www.mat.uniroma3.it/users/magrone/2010_11/magistrale/lasfera17nov.pdf)
- [17] [www.nauticoartiglio.lu.it/didattica/trigsfer/trigsferica.htm](http://www.nauticoartiglio.lu.it/didattica/trigsfer/trigsferica.htm)
- [18] [www.formazionenautica.it/public/matematica/Richiami%20di%20trigonometria%20sferica.pdf](http://www.formazionenautica.it/public/matematica/Richiami%20di%20trigonometria%20sferica.pdf)
- [19] [www.mateopozzallo.it/navigazione/trigsferica.pdf](http://www.mateopozzallo.it/navigazione/trigsferica.pdf)
- [20] [www.dis.uniroma1.it/~trevisani/didattica/GPS.pdf](http://www.dis.uniroma1.it/~trevisani/didattica/GPS.pdf)
- [21] [www.topografia.it/CaseHistory/gps.htm](http://www.topografia.it/CaseHistory/gps.htm)
- [22] [www.navigaz.uniparthenope.it/sez\\_nav/downloads/navigazione\\_sat/capitolo06.pdf](http://www.navigaz.uniparthenope.it/sez_nav/downloads/navigazione_sat/capitolo06.pdf)
- [23] [www.navigaz.uniparthenope.it/sez\\_nav/downloads/Tesi\\_Angrisano.pdf](http://www.navigaz.uniparthenope.it/sez_nav/downloads/Tesi_Angrisano.pdf)
- [24] [www.ceri.memphis.edu/people/rsmalley/ESCI7355/gpsworld\\_may99.pdf](http://www.ceri.memphis.edu/people/rsmalley/ESCI7355/gpsworld_may99.pdf)