Universitá degli Studi Roma Tre

Facoltá di Scienze M.F.N.

Corso di Laurea in Matematica

Sintesi della Tesi di laurea Specialistica in Matematica

L'insegnamento della probabilità per investigare la realtà

Candidato

Francesco Davoli

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Anno Accademico 2010-2011

Maggio 2012

Classificazione: 60A05; 97D40.

Parole Chiave: Didattica della Matematica; Probabilità.

Nel decreto del *Ministero dell'istruzione, dell'università e della ricerca*, del 15 maggio 2010, troviamo il seguente articolo:

"I percorsi liceali forniscono allo studente gli strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà, affinchè egli si ponga, con atteggiamento razionale, creativo, progettuale e critico, di fronte alle situazioni, ai fenomeni e ai problemi, ed acquisisca conoscenze, abilità e competenze sia adeguate al proseguimento degli studi di ordine superiore, all'inserimento nella vita sociale e nel mondo del lavoro, sia coerenti con le capacità e le scelte personali" (art. 2 comma 2 del regolamento recante "Revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei ai sensi dell'articolo 64, comma 4, del decreto legge 25 giugno 2008, n. 112, convertito dalla legge 6 agosto 2008, n. 133").

L'introduzione nei piani di studio dei licei scientifici delle così dette "materie nuove", tra cui il "*Calcolo delle Probabilità* ", è sicuramente un passo importante verso tali obiettivi.

Il 15 maggio 2010 l'UMI (Unione Matematica Italiana), in una sua mozione, afferma:

"L'Assemblea UMI, riunita a Bologna in data 15 maggio 2010, presa visione dei testi attualmente disponibili in merito alla riforma della Scuola Secondaria di II grado, [...], vede con molto favore la presenza di nuovi argomenti nelle indicazioni di tutti i Licei (Analisi Matematica, Probabilità e Statistica, ecc..); tuttavia rileva che il quadro orario di 2 ore settimanali (in media) negli ultimi tre anni appare totalmente inadeguato;[...]."

La trattazione seguente ha l'obiettivo di mettere in evidenza la capacità che proprio questa "materia nuova", quale la probabilità, ha di investigare la realtà, e di dare agli insegnanti, che spesso possono trovarsi in difficoltà rispetto ad argomenti nuovi, magari da loro nemmeno studiati, un modo di proporli agli studenti durante il loro percorso di studi.

La tesi è articolata in tre capitoli.

Nel Capitolo 1 tratteremo la *storia della probabilità* partendo da tutte le diverse ipotesi sulla sua nascita fino ad arrivare ai tempi più recenti. In particolare metteremo in evidenza il suo evolversi nel tempo con tutti i cambiamenti attraversati e tutte le varie definizioni che si sono susseguite. Vedremo come dal semplice gioco d'azzardo nascerà una nuova disciplina, inizialmente poco accettata dai matematici a causa proprio delle sue origini ludiche, ma che via via acquisirà sempre più importanza fino ad essere assiomatizzata diventando un modello per molteplici situazioni reali. Infatti, il XVII secolo, durante il quale cominciò la famosa corrispondenza tra *Pascal* e *Fermat* per risolvere i problemi propostigli dal *Cavaliere de Méré*, rappresenta solo il periodo in cui il calcolo delle probabilità comincia ad acquisire le basi per diventare una vera e propria disciplina matematica.

Le sue origini, tuttavia, sono ben più remote, tanto che molti storici sono concordi nel farle risalire addirittura agli antichi Greci. Se infatti il motivo principale della sua nascita sono i giochi d'azzardo, allora già nel periodo ellenistico esistevano tali giochi. In questo grande periodo che arriva fino al XVII secolo, però, la probabilità rappresenta un concetto filosofico teorico più che matematico.

La sua praticità si comincia a intravedere nel XVI secolo, grazie ai lavori di Girolamo Cardano(1501-1576?) con il suo *Liber de ludo aleae* e Galileo

Galilei(1564-1642) col trattato *Sopra le scoperte dei dadi.* Ma solo con la corrispondenza tra Pascal e Fermat vengono poste le basi per la nascita di una vera e propria disciplina. In seguito ai loro lavori molti studiosi si interessarono ad essa e contribuirono a svilupparla. Nel 1657 Christiaan Huygens(1629-1695) scrisse *Libellus de ratiociniis in ludo aleae*, il primo trattato sul calcolo delle probabilità; nel 1708 Pierre de Montmort(1678-1719) scrisse *Essai d'analyse sur le jeux de hasard*; nel 1713 venne pubblicata postuma l'opera di Jakob Bernoulli(1654-1705), *Ars conjectandi*, in cui dimostrava la *Legge dei grandi numeri* e successivamente, Abraham de Moivre(1667-1754), nell'opera *Doctrine of Chances* del 1718, diede una prima formulazione della *formula di Stirling* e del *Teorema del limite centrale*, generalizzato in seguito da Pierre Simon Laplace(1749-1827) a cui viene attribuita la prima definizione di probabilità, "*definizione classica o definizione classica di Laplace*":

Definizione 1 (Definizione classica). *Si chiama probabilità p di un evento aleatorio, previsto da un determinato esperimento, il rapporto tra il numero dei risultati favorevoli e il numero dei risultati possibili dell'esperimento, nell'ipotesi che siano tutti egualmente possibili.*

Indicando con A l'evento, con $p = P(A)$ la sua probabilità, con n il numero dei risultati possibili e con m il numero dei risultati favorevoli all'evento, possiamo scrivere:

$$P(A) = p = \frac{m}{n}.$$

La probabilità cominciò quindi a ritagliarsi un ruolo di fondamentale importanza tra le discipline scientifiche, tanto che molti studiosi pensarono di poterla sfruttare per la spiegazione dei fenomeni naturali. Condorcet(1743-1794), un filosofo e matematico francese, contava addirittura di creare una "matematica sociale" basata proprio sulla nuova disciplina e spiegò le sue teorie nel suo *Saggio sull'applicazione dell'analisi alla probabilità delle decisioni prese a maggioranza di voti*, considerato storicamente come un caposaldo nello sviluppo della teoria delle probabilità.

Il lavoro da parte dei matematici sulla nuova disciplina continuò per molto tempo. Nel 1763 venne pubblicato postumo il lavoro di Thomas Bayes(1702-1761), *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, in cui spiegava la "*probabilità condizionata*"; nel 1809 Carl Friedrich Gauss(1777-1855), durante i suoi studi astronomici, scopre la curva che rappresenterà la "*distribuzione gaussiana*", nota come "*campana di Gauss*"; nel 1867 Chebischev(1821-1894) scopre la prima disuguaglianza fondamentale della probabilità.

In particolare proseguirono per molto tempo i tentativi di dare una definizione precisa e quindi dare fondamenti solidi alla disciplina, ritenendo la definizione classica applicabile solo a determinati problemi (eventi indipendenti ed esperimenti finiti). Il primo a cercare di superare i limiti di questa prima definizione fu l'economista austriaco *Richard von Mises* (1883-1953) che introdusse il concetto di "*frequenza relativa*" che indicava il rapporto fra il numero delle volte n_E in cui si verificava un evento E e il numero n di prove effettuate:

$$f(E) = \frac{n_E}{n}$$

e diede la seguente definizione:

Definizione 2 (**Definizione statistica o frequentista**). *La probabilità di un evento E è data dal limite cui tende la frequenza relativa dell'evento al crescere del numero degli esperimenti:*

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_E}{n}$$

Anche questa definizione risulta poco precisa in quanto pone problemi nel caso di esperimenti non ripetibili. Quindi, tra gli anni '20 e '30 del 1900, prima l'italiano Bruno de Finetti(1906-1985) e poi Leonard Jimmie Savage(1917-1971) danno una "*definizione soggettiva*":

Definizione 3 (**Definizione soggettiva**). *La probabilità soggettiva di un evento E è il rapporto tra il prezzo V che un individuo ritiene equo pagare e la somma S che ha diritto ad avere in cambio se l'evento si verifica, perdendo V se l'evento non si verifica:*

$$P(E) = \frac{V}{S}.$$

che accese ampie polemiche per la soggettività di interpretazione che ne scaturiva. Nel 1933, finalmente, grazie a Andrey Nikolaevich Kolmogorov(1903-1987), la probabilità assume finalmente una forma puramente matematica. Egli ne dà, infatti, una "*definizione assiomatica*":

Definizione 4 (**Definizione assiomatica**). *Ad ogni evento E, sottoinsieme dello spazio campionario S, è associato un numero reale $P(E)$, probabilità di E, tale che:*

P_1) $0 \leq P(E) \leq 1$ *;*

P_2) $P(S) = 1$ *;*

P_3) *per ogni successione di eventi a due a due disgiunti $E_1, E_2, E_3, ...$ (cioè $E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$), si ha:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Con questa definizione Kolmogorov chiudeva definitivamente il problema dei fondamenti della probabilità, allontanando ogni dubbio sulla dignità della materia di essere considerata una branca importante della matematica.

Nel Capitolo 2 affronteremo, in modo un pò più tecnico rispetto al resto, due concetti particolarmente importanti del Calcolo delle Probabilità, scelti per la loro importanza concettuale. Vedremo quindi la "*speranza matematica*", con tutte le sue proprietà, come un mezzo per avere informazioni per agire in situazioni di incertezza, per poi arrivare seguendo una linea logica al *Teorema del limite centrale* con cui potremo affermare che l'andamento di molti fenomeni che osserviamo nella vita di tutti i giorni, di qualsiasi natura essi siano, può essere ben rappresentato dalla famosa "*campana di Gauss*". Con questo coglieremo pure l'occasione di mettere in evidenza, come due mondi apparentemente distanti, la cui compenetrazione crea non pochi problemi di comprensione agli studenti liceali, quello del *discreto* e quello del *continuo*, possono in realtà essere avvicinati attraverso l'utilizzo di un teorema così potente. Proporremo, inoltre, due diverse dimostrazioni del suddetto teorema, tenendo conto del pubblico al quale la nostra tesi è rivolta. La prima dimostrazione verrà fatta con mezzi adatti alla spiegazione del teorema in una classe di liceo, mentre la seconda, utilizza concetti un pò più tecnici non trattati a livello scolastico. Riportiamo di seguito le varie definizioni e i teoremi che abbiamo utilizzato:

Definizione 5. *Si chiama* ***spazio campionario****, associato ad un dato esperimento, l'insieme S di tutti i suoi possibili risultati.*

Definizione 6. *Si chiama* ***evento****, un sottoinsieme A dello spazio campionario S ($A \subseteq S$), cioè un insieme di risultati possibili.*

Definizione 7. *Una* ***variabile aleatoria (o casuale)*** *è una qualsiasi funzione*

$$X: \quad S \to \mathbb{R}$$

che associa ad un evento nello spazio campionario un numero reale.

Definizione 8. *Una variabile aleatoria X che possa assumere un numero finito o infinito numerabile di valori è detta* ***variabile aleatoria discreta****.*

Definizione 9. *Per una variabile aleatoria discreta X, definiamo la* ***densità discreta*** *$p(a)$ di X come*

$$p(a) = P\{X = a\},$$

cioè la probabilità che X assuma un preciso valore a. Se X assume i valori $x_1, x_2, ...,$ allora

$$p(x_i) \geq 0 \qquad i = 1, 2, ...$$

$$p(x) = 0 \qquad \textit{altrimenti}$$

Poichè X deve assumere almeno uno dei valori x_i, abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$$

Definizione 10. *Data una variabile aleatoria X con densità discreta $p(a)$ definiamo la sua* ***funzione di distribuzione*** *F come*

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \sum_{x \leq a} p(x).$$

Definizione 11. *X si definisce* ***variabile aleatoria continua*** *se esiste una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$ integrabile tale che*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

con $-\infty < a < b < +\infty$; f è chiamata ***densità di probabilità continua****.*

Definizione 12. *Data una variabile aleatoria continua X con densità di probabilità $f(x)$, definiamo* ***funzione di distribuzione***

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

Definizione 13 (Caso discreto)**.** *Se X è una variabile aleatoria discreta con densità discreta $p(x)$, il* ***valore atteso*** *(o* ***speranza matematica****) di X, che denoteremo con $E[X]$, è definito da*

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

A parole, il valore atteso di X è la media pesata di tutti i possibili valori che X può assumere, ognuno pesato con la probabilità che X lo assuma. Supponiamo di avere una variabile aleatoria discreta X e la sua densità discreta, e di voler calcolare il valore atteso di una qualche funzione di X, diciamo $g(X)$. Come lo possiamo fare?

Proposizione 1. *Se X è una variabile aleatoria discreta, che assume i valori x_i, con $i \geq 1$, con probabilità pari a $p(x_i)$, allora per ogni funzione a valori reali g*

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i).$$

Proposizione 2 (Linearità del valore atteso). *Se a e b sono costanti, allora*

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$

Definizione 14. *Se X é una variabile aleatoria di media μ, allora la* ***varianza*** *di X, che denotiamo con $Var(X)$, é definita*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Proposizione 3. *Vale la seguente relazione*

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Osservazione 1. *Date due costanti a e b, vale la seguente identità*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X).$$

Definizione 15. *La radice quadrata della $Var(X)$ è detta **deviazione standard** di X, che denotiamo con*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Definizione 16 (Caso continuo)**.** *Se X è una variabile aleatoria continua con densità continua $f(x)$, definiamo:*

- ***Valore atteso**: $E[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$;*

- ***Varianza**: $Var(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 f(x) dx$;*

- ***Deviazione standard**: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$.*

e valgono le stesse proprietà viste per il caso discreto con la sola sostituzione delle somme con gli integrali.

Definizione 17. *La **funzione generatrice dei momenti** di una variabile aleatoria X, che indichiamo con $M(t)$, è definita per ogni numero reale t da*

$$\begin{aligned} M(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \begin{cases} \sum\limits_{x} e^{tX} p(X) & \text{se } X \text{ è discreta con densità discreta } p(x) \\ \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{se } X \text{ è continua con densità } f(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Proposizione 4. *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti aventi funzioni generatrici dei momenti, rispettivamente, $M_X(t)$ e $M_Y(t)$. Allora $M_{X+Y}(t)$, la funzione generatrice dei momenti di $X+Y$, è uguale al prodotto delle funzioni generatrici dei momenti di X e Y.*

Osservazione 2. *La funzione generatrice dei momenti determina la distribuzione in modo unico. Cioè, se $M_X(t)$ esiste ed è finita in un intorno di $t = 0$, allora la distribuzione di X è univocamente determinata.*

Definizione 18. *Sia X una variabile aleatoria. Si definisce **funzione caratteristica** di X la funzione*

$$\begin{aligned} \phi_X : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto E\left[e^{itx}\right] \end{aligned}$$

Nel caso discreto, se x_k sono i valori assunti da X e p_k le rispettive probabilità, si ha

$$\phi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k \ .$$

Nel caso continuo, se $f_X(x)$ è la densità di X, si ha

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx \ .$$

Introduciamo ora dei concetti che ci permettono di stabilire cosa si intende per convergenza di una successione di variabili casuali. Prendiamo in esame tre diversi tipi di convergenza:

Definizione 19. *Data una successione $\{X_n\}$ di variabili aleatorie con funzioni di distribuzione $\{F_n\}$, si dice che **converge in distribuzione (o debolmente)** alla variabile casuale X con funzione di distribuzione $F(X)$, se*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(X) = F(X)$$

per ogni punto in cui $F(X)$ è continua.

Definizione 20. *Data una successione X_n di variabili aleatorie, diciamo che essa* ***converge in probabilità*** *alla variabile aleatoria X, se $\forall\epsilon > 0$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \epsilon) = 1$$

o ancora, utilizzando la definizione di limite, X_n converge in probabilità a X se $\forall\epsilon > 0$ e $\forall\delta > 0$, esiste un intero $n(\epsilon, \delta)$ tale che, se $n \geq n(\epsilon, \delta)$

$$P(|X_n - X| < \epsilon) \geq 1 - \delta$$

Definizione 21. *Data una successione X_n di variabili aleatorie, diciamo che essa* ***converge quasi certamente*** *alla variabile aleatoria X, se*

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$$

o equivalentemente, essendo la probabilità definita su eventi, dato la spazio campionario S, possiamo riscrivere la formula precedente come

$$P(\{\omega \in S | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

Dopo queste definizioni e proprietà preliminari, enunciamo il *Teorema del Limite Centrale* in due diversi modi. Questo primo enunciato sarà dimostrato con l'aiuto del *Teorema di de l'Hopital* o delle *serie di Taylor* che si suppone uno studente dell'ultimo anno di liceo sappia maneggiare.

Teorema 1. *Sia $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, ognuna con media μ e varianza σ^2. Allora, per $-\infty < a < +\infty$,*

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \longrightarrow \Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \quad .$$

Il secondo enunciato, invece, sarà dimostrato in modo più tecnico utilizzando delle stime preliminari.

Definizione 22. *Date f, g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(t) = \mathcal{O}(g(t)) \quad per\ t \to L$$

se

$$\limsup_{t \to L} \left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| < \infty$$

mentre

$$f(t) = o(g(t)) \quad per\ t \to L$$

se

$$\limsup_{t \to L} \left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| = 0$$

Stime:

1. $|R_n(x)| \leq min \left(\frac{2|x|^n}{n!}, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right)$;
2. $\phi(t) = 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2} + o(t^2)$;
3. $|\log(1+z) - z| \leq z^2$.

Teorema 2. *Sia X_n una successione di variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite tali che $E[X_n] = \mu$ e $Var[X_n] = \sigma^2 \leq +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la legge di $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$ converge in distribuzione alla normale standard $N(0,1)$.*

Infine, nell'ultimo capitolo, dopo aver riportato e commentato alcuni temi relativi agli Esami di Stato di una maturità scientifica, proporremo una possibile unità didattica, che si pensa sia adatta al raggiungimento degli obiettivi voluti riuscendo in qualche modo a dare agli studenti i concetti più importanti della disciplina anche nel "poco tempo disponibile (4 ore settimanali)" previsto dalle disposizioni ministeriali.

Concentreremo l'attenzione sull'introduzione delle variabili aleatorie e in particolare sul rapporto già visto nel capitolo 2 tra la binomiale e la normale. Supporremo, inoltre, che la classe abbia affrontato un'introduzione alla probabilità durante il biennio e un'approfondimento della stessa nei primi due anni del triennio.

L'unità didattica che proponiamo nella seguente trattazione, riguarda proprio la definizione e applicazione di alcune variabili aleatorie, che offrono un modo per "modellizzare" i fenomeni del mondo che ci circonda. In particolare, riporteremo le varie distribuzioni di "variabili aleatorie discrete" mettendo in evidenza che tipo di modello rappresentano e, infine, ci affacceremo al mondo del continuo con la "variabile normale", richiamando quanto visto nel capitolo 2 sulla sua approssimazione mediante degli esempi.

Di seguito enumeriamo le distribuzioni proposte:

1. Variabili aleatorie discrete in generale;

2. Variabile aleatoria bernoulliana:

    Definizione 23. *Una variabile aleatoria X è* ***bernoulliana*** *se può assumere solo due valori, cioè descrive il verificarsi o no di un evento.*

Densità di probabilità:

$$P[X = 1] = p(1) = p \qquad \text{e} \qquad P[X = 0] = p(0) = 1 - p$$

Funzione di distribuzione:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 - p & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Media e varianza:

$$E[X] = p \qquad \text{e} \qquad Var[X] = p(1 - p)$$

3. Variabile aleatoria binomiale;

Modello: Conta il numero di successi, k, in un certo numero, n, di prove;

Densità di probabilità:

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Definizione 24. *La variabile aleatoria X descritta prende il nome di* ***variabile aleatoria binomiale*** *e ha due parametri:*

- *il numero n di prove bernoulliane da effettuare;*
- *la probabilità p di successo di ogni prova.*

Funzione di distribuzione:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

per ogni $0 \leq x \leq n$.

Media e varianza:

$$E[X] = np \qquad \text{e} \qquad Var[X] = np(1-p)$$

4. Variabile aleatoria geometrica;

   Modello: Conta il numero di prove, k, necessarie per ottenere il primo successo;

   Densità di probabilità:

   $$P[X = k] = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad \forall k \geq 1, k \in \mathbb{N}$$

   Definizione 25. *La variabile aleatoria formalmente descritta sopra prende il nome di **variabile aleatoria geometrica**.*

   Funzione di distribuzione:

   $$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (1-p)^x \qquad \forall x \geq 0$$

   Media e varianza:

   $$E[X] = \frac{1}{p} \qquad \text{e} \qquad Var[X] = \frac{(1-p)}{p^2}$$

   Teorema 3. *La probabilità che un esperimento bernoulliano restituisca $m+n$ insuccessi, dopo che se ne siano verificati già n, è indipendente dagli n insuccessi iniziali.*

5. Variabile aleatoria poissoniana;

   Modello: É un modo per approssimare esperimenti di tipo binomiale per n molto grandi e p molto piccole, quindi con un rapporto costante $\lambda = np$;

Densità di probabilità:

$$P[X=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \ , \quad \forall k \geq 0$$

Definizione 26. *La variabile aleatoria X così considerata prende il nome di* ***variabile aleatoria poissoniana*** *di parametro λ*

Funzione di distribuzione:

$$F(x)=P(X\leq x)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Media e varianza:

$$E[X]=\lambda \qquad \text{e} \qquad Var[X]=\lambda$$

Infine, abbiamo definito la variabile aleatoria normale, non soffermandoci su di essa, quanto sulla sua applicazione nell'approssimazione di esperimenti di tipo binomiale.

Definizione 27. *Diciamo che X è una* ***variabile aleatoria normale*** *di parametri μ e σ^2, se la densità di X è data da*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad con \ \ x\in\mathbb{R}$$

Abbiamo calcolato media e varianza ottenendo:

$$E[X]=\mu \qquad \text{e} \qquad Var[X]=\sigma^2$$

Prima di procedere con l'applicazione del teorema del limite centrale abbiamo introdotto il concetto di *standardizzazione*:

Definizione 28. *Data una variabile casuale X, con media μ e varianza σ^2, si chiama* ***standardizzata*** *di X la variabile casuale*

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \ .$$

Infine abbiamo dato degli esempi in cui il teorema, nel caso particolare di "*De Moivre-Laplace*", viene applicato a situazioni reali, confrontando i risultati ottenuti utilizzando la distribuzione binomiale con quelli invece approssimati tramite la distribuzione normale.

La scelta di approfondire l'insegnamento di questa nuova disciplina sta nella convinzione che essa posside una grande capacità di rendere una materia come la matematica, che spesso "rende la vita difficile" agli studenti, più piacevole proprio per la sua attinenza alla vita quotidiana e, per dare una risposta a tutti quegli alunni che spesse volte si chiedono: "*Ma a cosa serve la matematica?*"

Bibliografia

[1] Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi. *Probabilità + Distribuzioni di probabilità*. Zanichelli.

[2] Ottmar Beucher. *Il Teorema del Limite Centrale*. Lezione all'Università degli Studi di Parma, 2009.

[3] Marco Bramanti. *Calcolo delle probabilità e statistica, percorsi di insegnamento nel triennio delle superiori*. Dispense.

[4] Mauro Cerasoli. *Breve storia ragionata della probabilità*. 1995. http://www.webalice.it/mauro.cerasoli/Articoli/A43/Art43.htm.

[5] Valerio Curcio. *Distribuzioni di probabilità di variabili aleatorie discrete*. Dispense. http://www.valeriocurcio.com/didattica/distrib_var_aleat.pdf.

[6] E. di Nardo. *Il Teorema centrale del Limite*. Dispense.

[7] Stefania Fiorini e Nicola Monforte. *Probabilità insegno*. Dispense. http://www.edscuola.it/archivio/didattica/probabili.pdf.

[8] Ana Millán Gasca. *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza*. Mimesis (collana Quaderni a quadretti), 2004.

[9] Maurice G. Kendall. Articolo tradotto da Enzo Lombardo. *Le origini del calcolo delle probabilità*.
http://matematica.unibocconi.it/articoli/le-origini-del-calcolo-delle-probabilità.

[10] Antonio Maturo. *L'insegnamento del Calcolo delle Probabilità ed i quesiti agli Esami di Stato*.
http://unich.academia.edu/AntonioMaturo/Papers/349759/lInsegnamento_Del_Calcolo_Delle_Probabilità_Ed_I_Quesiti_Agli_Esami_Di_Stato.

[11] A. Negro. *Elementi di Calcolo delle Probabilità*, quaderno n.33. Università di Torino, QUADERNI DIDATTICI del Dipartimento di Matematica.

[12] Sheldon M.Ross. *Calcolo delle probabilità*. Apogeo, 2004.

[13] Luigi Tomasi. Associazione "Patavina Mathesis". *La Matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado: osservazioni sulle Indicazioni nazionali.*. Diapositive.
http://www.math.unipd.it/∼ mathesis/allegati/matematica-e-riordino-scuola-sec-2-grado.pdf.

[14] Gianni Vallardi. *Giochi di ingegno*. Opuscolo, Mondadori.

[15] Ornello Vitali. *Principi di statistica*, cap.8. Cacucci, 2003.

[16] David Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Pr., 1991.

[17] *Revisione dell'assetto ordinamentale, organizzativo e didattico dei licei ai sensi dell'articolo 64, comma 4, del decreto legge 25 giugno 2008, n.*

112, convertito dalla legge 6 agosto 2008, n. 133". Decreto del MIUR (Riforma Gelmini), Marzo 2010.
http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/doc/Regolamento_licei_definitivo_16.02.2010.pdf

[18] *Teoremi limite classici*, cap.5. Dispense.
http://www.matapp.unimib.it/∼ fcaraven/did0809/Capitolo5.pdf.

[19] *Perchè si standardizza*. Diapositive.
http://www.federica.unina.it/sociologia/tecniche-di-ricerca-sociale/variabili-standardizzazione-deflazione/.

[20] *Capitolo 5. Probabilità nel continuo*. Dispense.
http://www.dif.unige.it/epi/hp/pal/5-EMS-DistNormale.pdf.