

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica

di

Emiliano De Simone

Teoria KAM e Gruppo di Rinormalizzazione

Relatore

Prof. Antti Kupiainen

Relatore interno

Prof. Luigi Chierchia

Il Candidato

Il Relatore

Il Relatore interno

ANNO ACCADEMICO 2000 - 2001

LUGLIO 2001

Classificazione AMS : 37J40, 37F25.

Parole Chiave : Teoria KAM, piccoli denominatori, Gruppo di rinormalizzazione,

A Gaetano e Rita

Ringraziamenti

Ringrazio il prof. Antti Kupiainen per avermi dato la possibilità di scrivere questa tesi all'università di Helsinki, per la sua pazienza e per avermi mostrato che l'eleganza non costituisce l'essenza della ricerca matematica, bensì la meritata ricompensa di un lavoro svolto con intelligenza. Il prof. Luigi Chierchia, mio relatore interno all'università di "Roma III", per avermi permesso di entrare in contatto con l'università di Helsinki e con A.Kupiainen. Il collega e amico Alain Schenkel, per il contributo fondamentale alla stesura di questa tesi e per l'aiuto nella correzione di numerose imprecisioni. Mikko Stenlund per le fruttuose quotidiane discussioni sulla Teoria KAM e altre amenità. Aino Rista per la delicatezza con la quale si è mostrata interessata al presente lavoro e al suo autore. Marco "Il Vikingo" Marinopiccoli per essersi preso carico della burocrazia all'università "Roma III" e per aver condiviso con me momenti di gioia e sconforto durante la contemporanea stesura delle nostre rispettive tesi.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Teoria delle perturbazioni	1
1.2	Abstract	6
2	Approccio classico alla teoria KAM	9
2.1	Preliminari	9
2.2	Trasformazioni canoniche	13
2.3	Approccio classico	14
2.3.1	I “piccoli denominatori”	14
2.3.2	L’iterazione	15
3	Rinormalizzazione	19
3.1	L’ Hamiltoniana perturbata	19
3.2	Schema del Gruppo di Rinormalizzazione	22
4	Stime nello spazio di Fourier	25
4.1	Spazi	25
4.2	Stime induttive	28

5	Identità di Ward	35
5.1	Un approccio variazionale	35
5.2	Le identità	37
5.3	Cancellazione delle risonanze	41
6	Stime uniformi	49
6.1	Sottospazi n -dipendenti	49
6.2	Costruzione delle soluzioni	51
7	Dimostrazione del Teorema KAM	69
8	Gruppo di Rinormalizzazione e Serie di Lindstedt	73
8.1	Cenni introduttivi	73
8.2	Rappresentazione ad alberi	75
A	Appendice	87
A.1	Stime di Cauchy	87
A.2	Lemmi tecnici	88
A.3	Etichettature	90
	Bibliografia	95

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Teoria delle perturbazioni

È un principio filosofico generalmente accettato il fatto che nei sistemi fisici, la configurazione in un determinato istante ne determini lo stato negli istanti di tempo successivi, per questo essi vengono chiamati *deterministici*. Euristicamente si tende spesso ad identificare deterministico con prevedibile e prevedibile con semplice, ma ciò è solamente un abuso di linguaggio. Diviene sempre più evidente il fatto che anche sistemi molto semplici possono avere dei comportamenti molto complicati, e dipendere in maniera drastica non solo dalle condizioni iniziali, ma anche da piccole variazioni del modello fisico stesso. Si noti ad esempio che malgrado l'oscillatore armonico possieda soluzioni periodiche, l'introduzione del più piccolo attrito lo porta all'equilibrio.

Se un sistema ci viene fornito all'interno di un problema pratico dobbiamo preoccuparci dunque della possibilità di poter applicare i nostri risultati matematici al mondo reale. Infatti, come detto in precedenza,

nel caso in cui tali risultati siano sensibili a delle piccolissime variazioni del modello, si avrà che una modifica arbitrariamente “piccola” del sistema, porta ad un altro sistema con proprietà essenzialmente differenti. Risultati del genere non possono essere trasferiti ad un processo reale senza la dovuta cautela, poiché nel costruire il modello la situazione è stata necessariamente idealizzata e semplificata, i parametri sono stati determinati solo approssimativamente ecc.

Un esempio classico è fornito dal sistema solare e dal moto dei suoi pianeti attorno al Sole, i quali obbediscono alla legge di gravitazione universale. Essendo la massa dei pianeti molto piccola rispetto a quella del Sole possiamo trascurare la loro mutua interazione e tenere conto solo dell'attrazione esercitata su di essi da parte del Sole. Si ottiene in questo modo un sistema che viene detto *integrabile*, nel quale ogni pianeta descriverà un'ellisse kepleriana attorno al Sole. Se però decidiamo di considerare la mutua interazione dei pianeti, il moto di questi ultimi varierà e si porrà alla nostra attenzione il quesito se le orbite manterranno essenzialmente la propria forma oppure se questa verrà modificata completamente: possono i pianeti cadere sul Sole, allontanarsene, urtare fra di loro? Inoltre, considerando un intervallo di tempo infinito, su quale scala di tempi tali fenomeni accadranno? La *teoria delle perturbazioni*, sviluppatasi a partire dalle premesse fin qui enunciate, è chiamata a rispondere a queste domande.

Un mezzo appropriato per discutere tali problemi è il formalismo hamiltoniano. Data la funzione di Hamilton $H(I, \theta)$ definita per $I \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in \mathbb{T}^N$, le equazioni del moto del sistema sono

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} \quad (1.1)$$

Le variabili I vengono dette *azioni*, mentre le θ vengono dette *angoli*. Un sistema hamiltoniano viene detto *integrabile* allorché la funzione di Hamilton dipende solo dalle azioni. Il sistema si integra facilmente e le equazioni del moto sono banali

$$\dot{I} = 0 \quad \dot{\theta} = \left. \frac{\partial H}{\partial I} \right|_{I=I_0} \equiv \omega_{I_0} \quad (1.2)$$

Per nostra sfortuna, l'insieme dei problemi integrabili di cui disponiamo è molto ridotto (problemi a una dimensione, moto di un punto in un campo centrale, moto euleriano e lagrangiano del corpo rigido, problema di due centri fissi, moto lungo una geodetica di un ellissoide). Tuttavia per mezzo di questi casi, si può ottenere un'informazione piuttosto significativa sul moto di numerosi sistemi importanti, considerando il problema integrabile come una prima approssimazione.

Il “problema generale della dinamica” secondo Henri Poincaré (cfr. [Poi99], vol. I, cap. I) è proprio lo studio delle equazioni governate dall'Hamiltoniana *quasi integrabile*

$$H(I, \theta) \equiv h(I) + \lambda v(I, \theta) \quad (1.3)$$

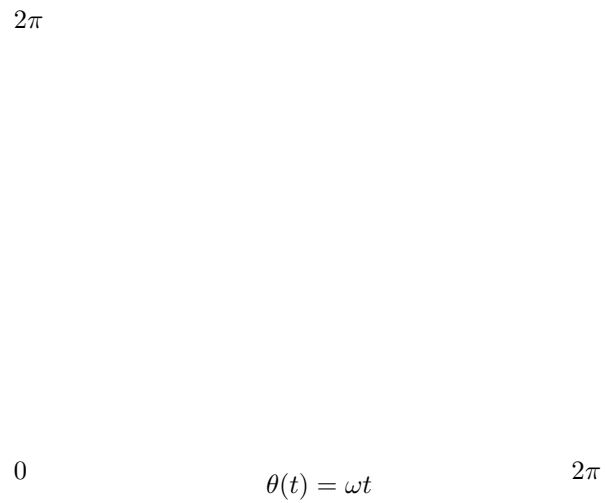
per valori piccoli del parametro λ . In linea di principio la scelta di un sistema integrabile come prima approssimazione non è la sola possibile, ma, come vedremo nella successiva discussione approfondita sul teorema KAM, è opportuno scegliere quale sistema non perturbato un sistema dotato di caratteristiche particolari. Nel caso dei sistemi inte-

grabili tale caratteristica di particolare interesse per lo studio è costituita dalla presenza di orbite *quasi-periodiche*. Queste ultime sono definite in generale nella maniera seguente: dato un vettore ω *razionalmente indipendente*, cioè $\exists n \in \mathbb{Z}^N, n \neq 0$ t.c. $\omega \cdot n = 0$, una funzione continua a valori complessi $q(t)$ è detta *quasi-periodica* su \mathbb{T}^N (con frequenza ω) se esiste un vettore $\omega \in \mathbb{Z}^N$ razionalmente indipendente e una funzione continua $Q : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $q(t) = Q(\omega t)$.

Nel caso integrabile abbiamo una famiglia di tori invarianti $\mathbb{T}_{I_0} = \{(I_0, \theta) \mid \theta \in \mathbb{T}^N\}$ sui quali si svolgerà interamente la traiettoria $\theta(t) = \omega t$ (cfr. Fig. 1.1). Si può dimostrare che se ω è razionalmente dipendente, allora la traiettoria si svolge su di un Toro la cui dimensione è inferiore ad N (cfr. ad esempio [Val98, pp. 15-20]), mentre se ω è razionalmente indipendente (dunque la soluzione è quasi-periodica) la traiettoria è densa su \mathbb{T}^N (cfr. ad esempio [KH95, p. 33]). Nel caso non degenere: $\det|\frac{\partial^2 h}{\partial I^2}| \neq 0$, è possibile numerare i tori con le frequenze: chiameremo risonanti quelli relativi a frequenze razionalmente dipendenti e non risonanti quelli numerati da frequenze indipendenti.

Nel caso perturbato e non degenere si osserva che, se la perturbazione è sufficientemente piccola, per la maggior parte degli ω razionalmente indipendenti è ancora possibile trovare soluzioni quasi-periodiche con frequenza ω ; il che significa che la maggioranza dei tori invarianti non risonanti non viene distrutta, ma si deforma solo un po', in modo che nello spazio delle fasi del sistema perturbato vi siano comunque dei tori invarianti sui quali sono ovunque dense le curve di fase.

Nel proseguio della tesi verificheremo l'esistenza di tali soluzioni quasi-periodiche del problema perturbato in corrispondenza di frequenze

Figura 1.1: Flusso lineare su \mathbb{T}^2

che siano non solo indipendenti, ma che, come vedremo, non soddisfino nemmeno approssimativamente nessuna relazione di risonanza di ordine piccolo.

1.2 Abstract

Il principale scopo di questa tesi sarà di perfezionare il metodo usato in [BGK99] per ridimostrare il classico teorema KAM . A tale scopo, nel presente lavoro, sviluppiamo uno schema iterativo per la risoluzione dell' equazione risultante dall'imposizione di soluzioni quasi-periodiche al problema perturbato

$$\mathcal{D}^2 X|_{\theta=\omega t} = -\lambda \partial_\theta v|_{\theta=\omega t+X(\omega t)} \quad \text{dove} \quad \mathcal{D}^2 \equiv (\omega \cdot \partial_\theta)^2 \quad (1.4)$$

Tale schema è basato sull'applicazione dell' idea del Gruppo di Rinormalizzazione proveniente dalla teoria quantistica di campo . L'idea è di dividere $(\mathcal{D}^2)^{-1}$ nella parte contenente i piccoli denominatori e quella contenente i grandi denominatori , dove grandi e piccoli sono definiti rispetto ad una scala dell'ordine dell'unità. Il passo successivo consisterà nel risolvere la parte dei grandi denominatori, il che darà luogo a una nuova equazione del tipo (1.4) per la parte dei piccoli denominatori, con un nuovo membro destro. La procedura verrà iterata, e la scala separerà piccoli e grandi denominatori all' n -esimo passo pari a η^n per $\eta < 1$ fissato. Come risultato otteniamo una successione che convergerà ad un problema triviale quando $n \rightarrow \infty$. Ogni generico passo verrà risolto utilizzando il Teorema del Punto Fisso di Banach .

La nostra iterazione sarà poi vista nel Capitolo 8 come una risomazione iterativa della serie di Lindstedt . L'approccio iterativo rende più semplice l'ardua parte combinatoria dei piccoli denominatori (cfr. [CC93, LC94, Eli88]). La formulazione funzionale elimina anche il mistero che risiede dietro alle delicate cancellazioni nella serie di Lindstedt: ciò si rivela essere una semplice conseguenza di una simmetria nel pro-

blema formulata nei termini delle cosiddette *identità di Ward* provenienti dalla teoria quantistica di campo. Per un'interpretazione basata sulla teoria quantistica di campo si veda [BGK99, sez. 8].

Nel capitolo 8 viene mostrato per la prima volta in dettaglio il modo in cui possono essere rappresentati per mezzo dei grafici ad albero i primi elementi della successione delle iterazioni che converge alla soluzione, usando il formalismo sviluppato in questa tesi. Ciò renderà ovvia la rappresentazione grafica della soluzione X enunciata in [BGK99]. Mostriamo inoltre come le cancellazioni che avvengono tra le strutture risonanti, alcune delle quali vengono riportate come esempio, possano essere scritte nei termini del nostro approccio funzionale, risultando più evidenti e dirette.

Anche lo schema presentato in questa tesi differisce in maniera significativa da [BGK99], poichè nella separazione delle scale la funzione di taglio che viene introdotta non è analitica bensì a supporto compatto, il che rende la tecnica dimostrativa molto più vicina all'approccio intuitivo usato nella rappresentazione grafica, la quale fa uso di una "vera" separazione delle scale. Inoltre, gli spazi introdotti risultano più naturali (non c'è bisogno di introdurre nessun "peso" nelle relative norme), ciò si traduce in una maggiore facilità nel trattare le varie scale, infatti l'iterazione necessaria al fine della dimostrazione si rivela più semplice ed è tale che il contributo fornito dalle identità di Ward risulta più diretto.

Capitolo 2

Approccio classico alla teoria

KAM

2.1 Preliminari

Da ora in poi M indicherà una varietà differenziabile di dimensione pari, dotata di una struttura simplettica mediante l'assegnazione di una 2-forma differenziale ω^2 chiusa e non degenera definita in ogni punto x di M . Indicheremo la *varietà simplettica* così assegnata

$$(M, \omega^2) \tag{2.1}$$

Se ora facciamo corrispondere al vettore ξ tangente alla varietà simplettica (M, ω^2) nel punto x , la 1-forma ω_ξ^1 su TM_x secondo la formula

$$\xi \mapsto \omega_\xi^1(\eta) = \omega^2(\eta, \xi) \quad \forall \eta \in TM_x \tag{2.2}$$

definiamo in questo modo un isomorfismo I tale che

$$\begin{aligned} I : T^* M_x &\rightarrow TM_x \\ \omega_\xi^1 &\mapsto \xi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sia ora H una funzione a valori reali su (M, ω^2) . Allora dH è una 1-forma differenziale su M , e ad essa corrisponde, in ogni punto, qualche vettore tangente a M . Otteniamo in questo modo il campo vettoriale su M , $X_H \equiv I(dH)$, tale che:

$$\omega^2(X_H, \eta) = \omega_{X_H}^1(\eta) = dH(\eta) \quad \forall \eta \in TM_x. \quad (2.4)$$

Definizione. Il campo vettoriale X_H si chiama *campo vettoriale hamiltoniano*, H *funzione di Hamilton*

Supponiamo che il campo vettoriale hamiltoniano X_H dia un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro $g_H^t : M \rightarrow M$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g_H^t x = X_H(x) \quad (2.5)$$

Il gruppo g_H^t si chiama *flusso di fase hamiltoniano con funzione di Hamilton H*

Sia $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ un'altra funzione sulla varietà M

Definizione. Si chiama *parentesi di Poisson* $\{F, H\}$ delle funzioni F e H , date sulla varietà simplettica (M, ω^2) la derivata della funzione F , rispetto alla direzione del flusso di fase, con funzione di Hamilton H :

$$\{F, H\}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(g_H^t(x)) \quad (2.6)$$

In questo modo la parentesi di Poisson di due funzioni su M è ancora una funzione su M . Si ha inoltre il seguente

Corollario. 2.1.1. *La funzione F è un integrale primo del flusso di fase, con funzione di Hamilton H , se e soltanto se la sua parentesi di Poisson con H è identicamente nulla: $\{H, F\} = 0$*

Si dimostra inoltre il seguente teorema (per la dimostrazione cfr. ad es. [Arn95]).

Teorema. 2.1.2. *Se la funzione di Hamilton H data sulla varietà симпlettica (M, ω^2) , è costante sul gruppo a un parametro di trasformazioni canoniche, dato dall' hamiltoniana F , allora F è un integrale primo del sistema, con funzione di Hamilton H .*

Enunceremo ora, tratti da [HZ94], la definizione di *sistema integrabile* e il relativo teorema di Arnold-Jost senza dimostrazione

Definizione. Un campo vettoriale hamiltoniano X_H su M è detto *integrabile* se esistono n funzioni $F_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ le quali soddisfino in ogni punto di M :

- (i) $dF_1 \dots dF_n$ sono linearmente indipendenti
- (ii) $\{F_i, F_j\} = 0$ per ogni i, j
- (iii) $\{H, F_j\} = 0$ per ogni j

Introducendo la mappa

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad F(x) = (F_1(x), \dots, F_N(x)) \quad (2.7)$$

concludiamo da (i). che gli insiemi di livello

$$N_c = \{x \in M \mid F(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}^N \quad (2.8)$$

sono varietà N -dimensionali di M . I campi vettoriali hamiltoniani X_{F_j} sono linearmente indipendenti e, poiché $dF_i(X_{F_j}) = 0$ in vista di (ii), essi generano lo spazio tangente di N_c

$$T_x N_c = \text{span} \{X_{F_j}(x) \mid 1 \leq j \leq N\}$$

$x \in N_c$

Teorema. 2.1.3. *Assumiamo che esistano n funzioni F_j che soddisfino (i) e (ii) in ogni punto. Assumiamo, inoltre, che uno degli insiemi di livello, diciamo $T = F^{-1}(0) \subset M$ è compatto sia connesso. Allora*

1) *T è un toro N -dimensionale immerso*

2) *Esiste un intorno aperto U di T in M che può essere descritto dalle variabili azioni e angoli (I, θ) nella seguente maniera. Se $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ sono le variabili sul toro $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N / \mathbb{Z}^N$ e $I = (I_1, \dots, I_N) \in D_1$, dove D_1 e D_2 sono dei domini in \mathbb{R}^N contenenti $I = 0$, allora esiste un diffeomorfismo*

$$\psi : \mathbb{T}^N \times D_1 \rightarrow U = \bigcup_{c \in D_2} (F^{-1}(c) \cap U) \quad (2.10)$$

e un diffeomorfismo $\mu : D_2 \rightarrow D_1$, con $\mu(0) = 0$, tale che

$$\psi^* \omega = \sum_{j=1}^N dI_j \wedge d\theta_j = \omega^2 \quad (2.11)$$

$$\mu \circ F \circ \psi(I, \theta) = I \quad (2.12)$$

In particolare, ψ mappa il toro $\mathbb{T}^N \times \{0\}$ diffeomorficamente in $F^{-1}(0) = T$ e il toro $\mathbb{T}^N \times \{I\}$ in $N_c \cap U$ dove $I = \mu(c)$

Corollario. 2.1.4. Ogni sistema hamiltoniano integrabile con funzione di Hamilton H che possiede gli integrali primi F_j è trasformato dal diffeomorfismo simplettico ψ nel seguente sistema su $(\mathbb{T}^N \times D_1, \omega^2)$

$$H \circ \psi(I, \theta) = h(I) \quad (2.13)$$

dove l'hamiltoniana h dipende solo dalle azioni e non dalle variabili angolo θ

2.2 Trasformazioni canoniche

Consideriamo ora per semplicità $M = \mathbb{R}^{2N}$, ciò che verrà detto avrà dunque validità per lo meno locale in ogni varietà differenziabile. Scriviamo i punti di M nella maniera $x := (\bar{I}, \bar{\theta})$. Assegnamo su \mathbb{R}^{2N} la 2-forma canonica

$$\omega^2 \equiv d\bar{I} \wedge d\bar{\theta} \equiv \sum_{i=1}^N d\bar{I}_i \wedge d\bar{\theta}_i \quad (2.14)$$

che è chiusa e non degenera.

Dato un diffeomorfismo locale $\phi : \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$ indichiamo con $\phi^*\omega^2$ la 2-forma¹ tale che

$$\phi^*\omega^2(\xi_1, \xi_2) = \omega^2(\phi'\xi_1, \phi'\xi_2) \quad (2.15)$$

Definizione. Un diffeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^{2N} &\rightarrow \mathbb{R}^{2N} \\ (\bar{I}, \bar{\theta}) &\mapsto (I, \theta) \end{aligned}$$

¹Tale forma viene chiamata anche "pull back"

si dice *trasformazione canonica* se $\phi^*\omega^2 = \Omega^2$, dove Ω^2 è la forma ω^2 letta nelle nuove variabili

$$\Omega^2 \equiv dI \wedge d\theta \quad (2.16)$$

Enunciamo (per la dimostrazione cfr. [Thi78]) il seguente

Lemma. 2.2.1. *Una trasformazione canonica locale $\phi : (\bar{I}, \bar{\theta}) \mapsto (I, \theta)$ tale che*

$$\text{Det} \left(\frac{\partial I_i}{\partial \bar{I}_j} \right) \Big|_{\bar{\theta}=\text{cost.}} \neq 0 \quad (2.17)$$

può essere scritta localmente come

$$\theta_i = \frac{\partial S}{\partial I_i}, \quad \bar{I}_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{\theta}_i}, \quad S(I, \bar{\theta}) \in C^\infty \quad (2.18)$$

La funzione f è detta *generatrice locale*. Per contro, sia data $S(I, \bar{\theta}) \in C^\infty$ tale che $\text{Det}(\partial^2 S / \partial I_i \partial \bar{\theta}_j) \neq 0$, allora le equazioni precedenti definiscono una *trasformazione canonica locale*.

2.3 Approccio classico

2.3.1 I “piccoli denominatori”

Siano \bar{I} e $\bar{\phi}$ variabili azione-angolo, studiamo la particolare hamiltoniana perturbata

$$H(\bar{I}, \bar{\theta}) = \frac{1}{2} \bar{I}^2 + \lambda v(\bar{\theta}) \equiv h(\bar{I}) + \lambda v(\bar{\theta}) \quad (2.19)$$

Poiché v dipende in maniera periodica da $\bar{\theta}$, può essere espressa in serie di Fourier

$$v(\bar{\theta}) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} \hat{v}_q e^{i(\bar{\theta} \cdot q)} \quad (2.20)$$

Quindi, operiamo una trasformazione canonica alle nuove variabili I, θ definita dalla funzione generatrice $S(I, \bar{\theta})$ tale che

$$\bar{I} = I + \lambda \frac{\partial S}{\partial \bar{\theta}}, \quad \theta = \bar{\theta} + \lambda \frac{\partial S}{\partial I} \quad (2.21)$$

in modo che per qualche valore di I , diciamo $I = I_0$, il sistema rimanga integrabile all'ordine λ . Per fare questo poniamo

$$\omega \cdot \frac{\partial S}{\partial \bar{\theta}} + v(\bar{\theta}) = \hat{v}_0, \quad \omega \equiv \left. \frac{\partial h(I)}{\partial I} \right|_{I=I_0} = I_0 \quad (2.22)$$

la quale è formalmente risolta da

$$S(I, \bar{\theta}) = - \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^N \\ q \neq 0}} \frac{\hat{v}_k}{i(\omega \cdot q)} e^{i(\bar{\theta} \cdot q)} \quad (2.23)$$

Avremo dunque la nostra Hamiltoniana nelle nuove coordinate

$$H(I, \theta) = h(I) + \lambda \hat{v}_0 + \lambda^2 H_2(I, \theta) \quad (2.24)$$

nella quale H_2 resta finita allorché $\lambda \rightarrow 0$. Dobbiamo notare come i denominatori in (2.23) si annullino ogni volta che la frequenza è razionalmente dipendente. Qualora ciò accada, assumeremo che

$\text{Det}(\partial^2 h(I) / \partial I_i \partial I_j) \neq 0$ e invece di $I = I_0$ considereremo un valore vicino di I_0 tale che ω sia razionalmente indipendente. Purtroppo anche in quest'ultimo caso, i denominatori $(\omega \cdot q)$ possono diventare arbitrariamente piccoli, e la convergenza della serie (2.23) va verificata. Questo viene definito *il problema dei piccoli denominatori*.

2.3.2 L'iterazione

Si pone il problema di verificare se il procedimento appena visto possa essere iterato in modo da eliminare completamente la perturbazione.

Per molto tempo era diffusa l'opinione secondo la quale per una perturbazione arbitrariamente piccola, tutte le costanti del moto eccetto H sarebbero state distrutte e che dunque la traiettoria si sarebbe svolta in maniera densa sulla superficie equienergetica. Grazie ai lavori di Kolmogoroff, Arnold e Moser, è ora noto che non è questo il caso. Anche se non esistono altre costanti oltre H , per λ piccoli, ci sono sufficienti sottovarietà M -dimensionali tali che nella maggioranza dei casi il sistema si comporta virtualmente come un sistema integrabile.

Ad esempio nel caso

$$H(\bar{I}, \bar{\theta}) = h(\bar{I}) + H_1(\bar{I}, \bar{\theta}) = \bar{I} \cdot \omega + \frac{1}{2} \bar{I} \cdot C(\bar{\theta}) \cdot \bar{I} + A(\bar{\theta}) + B(\bar{\theta}) \cdot \bar{I} \quad (2.25)$$

possiamo ridurre la perturbazione $H_1(\bar{I}, \bar{\theta})$ a zero per mezzo di una serie di trasformazioni. Poiché solo h sopravviverà, il toro

$$\mathbb{T}_{I_0} := \{(I_0, \theta) : \theta \in \mathbb{T}^N\} \quad (2.26)$$

sarà invariante e verrà riempito dalle traiettorie

$$\theta \rightarrow \theta + \omega t \quad (2.27)$$

La funzione generatrice S del tipo (2.21) dovrà essere scelta in modo da produrre una trasformazione puntuale insieme ad una traslazione di I che dipenda da θ . La forma $h + H_1$ rimarrà invariante. Quindi, rendiamo le nuove A e B quadratiche rispetto alle vecchie, che consideriamo del primo ordine.

In [Thi78] viene dimostrato che tutto ciò è possibile tramite una funzione generatrice del tipo

$$S(I_0, \bar{\theta}) \equiv \xi \cdot \bar{\theta} + K(\bar{\theta}) + I_0 \cdot Z(\bar{\theta}) \quad (2.28)$$

$$\theta = \bar{\theta} + Z(\bar{\theta}), \quad \bar{I} = I + \frac{\partial K}{\partial \theta} + I \cdot \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \xi \quad (2.29)$$

in cui dovranno essere soddisfatte

$$K(\bar{\theta}) = - \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(k \cdot \bar{\theta})} \widehat{A}_k}{i(\omega \cdot k)} \quad (2.30)$$

$$Z(\bar{\theta}) = - \sum_{k \neq 0} \frac{e^{i(k \cdot \bar{\theta})}}{i(\omega \cdot k)} \left[\widehat{B}_k + \widehat{C}_k \cdot \xi + \left[C(\bar{\theta}) \frac{\partial K(\bar{\theta})}{\partial \theta} \right]_k \right] \quad (2.31)$$

Tale trasformazione, provata l'esistenza di K e Z può essere iterata conservando la struttura $h + H_1$ e riducendo a zero la perturbazione, ma la presenza dei piccoli denominatori in (2.30) e (2.31) farà sì che tali trasformazioni esistano solo per ω sufficientemente irrazionali, cioè appartenenti all'insieme dei “vettori diofantei”, che definiremo nel capitolo successivo.

Nel proseguio della tesi ci metteremo in una situazione particolare, cioè tratteremo l'hamiltoniana perturbata del tipo (2.19)

$$H(I, \theta) = \frac{1}{2} I^2 + \lambda v(\theta) \quad (2.32)$$

con $\theta \in \mathbb{R}^N / (2\pi\mathbb{Z}^N) \equiv \mathbb{T}^N$, $I \in \mathbb{R}^N$, $\omega \in \mathbb{R}^N$ ma invece di cercare una successione di trasformazioni canoniche definite su domini sempre più piccoli, considereremo delle generiche soluzioni quasi-periodiche che sostituiranno nelle equazioni del moto cercando di risolvere l'equazione risultante.

Capitolo 3

Rinormalizzazione

3.1 L' Hamiltoniana perturbata

Concentriamo dunque la nostra attenzione sull' Hamiltoniana

$$H(I, \theta, \lambda) = \frac{1}{2}I^2 + \lambda v(\theta) \equiv h(I) + \lambda v(\theta) \quad (3.1)$$

dove $I \in \mathbb{R}^N$, $\theta \in \mathbb{T}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Il flusso della parte integrabile, ovvero $h(I)$, è

$$I(t) = I_0 \quad (3.2)$$

$$\theta(t) = I_0 t \equiv \omega t \quad (3.3)$$

Le equazioni del moto per l'Hamiltoniana perturbata $H(I)$ sono

$$\dot{I} = -\lambda \frac{\partial v(\theta)}{\partial \theta} \quad (3.4)$$

$$\dot{\theta} = I \quad (3.5)$$

Le soluzioni quasi periodiche con frequenza ω dovranno avere la forma

$$I = I_0 + Y(\omega t) \quad (3.6)$$

$$\theta = \omega t + X(\omega t) \quad (3.7)$$

Sostituendole nelle (3.4) e (3.5) si ottiene l'equazione

$$\mathcal{D}^2 X|_{\theta=\omega t} = -\lambda \partial_\theta v|_{\theta=\omega t+X(\omega t)} \quad \text{dove} \quad \mathcal{D}^2 \equiv (\omega \cdot \partial_\theta)^2 \quad (3.8)$$

Si noti che, se X è una soluzione a (3.8) allora lo è anche X_β per $\beta \in \mathbb{R}^N$ e

$$X_\beta(\theta) = X(\theta - \beta) - \beta \quad (3.9)$$

L'equazione (3.8) non è di facile risoluzione, saremo in grado di trovare una soluzione solamente per ω "sufficientemente" irrazionali cioè verificanti la condizione diofantea

$$|\omega \cdot q| > a|q|^{-\nu} \quad \text{per} \quad q \in \mathbb{Z}^N, q \neq 0 \quad \exists a, \nu > 0 \quad (3.10)$$

Ambientiamo dunque X nello spazio di Banach: $H = \{X|X : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \|X\|_h \equiv \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} |X_q| < \infty\}$ e scriviamo (3.8)

$$\mathcal{D}^2 X(\theta) = -W(X(\theta)) \quad (3.11)$$

Si ha che $W : H \circlearrowleft$.

Scriviamo ora l'espansione in serie di Taylor per $WX(\theta)$, la quale ci tornerà utile in seguito.

$$\begin{aligned}
WX(\theta) &= \lambda \partial_\theta v(\theta + X(\theta)) \\
&= \lambda \partial_\theta v(\theta + \mu X(\theta)) \Big|_{\mu=1} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} \Big|_{\mu=0} \partial_i v(\theta + \mu X(\theta)) \right) \Big|_{\mu=1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 < \alpha_i < N}} X^{\alpha_1}(\theta) \cdots X^{\alpha_n}(\theta) \cdot \partial_\theta \partial^\alpha v(\theta) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Dove

$$\partial^\alpha v(\theta) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} v(\theta)}{\partial \theta^{\alpha_1} \cdots \partial \theta^{\alpha_n}} \quad (3.13)$$

Passando ai coefficienti di Fourier, da (3.12) otteniamo

$$\begin{aligned}
(WX(\theta))_q &= \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{n+1}}{n!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq \alpha_i \leq N}} \sum_{p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}^N} \left[(q - \sum_{i=1}^n p_i) (q - \sum_{i=1}^n p_i)^{\alpha_1} \right. \\
&\quad \left. \cdots (q - \sum_{i=1}^n p_i)^{\alpha_n} v_{(q - \sum_{i=1}^n p_i)} X_{p_1}^{\alpha_1} \cdots X_{p_n}^{\alpha_n} \right] \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}^N} \frac{i^{n+1}}{n!} (q - \sum_{i=1}^n p_i) v_{(q - \sum_{i=1}^n p_i)} \cdot \\
&\quad \cdot \prod_{k=1}^n (q - \sum_{i=1}^n p_i) \cdot X_{p_k} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Denotando $G := (-\mathcal{D}^2)^{-1}$ e scrivendo

$$F(X) \equiv GW(X) \quad (3.15)$$

otteniamo l'equazione

$$X = F(X) \quad (3.16)$$

La quale, ad esempio, possederebbe un'unica soluzione in H se F fosse una contrazione di H in se stesso.

Se consideriamo i coefficienti di Fourier di W sotto l'azione di G si ha

$$(GW)_q = \begin{cases} (\omega \cdot q)^{-2} W_q & \text{se } q \neq 0 \\ 0 & \text{se } q = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Per evitare il problema posto dalla presenza dei piccoli denominatori useremo una funzione di taglio che raggrupperà questi ultimi opportunamente, seguendo lo schema di rinormalizzazione che enunceremo nel paragrafo successivo.

3.2 Schema del Gruppo di Rinormalizzazione

Allo scopo di trovare una soluzione alla nostra equazione di partenza, che riscriveremo come

$$X = G_0 W_0(X) \quad (3.18)$$

adotteremo in maniera induttiva le trasformazioni indotte dal Gruppo di Rinormalizzazione. D'ora in avanti considereremo W_0 come una mappa da un spazio di funzioni X su \mathbb{T}^N a valori in \mathbb{R}^N . Per la costruzione induttiva della soluzione di (3.18), useremo la decomposizione

$$G_0 = G_1 + \Gamma_0 \quad (3.19)$$

In cui Γ_0 (che verrà definito rigorosamente nella sezione successiva) si occuperà dei soli coefficienti di Fourier con $|\omega \cdot q|$ maggiori di $\mathcal{O}(\eta)$ e G_1 di quelli con $|\omega \cdot q|$ minori di ciò. Dunque, se decomponiamo $X = Y + Z_1$, l'Eq. (3.18) diventa

$$Y + Z_1(Y) = (G_1 + \Gamma_0)W_0(Y + Z_1(Y)) \quad (3.20)$$

Se ora Z_1 è una soluzione per Y fissati della equazione dei “grandi denominatori”

$$Z_1(Y) = \Gamma_0 W_0(Y + Z_1(Y)) \quad (3.21)$$

definendo $W_1(Y) \equiv W_0(Y + Z_1(Y))$, otterremo che

$$\begin{aligned} X = Y + \Gamma_0 W_1(Y) &\equiv F_1(Y) \text{ è una soluzione di (3.18)} \iff \\ \iff Y = G_1 W_1(Y) & \end{aligned} \quad (3.22)$$

Abbiamo ridotto dunque il nostro problema originale ad uno in cui i denominatori piu’ grandi sono eliminati, a patto di trovare la soluzione della relativa e piu’ semplice equazione (3.21)

Dopo n passi induttivi vogliamo avere

$$\begin{aligned} X = Y + \Gamma_{n-1} W_n(Y) + \dots + \Gamma_0 W_n(Y) &\equiv F_n(Y) \\ \text{e' una soluzione di (3.18)} &\iff Y = G_n W_n(Y) \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove $W_j(Y) = W_{j-1}(Y + Z_j(Y))$ e G_n contiene solo i denominatori $|\omega \cdot q| \leq (\eta^n)$, dove η è un numero positivo più piccolo di 1 fissato una volta per tutte.

Ovviamente (3.23) è valida per $n = 1$. Nel successivo passo induttivo si decompone $G_{n-1} = G_n + \Gamma_{n-1}$ dove Γ_{n-1} si occupa degli $|\omega \cdot q|$ di ordine η^n e G_n di quelli minori. Se ora definiamo Z_n come la soluzione dell’ equazione di punto fisso

$$Z_n(Y) = \Gamma_{n-1} W_{n-1}(Y + Z_n(Y)) \quad (3.24)$$

e definiamo

$$F_n(Y) = F_{n-1}(Y + Z_n(Y)) \quad (3.25)$$

$$W_n(Y) = W_{n-1}(Y + Z_n(Y)) \quad (3.26)$$

allora, rimpiazzando Y nell' $(n - 1)$ -esimo passo induttivo (3.23) con $Y + Z_n(Y)$ otteniamo

$$\begin{aligned} X = F_n(Y) \text{ è una soluzione di (3.18)} &\iff \\ \iff Y + Z_n(Y) = G_{n-1}W_{n-1}(Y + Z_n(Y)) & \\ \iff Y = (G_{n-1} - \Gamma_{n-1})W_n(Y) & \\ \iff Y = G_nW_n(Y) & \quad (3.27) \end{aligned}$$

Notare che con queste definizioni W_n soddisfa le equazioni di punto fisso

$$W_n(Y) = W_{n-1}(Y + \Gamma_{n-1}W_n(Y)) \quad (3.28)$$

$$W_n(Y) = W_0(Y + \Gamma_{<n}W_n(Y)) \quad (3.29)$$

Possiamo equivalentemente risolvere queste ultime per W_n prima e poi definire $Z_n(Y) \equiv \Gamma_{n-1}W_n(Y)$ come la soluzione per la parte contenente i denominatori $|\omega \cdot q|$ di ordine $\leq \eta^n$, cioè

$$F_n(Y) = Y + \underbrace{\Gamma_{n-1}W_n(Y)}_{\equiv Z_n} + \dots + \Gamma_0W_n(Y) \quad (3.30)$$

è una soluzione di (3.18) se e solo se $Y = G_nW_n(Y)$

Capitolo 4

Stime nello spazio di Fourier

4.1 Spazi

Denoteremo da ora in poi con w_0 la trasformata di Fourier di W_0 , cioè

$$w_0(q; x) = \lambda \int_{\mathbb{T}^N} e^{iq \cdot \theta} \partial_\theta v(\theta + X(\theta)) d\theta \quad (4.1)$$

e ci riferiremo ad x come alla trasformata di Fourier di X . Vogliamo ora considerare w_0 come una funzione analitica su un opportuno spazio di Banach. L'analiticità di v implicà il seguente fatto: scrivendo, come in (3.12), l'espansione in serie di Taylor

$$\lambda \partial_\theta v(\theta + X(\theta)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda}{m!} U_m(\theta)(X, \dots, X) \quad (4.2)$$

avremo che i suoi coefficienti di Taylor apparterranno allo spazio delle mappe m -lineari $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \dots, \mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N)$ e le loro trasformate di Fourier obbediranno alla seguente stima

Lemma. 4.1.1. *esistono $\rho > 0$, $\alpha > 0$ e $b < \infty$ tali che la trasformata*

di Fourier di U_m soddisfi la disuguaglianza

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^N} e^{\alpha|q|} \|u_m(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \dots, \mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N)} \leq bm! \rho^{-m} \quad (4.3)$$

Dimostrazione. Dalle stime di Cauchy per le funzioni analitiche (cfr. Lemma A.1.1) si ha

$$\|U_m(\theta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \dots, \mathbb{C}^N; \mathbb{C}^N)} \leq Cm! \rho^{-m} \quad \exists C \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0 \quad (4.4)$$

inoltre, usando il teorema di Cauchy

$$\begin{aligned} & |u_m(q)(X_1, \dots, X_m)| = \\ & = \left| \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} U_m(\theta + i\eta)(X_1, \dots, X_m) e^{iq \cdot (\theta + i\eta)} d\theta \right| \\ & \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} |U_m(\theta + i\eta)(X_1, \dots, X_m)| e^{-q \cdot \eta} d\theta \\ & \leq Cm! \rho^{-m} |X_1| \cdot \dots \cdot |X_m| e^{-q \cdot \eta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

quindi

$$\|u_m(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \dots, \mathbb{C}^N)} \leq Cm! \rho^{-m} e^{-q \cdot \eta} \quad (4.6)$$

Dunque prendendo $\eta = |\eta| \frac{q}{|q|}$, nella striscia di analiticit  della funzione integranda, otteniamo

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}^N} e^{\alpha|q|} \|u_m(q)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, \dots, \mathbb{C}^N)} \leq C \underbrace{\sum_{q \in \mathbb{Z}^N} e^{(\alpha - |\eta|)|q|}}_{= b < \infty} m! \rho^{-m} \quad (4.7)$$

□

Sostituendo la serie di Fourier per X arriveremo all'espansione (3.14) che possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
w_0(q; x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}^N} \frac{\lambda}{m!} u_m(q, q_1, \dots, q_m)(x(q_1), \dots, x(q_m)) \\
&\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q_1, \dots, q_m \in \mathbb{Z}^N} w_0^{(m)}(q, q_1, \dots, q_m)(x(q_1), \dots, x(q_m)) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Possiamo considerare w_0 come una funzione analitica di x , con x appartenente allo spazio di Banach h

$$h = \{x = x(q) \mid x(q) \in \mathbb{C}^N, \|x\| \equiv \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} |x(q)|_1 < \infty\}$$

Sia $B(r_0)$ la palla aperta di raggio r_0 in h centrata nell'origine e $H^\infty(B(r_0), h)$ denoti lo spazio di Banach delle funzioni analitiche $w : B(r_0) \rightarrow h$, dotate della norma del sup, che denoteremo $\|\cdot\|_{H^\infty}$. La stima (4.3) ci garantirà che $w_0 \in H^\infty(B(r_0), h)$ per r_0 sufficientemente piccolo, ma, prima di verificare ciò, ci converrà stabilire le proprietà di decadimento dei nuclei $w_0^{(m)}$ ereditate dalla stima (4.3) come una proprietà del funzionale w_0 .

A questo scopo τ_β denoti la traslazione di un vettore $\beta \in \mathbb{R}^N$, $(\tau_\beta X)(\theta) = X(\theta - \beta)$. Su h , τ_β è realizzata da $(\tau_\beta x)(q) = e^{i\beta \cdot q} x(q)$. Induce una mappa $w \mapsto w_\beta$ da $H^\infty(B(r_0), h)$ in se stesso

$$w_\beta(x) = \tau_\beta(w(\tau_{-\beta}x)) \quad (4.10)$$

Sui nuclei $w^{(m)}$, ciò è dato da

$$w_\beta^{(m)}(q; q_1, \dots, q_m) = e^{i\beta \cdot (q - \sum q_j)} w^{(m)}(q; q_1, \dots, q_m) \quad (4.11)$$

ed è consistente anche per $\beta \in \mathbb{C}^N$.

Proposizione. 1. *Esistono $r_0 > 0$, $\alpha > 0$ e $D < \infty$, tali che $w_{0\beta} \in H^\infty(B(r_0), h)$ e si può estendere ad una funzione analitica in*

β nella regione $|Im\beta| < \alpha$ a valori in $H^\infty(B(r_0), h)$ che soddisfa la disuguaglianza

$$\|w_{0\beta}\|_{H^\infty} \leq D|\lambda| \quad (4.12)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} & \|w_{0\beta}\|_{H^\infty} = \\ &= \sup_{x \in B(r_0)} |\lambda| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\beta \cdot (q - \sum q_j)} w_0^{(m)}(q, q_1, \dots, q_m)(x(q_1), \dots, x(q_m))| \\ &\leq |\lambda| \sup_{x \in B(r_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}} e^{-Im\beta \cdot (q - \sum q_j)} \|w_0^{(m)}(q; q_1, \dots, q_m)\| \cdot \\ &\quad \cdot |x(q_1)| \cdot \dots \cdot |x(q_m)| \\ &\leq |\lambda| \sum_{m=0}^{\infty} \sup_{q_1, \dots, q_m} \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} e^{|Im\beta| |q - \sum q_j|} \|w_0^{(m)}(q; q_1, \dots, q_m)\| r_0^m \\ &= |\lambda| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r_0^m}{m!} \sup_{q_1, \dots, q_m} \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} e^{|Im\beta| |q - \sum q_j|} \|u_m(q - \sum q_j)\| \\ &\leq |\lambda| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r_0^m}{m!} b m! \rho^{-m} \\ &= |\lambda| \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} b \left(\frac{r_0}{\rho}\right)^m}_{=D} \end{aligned} \quad (4.13)$$

□

4.2 Stime induttive

Per definire l'operatore Γ_n effettivamente usato nella trasformazione indotta dal Gruppo di Rinormalizzazione, divideremo l'asse reale in scale.

$$\chi_1(\kappa) \quad \chi_0(\kappa)$$

$$\kappa \sim (\omega \cdot q)$$

Figura 4.1: rappresentazione di χ_0, χ_1 per $\eta = \frac{1}{4}$

Sia

$$\bar{\chi}(\kappa) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\kappa| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |\kappa| \geq 2 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

e interpoliamo tra 0 ed 1 altrove, con

$$\sup_{\kappa \in \mathbb{R}} |\bar{\chi}'(\kappa)| \quad , \quad \sup_{\kappa \in \mathbb{R}} |\bar{\chi}''(\kappa)| \leq C \quad (4.16)$$

finalmente poniamo

$$\chi_0(\kappa) \equiv 1 - \bar{\chi}(\kappa) \quad (4.17)$$

$$\chi_{n-1}(\kappa) \equiv \bar{\chi}(\eta^{-n+1}\kappa) - \bar{\chi}(\eta^{-n}\kappa) \quad \text{per } n \geq 2 \quad (4.18)$$

e (4.16) implica

$$\sup_{\kappa \in \mathbb{R}} |\chi_n'(\kappa)| \quad , \quad \sup_{\kappa \in \mathbb{R}} |\chi_n''(\kappa)| \leq C\eta^{-n} \quad (4.19)$$

Denotando il nucleo di un operatore A in $\mathcal{L}(h; h)$ con $A(q, q')$ \in

$\text{End}(\mathbb{C}^N)$, definiamo ora

$$\Gamma_n(q, q') = \chi_n(\omega \cdot q) G_0(q, q') = \frac{\chi_n(\omega \cdot q)}{(\omega \cdot q)^2} \delta(q, q') \equiv \gamma_n(\omega \cdot q) \delta_{q, q'} \quad (4.20)$$

Usando queste definizioni siamo in grado di dimostrare

Lemma. 4.2.1. *per $n \geq 1$*

$$\|\Gamma_{n-1}\|_{\mathcal{L}(h;h)}, \|\Gamma_{<n}\|_{\mathcal{L}(h;h)} \leq C\eta^{-2n} \quad (4.21)$$

Dimostrazione. Poiché Γ_n possiede un nucleo diagonale si avrà

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{n-1}\|_{\mathcal{L}(h;h)} &= \sup_{q \in \mathbb{Z}^N} |\Gamma_{n-1}(q)| \\ &\leq \sup_{\eta^n \leq |\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} \frac{|\chi_n(\omega \cdot q)|}{(\omega \cdot q)^2} \\ &\leq \sup_{\eta^n \leq |\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} \frac{1}{(\omega \cdot q)^2} \\ &\leq \eta^{-2n} \end{aligned} \quad (4.22)$$

inoltre

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{<n}\|_{\mathcal{L}(h;h)} &= \sup_{q \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{p=0}^{n-1} \Gamma_p(q) \right| \\ &\leq \sum_{p=0}^{n-1} \eta^{-2p-2} \\ &= \eta^{-2} \sum_{p=0}^{n-1} \eta^{-2p} \\ &= \eta^{-2} \frac{\eta^{-2n} - 1}{\eta^{-2} - 1} \leq C\eta^{-2n} \end{aligned} \quad (4.23)$$

per $\eta \ll 1$.

□

Gli operatori Γ_n commutano con τ_β .

$$\begin{aligned}
\tau_\beta(\Gamma_n x)(q) &= e^{i\beta \cdot q} \sum_{q' \in \mathbb{Z}^N} \Gamma_n(q, q') x(q') \\
&= \sum_{q' \in \mathbb{Z}^N} \Gamma_n(q, q') e^{i\beta \cdot q'} x(q') \\
&= \Gamma_n(\tau_\beta x)(q)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Nelle variabili di Fourier, le equazioni di punto fisso (3.28) e (3.29) possono essere scritte nella forma

$$w_{n\beta}(y) = w_{0\beta}(y + \Gamma_{<n} w_{n\beta}(y)) \tag{4.25}$$

$$w_{n\beta}(y) = w_{(n-1)\beta}(y + \Gamma_{n-1} w_{n\beta}(y)) \tag{4.26}$$

dove y denota ovviamente la trasformata di Fourier di Y . Analogamente (3.24), (3.25) e (3.30) si traducono nello spazio di Fourier nelle relazioni¹

$$z_{n\beta}(y) = \Gamma_{n-1} w_{(n-1)\beta}(y + z_{n\beta}(y)) \tag{4.27}$$

$$f_{n\beta}(y) = y + \Gamma_{<n} w_{n\beta}(y) \tag{4.28}$$

$$f_{n\beta}(y) = f_{(n-1)\beta}(y + \Gamma_{n-1} w_{n\beta}(y)) \tag{4.29}$$

Proposizione. 2. *Per ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo, $|\lambda| < \lambda_n(r)$ e $|\operatorname{Im}\beta| < \alpha$, le equazioni (4.25) hanno un'unica soluzione $w_{n\beta} \in H^\infty(B(r^n), h)$ con*

$$\|w_{n\beta}\|_{H^\infty} \leq D|\lambda| \tag{4.30}$$

dove D è come nella Proposizione 1. Le mappe $f_{n\beta}$ definite dalle equazioni (4.29) appartengono ad $H^\infty(B(r^n), h)$. Esse verificano la disu-

¹In (4.29) abbiamo usato il fatto che $z_{n\beta}(y) = \Gamma_{n-1} w_{n\beta}(y)$ come visto nella sezione 3.2

guaglianza $\|f_{n\beta}\|_{H^\infty} \leq 2r^n$. Inoltre $w_{n\beta}$ e $f_{n\beta}$ sono analitiche in λ e β e verificano le ricorsioni (4.26) e (4.29)

Dimostrazione. Possiamo scrivere l'equazione di punto fisso (4.25) come

$$w = F(w) \text{ e}$$

$$F(w)(y) = w_{0\beta}(y + \Gamma_{<n}w(y)) \quad (4.31)$$

Sia $\mathcal{B}_n = \{w \in H^\infty(B(r^n), h) : \|w\|_{H^\infty} \leq D\lambda_n\}$.

Scegliamo λ_n in modo che si abbia $C\eta^{-2n}D\lambda_n \leq r^n$. Se $w \in \mathcal{B}^n$ e $y \in B(r^n) \subset h$

$$\begin{aligned} \|y + \Gamma_{<n}w(y)\| &\leq r^n + \|\Gamma_{<n}\|_{\mathcal{L}(h,h)}\|w\|_{H^\infty} \\ &\leq r^n + C\eta^{-2n}D\lambda_n \\ &\leq 2r^n \leq \frac{r_0}{2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

se r è abbastanza piccolo. Perciò $Fw(y)$ è definita in $B(r^n)$ e per la Proposizione 1, $\|Fw(y)\| \leq D|\lambda| \leq D\lambda_n$, ciò vuol dire che $F : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_n$. Usiamo ora la proprietà (A.8) per concludere

$$\begin{aligned} &\|F(w_1) - F(w_2)\|_{H^\infty} \\ &= \|w_{0\beta}(y + \Gamma_{<n}w_1(y)) - w_{0\beta}(y + \Gamma_{<n}w_2(y))\|_{H^\infty} \\ &\leq \frac{2}{r_0}\|w_{0\beta}\|_{H^\infty}\|\Gamma_{<n}w_1(y) - \Gamma_{<n}w_2(y)\|_{H^\infty} \\ &\leq \frac{2}{r_0}D\lambda_n\|\Gamma_{<n}\|_{\mathcal{L}(h,h)}\|w_1(y) - w_2(y)\|_{H^\infty} \\ &\leq \frac{2}{r_0}\eta^{-2n}D\lambda_n\|w_1(y) - w_2(y)\|_{H^\infty} \\ &\leq 2\frac{r^n}{r_0}\|w_1(y) - w_2(y)\|_{H^\infty} \\ &\leq \frac{1}{2}\|w_1(y) - w_2(y)\|_{H^\infty} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Abbiamo mostrato che F è una contrazione in \mathcal{B}^n . Segue che l'Eq. (3.28) possiede un'unica soluzione $w_{n\beta}$ in \mathcal{B}^n che soddisfa la stima (4.30) ed è analitica in λ e β , essendo F analitica ed essendo la costante di Lipschitz indipendente da tali parametri. Si consideri ora per $n \geq 2$ la mappa F' :

$$F'(w)(y) = w_{0\beta}(y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y) + \Gamma_{<n-1}w(y)) \quad (4.34)$$

Di nuovo, F' è una contrazione in \mathcal{B}_n dal momento che possiamo notare che per $\|y\| \leq r^n$, si ha $\|y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y) + \Gamma_{<n-1}w(y)\| \leq 3r^n \leq \frac{r_0}{2}$ inoltre si ha usando (4.25)

$$\begin{aligned} F'(w_{n\beta})(y) &= w_{0\beta}(y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y) + \Gamma_{<n-1}w_{n\beta}(y)) \\ &= w_{0\beta}(y + \Gamma_{<n}w_{n\beta}(y)) \\ &= w_{n\beta}(y) \end{aligned} \quad (4.35)$$

inoltre

$$\begin{aligned} F'(w_{(n-1)\beta} \circ (1 + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}))(y) &= w_{0\beta}([y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y)] + \Gamma_{<n-1}w_{(n-1)\beta}[y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y)]) \\ &= w_{(n-1)\beta} \circ (1 + \Gamma_{n-1}w_{n\beta})(y) \end{aligned} \quad (4.36)$$

I due punti fissi della contrazione F' , entrambi in \mathcal{B}_N , devono coincidere:

$$w_{n\beta}(y) = w_{(n-1)\beta}(y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y)) \quad (4.37)$$

che è esattamente la ricorsione (4.26).

In virtù della stima (4.32), $\|y + \Gamma_{<n}w_{n\beta}(y)\| \leq 2r^n$ per $y \in B(r^n)$, dunque per la definizione (4.28) otteniamo la disuguaglianza cercata $\|f_{n\beta}\|_{H^\infty} \leq 2r^n$. La ricorsione (4.29) segue facilmente da (4.26) \square

Capitolo 5

Identità di Ward

5.1 Un approccio variazionale

Introduciamo il funzionale

$$S(X) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} (\mathcal{D}X(\theta))^2 d\theta - \lambda \int_{\mathbb{T}^d} v(\theta + X(\theta)) d\theta \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &\iff \left. \frac{dS(X + \varepsilon Y)}{\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall Y \in C^\infty(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^d) \\ &\iff \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{D}(X) \cdot \mathcal{D}(Y) d\theta + \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{T}^d} \partial_\theta v(\theta + X(\theta)) \cdot Y(\theta) d\theta = 0 \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \int_{\mathbb{T}^d} [\mathcal{D}^2 X + \lambda \partial_\theta v(\theta + X(\theta))] \cdot Y(\theta) d\theta = 0 \quad \forall Y \\ &\iff \mathcal{D}^2 X = -\lambda \partial_\theta v(\theta + X(\theta)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dove in (*) abbiamo usato:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{D}(X)^\alpha \cdot \mathcal{D}(Y)^\alpha d\theta \\
&= \sum_{i,j=1}^d \omega_i \omega_j \int_{\mathbb{T}^d} \partial_i X^\alpha \partial_j Y^\alpha d\theta \\
&= \sum_{i,j=1}^d \omega_i \omega_j \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \underbrace{\left. \partial_i X^\alpha Y^\alpha d\theta_1 \dots \widehat{d\theta_j} \dots d\theta_n \right|_0^{2\pi}}_{=0} + \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^d \omega_i \omega_j \int_{\mathbb{T}^d} (\partial_j \partial_i X^\alpha) Y^\alpha d\theta \\
&= - \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{D}^2 X \cdot Y d\theta \tag{5.3}
\end{aligned}$$

L'equazione (5.2) mostra che possiamo ottenere la nostra equazione originale da un punto di vista variazionale. Per ottenere le identità di Ward è fondamentale notare che l'azione appena introdotta gode di una particolare simmetria, cioè essa è invariante per traslazioni del tipo

$$T_\beta : X \mapsto X_\beta \quad X_\beta(\theta) = X(\theta + \beta) + \beta \quad \beta \in \mathbb{T}^d \tag{5.4}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
S(X_\beta) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} [\mathcal{D}X_\beta(\theta)]^2 d\theta - \lambda \int_{\mathbb{T}^d} v(\theta + X_\beta(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} [\mathcal{D}X(\theta + \beta)]^2 d\theta - \lambda \int_{\mathbb{T}^d} v(\theta + \beta + X(\theta + \beta)) d\theta \\
&\stackrel{[\theta \rightarrow \theta - \beta]}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} [\mathcal{D}X(\theta)]^2 d\theta - \lambda \int_{\mathbb{T}^d} v(\theta + X(\theta)) d\theta \\
&= S(X) \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Ciò significa che

$$\frac{dS(X_\beta)}{d\beta} = 0 \tag{5.6}$$

In particolare

$$\left. \frac{dS(X_\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=0} = 0 \quad (5.7)$$

5.2 Le identità

Calcoliamo ora la derivata del primo termine di $S(X_\beta)$ rispetto alla γ -esima componente di β e notiamo che essa si annulla.

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} [\mathcal{D}X_\beta(\theta)]^2 d\theta \right)}{d\beta^\gamma} \right|_{\beta=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{d}{d\beta^\gamma} (\mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta) \mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta)) \Big|_{\beta=0} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} 2\mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta) \frac{d}{d\beta^\gamma} \mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta) \Big|_{\beta=0} d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{D}X^\alpha(\theta) \partial_\gamma \mathcal{D}^\alpha(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \partial_\gamma (\mathcal{D}X^\alpha(\theta) \mathcal{D}X^\alpha(\theta)) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \mathcal{D}X^\alpha(\theta) \mathcal{D}X^\alpha(\theta) \Big|_0^{2\pi} d\theta_1 \dots \widehat{d\theta_\gamma} \dots d\theta_n = 0 \quad (5.8) \end{aligned}$$

Dove, per ottenere la terza uguaglianza abbiamo usato il semplice fatto:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\beta^\gamma} \mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta) \\ &= \partial_\nu \mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta) \frac{d}{d\beta^\gamma} (\theta + \beta)^\nu \\ &= \partial_\gamma \mathcal{D}X^\alpha(\theta + \beta) \quad (5.9) \end{aligned}$$

Segue da (5.6) che anche la derivata del secondo termine in $S(X_\beta)$ rispetto a β^γ deve essere uguale a zero.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\beta^\gamma} \Big|_{\beta=0} v(\theta + \beta + X(\theta + \beta)) \\
&= \partial_\alpha v(\theta + X(\theta)) \frac{d}{d\beta^\gamma} [\theta + \beta + X(\theta + \beta)]^{(\alpha)} \Big|_{\beta=0} \\
&= \partial_\alpha v(\theta + X(\theta)) \left[\frac{\partial \beta^\alpha}{\partial \beta^\gamma} + \frac{\partial X^{(\alpha)}(\theta + \beta)}{\partial \beta^\gamma} \right] \Big|_{\beta=0} \\
&= \underbrace{\partial_\alpha v(\theta + X(\theta))}_{W^\alpha(X, \theta)} \left[\delta_\gamma^\alpha + \frac{\partial X^{(\alpha)}(\theta)}{\partial \theta_\gamma} \right] \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Ciò significa che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^d} W^\gamma(X, \theta) d\theta &= - \int_{\mathbb{T}^d} W^\alpha(X, \theta) \partial_\gamma X^\alpha(\theta) d\theta \\
&= - \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \underbrace{W^\alpha(X, \theta) X^\alpha(\theta)}_{=0} \Big|_0^{2\pi} d^{d-1}\theta + \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^d} \partial_\gamma W^\alpha(X, \theta) X^\alpha(\theta) d\theta \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Otteniamo così l'identità di base

$$\int_{\mathbb{T}^d} W^\gamma(X, \theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}^d} \partial_\gamma W^\alpha(X, \theta) X^\alpha(\theta) d\theta \tag{5.12}$$

Nel linguaggio dei coefficienti di Fourier (lo 0-esimo)

$$w^\gamma(x, 0) = \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} i q_\gamma w^\alpha(x, q) x^\alpha(-q) \tag{5.13}$$

Segue immediatamente: $w^\gamma(0, 0) = 0$

Differenziando (5.13) rispetto a $x^\beta(k)$ e valutandola in $x = 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial w^\gamma(x, 0)}{\partial x^\beta(k)} \right|_{x=0} \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} i q_\gamma \left[\frac{\partial w^\alpha(x, q)}{\partial x^\beta(k)} x^\alpha(-q) + w^\alpha(x, q) \underbrace{\frac{\partial x^\alpha(-q)}{\partial x^\beta(k)}}_{\delta_\beta^\alpha \delta_{-q, k}} \right] \Big|_{x=0} \\
&\iff \left. \frac{\partial w^\gamma(x, 0)}{\partial x^\beta(k)} \right|_{x=0} = i \sum_{q \in \mathbb{Z}^n} \delta_{-q, k} q_\gamma w^\beta(0, q) = -i k_\gamma w^\beta(0, -k)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Riassumiamo le “identità di Ward” appena trovate, le quali saranno di fondamentale importanza nel proseguio della dimostrazione.

$$\begin{array}{l}
\boxed{w^\gamma(0, 0) = 0} \\
\boxed{\left. \frac{\partial w^\gamma(x, 0)}{\partial x^\beta(k)} \right|_{x=0} = -i k_\gamma w^\beta(0, -k)}
\end{array} \tag{5.15}$$

Allo scopo di dimostrare che esse valgono anche per $W_n \forall n \in \mathbb{N}$, è sufficiente dimostrare che per tali mappe, (5.12) è ancora valida, cioè

$$\int_{\mathbb{T}^N} W_n^\gamma(Y, \theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_n^\alpha(Y, \theta) Y^\alpha(\theta) d\theta \tag{5.16}$$

Abbiamo appena verificato che ciò è vero per il passo 0-esimo, possiamo dunque effettuare il passo induttivo. Assumiamo l’affermazione vera per W_{n-1}

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^N} W_n^\gamma(Y, \theta) d\theta &= \int_{\mathbb{T}^N} W_{n-1}^\gamma(Y + Z_n, \theta) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_{n-1}^\alpha(Y + Z_n, \theta) (Y + Z_n)^\alpha(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_{n-1}^\alpha(Y + Z_n, \theta) Y^\alpha(\theta) d\theta + \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_{n-1}^\alpha(Y + Z_n, \theta) Z_n^\alpha(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_n^\alpha(Y, \theta) Y^\alpha(\theta) d\theta + \\
&\quad + \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_{n-1}^\alpha(Y + Z_n, \theta) Z_n^\alpha(\theta) d\theta \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Dunque per provare l'affermazione sarà sufficiente verificare che l'ultimo integrale

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_{n-1}^\alpha(Y + Z_n, \theta) Z_n^\alpha(\theta) d\theta \\
&= \int_{\mathbb{T}^N} \partial_\gamma W_n^\alpha(Y, \theta) (\Gamma_{n-1} W_n(Y))^\alpha(\theta) d\theta \tag{5.18}
\end{aligned}$$

si annulla. Il membro destro è, a meno di $(2\pi)^n$ lo 0-esimo coefficiente di Fourier dell'integrando e cioè la convoluzione:

$$\begin{aligned}
&\sum_{q \in \mathbb{Z}^N} (\partial_\gamma W_n^\alpha(Y, \theta))_{-q} ((\Gamma_{n-1} W_n(Y))^\alpha(\theta))_q \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} (-iq)^\gamma w_n^\alpha(-q; y) \frac{\chi_{n-1}(\omega \cdot q)}{(\omega \cdot q)^2} w_n^\alpha(q, y) \\
&\stackrel{q \rightarrow (-q)}{=} - \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} (-iq)^\gamma w_n^\alpha(q, y) \frac{\chi_{n-1}(\omega \cdot (-q))}{(\omega \cdot (-q))^2} w_n^\alpha(-q, y) \\
&= - \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} (-iq)^\gamma w_n^\alpha(-q, y) \frac{\chi_{n-1}(\omega \cdot q)}{(\omega \cdot q)^2} w_n^\alpha(q, y) \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Dove abbiamo notato che χ_n è simmetrico rispetto all'origine. Abbia-

mo dunque mostrato che tale integrale è uguale al suo opposto, dunque si annulla.

5.3 Cancellazione delle risonanze

Le prossime identità riguarderanno le derivate Dw_n , le quali, come operatori lineari da h in h possono essere scritte nella forma

$$(Dw_n(y)x)(q) = \sum_{q' \in \mathbb{Z}^N} \frac{\partial w(q; y)}{\partial y^\beta(q')} x^\beta(q') \quad (5.20)$$

Per calcolare queste derivate partiamo dalle equazioni (4.25)

$$w_n(y) = w_0(y + \Gamma_{<n} w_n(y)) \quad (5.21)$$

prendendo le derivate di entrambi i membri

$$Dw_n(y) = Dw_0(\underbrace{y + \Gamma_{<n} w_n(y)}_{y_n}) \circ (1 + \Gamma_{<n} Dw_n(y)) \quad (5.22)$$

che diventa

$$(1 - Dw_0(y_n)\Gamma_{<n}) \circ Dw_n(y) = Dw_0(y_n) \quad (5.23)$$

che implica

$$Dw_n(y) = (1 - Dw_0(y_n)\Gamma_{<n})^{-1} \circ Dw_0(y_n) \quad (5.24)$$

Introduciamo ora un automorfismo continuo $t_p : \mathcal{L}(h; h) \rightarrow \mathcal{L}(h; h)$, per $p \in \mathbb{Z}^N$, il quale trasla entrambi gli argomenti del nucleo di un operatore lineare A , di p :

$$(t_p A)(q, q') = A(q + p, q' + p) \quad (5.25)$$

Verifichiamo agevolmente che t_p è un automorfismo

$$\begin{aligned}
t_p(AB)(q, q') &= (AB)(q + p, q' + p) = \\
&= \sum_{q'' \in \mathbb{Z}^N} A(q + p, q'') B(q'', q' + p) = \\
&= \sum_{q'' \in \mathbb{Z}^N} A(q + p, q'' + p) B(q'' + p, q' + p) = \\
&= (t_p A t_p B)(q, q') \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Lemma. 5.3.1.

$$t_p D w_0(y_1)(q, q') = D w_0(y_1)(q, q') \tag{5.27}$$

Dimostrazione. Dalla forma esplicita (3.14) dei coefficienti di Taylor di w_0

$$\begin{aligned}
w_0(q, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} \sum_{p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}^N} (q - \sum_{i=1}^n p_i) v_{(q - \sum_{i=1}^n p_i)} \cdot \\
&\cdot \prod_{k=1}^n (q - \sum_{i=1}^n p_i) \cdot y(p_k) \tag{5.28}
\end{aligned}$$

per $y = 0$ usiamo il termine al primo ordine

$$(D w_0(0)y)(q) = \sum_{q' \in \mathbb{Z}^N} (q - q') v_{(q - q')} (q - q') \cdot y(q') \tag{5.29}$$

che significa

$$D w_0(0)(q, q') = (q - q') v_{(q - q')} (q - q') \tag{5.30}$$

dal quale segue

$$t_p D w_0(0)(q, q') = D w_0(0)(q, q') \tag{5.31}$$

Nello stesso modo, da (5.28) possiamo ottenere che anche $D w_0(y)(q, q')$ dipende solo da $(q - q')$. Il Lemma è così provato. \square

Si noti inoltre che per la definizione (4.20) di Γ_n

$$t_p \Gamma_n(q, q') = \frac{\chi_n(\omega \cdot q + \omega \cdot p)}{(\omega \cdot q + \omega \cdot p)^2} \delta_{q, q'} := \Gamma_n(\omega \cdot p)(q, q') \quad (5.32)$$

Da ora in poi useremo dunque gli operatori $\Gamma(\kappa)$ con nucleo traslato:

$$\Gamma_n(\kappa)(q, q') = \gamma_n(\omega \cdot q + \kappa) \delta_{q, q'} \quad (5.33)$$

inoltre

$$\begin{aligned} t_p D w_n(y) &= t_p [(1 - D w_0(y_n) \Gamma_{<n})^{-1} D w_0(y_n)] \\ &= (1 - D w_0(y_n) \Gamma_{<n}(\omega \cdot p))^{-1} D w_0(y_n) \end{aligned} \quad (5.34)$$

cioè $t_p D w_n(y)$ dipende da p solo attraverso $(\omega \cdot p)$.

Possiamo dunque denotare $D w_{0\beta}(y) = \pi_{0\beta}(y)$ e definire

$$\pi_n(\kappa; y) \equiv [1 - \pi_0(y_n) \Gamma_{<n}(\kappa)]^{-1} \pi_0(y_n) \quad (5.35)$$

considerando (6.12) otteniamo dunque

$$t_p D w_n(y) = [1 - \pi_0(y_n) \Gamma_{<n}(\omega \cdot p)]^{-1} \pi_0(y_n) = \pi_n(\omega \cdot p, y) \quad (5.36)$$

Cioè $\pi_{n\beta}$ è un' interpolazione liscia di $t_p D w_{n\beta}(\kappa)$, e sulla diagonale si avrà che $D w_n(y)(q, q)$ dipende da q solo tramite $\omega \cdot q$, infatti

$$\begin{aligned} D w_n(y)(q, q) &= (t_q D w_n(y))(0, 0) \\ &= \Pi_n(\omega \cdot q; y)(0, 0) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Per la disuguaglianza (4.32), $y \in B(r^n) \subset h \Rightarrow \|y_n\| \leq \frac{r_0}{2}$. La Proposizione 1 e la stima (A.5) with $r' = r_0$, $r_1 = \frac{r_0}{2}$ implicano,

$$\begin{aligned} \|\pi_{0\beta}(y_n)\|_{\mathcal{L}(h;h)} &\leq \sup_{\|y\| < \frac{r_0}{2}} \|D w_{0\beta}(y)\|_{\mathcal{L}(h;h)} \leq \\ &\leq \frac{2}{r_0} \|w_{0\beta}(y)\|_{H^\infty} \leq \\ &\leq \frac{2}{r_0} D |\lambda| \end{aligned} \quad (5.38)$$

Segue dunque che $\pi_{n\beta}(\kappa; y)$ è definita per $|\lambda| < \lambda_n(r)$, $|\operatorname{Im}\beta| < \alpha$, $|\kappa| < \eta^n B$ e $y \in B(r^n) \subset h$ con norma arbitrariamente piccola se $\lambda \rightarrow 0$, ad esempio

$$\|\pi_{n\beta}(\kappa; y)\|_{\mathcal{L}(h;h)} \leq |\lambda|^{1/2} \quad (5.39)$$

Ricordando che $\partial_\kappa[u(\kappa)]^{-1} = -[u(\kappa)]^{-1}\partial_\kappa u(\kappa)[u(\kappa)]^{-1}$, otteniamo un'espressione esplicita per la derivata κ -esima di $\pi_{n\beta}(\kappa)$ differenziando (5.35)

$$\begin{aligned} \partial_\kappa \pi_{n\beta}(\kappa; y) &= [1 - \pi_{0\beta}(y_n)\Gamma_{<n}(\kappa)]^{-1} \\ &\quad \pi_{0\beta}(y_n)\partial_\kappa \Gamma_{<n}(\kappa)[1 - \pi_{0\beta}(y_n)\Gamma_{<n}(\kappa)]^{-1}\pi_{0\beta} = \\ &= \pi_{n\beta}(\kappa; y)\partial_\kappa \Gamma_{<n}(\kappa)\pi_{n\beta}(\kappa; y) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Non è difficile verificare che le mappe π_n verificano per $\|y\| \leq r^n$ e $|\kappa| < \eta^n$ la ricorsione

$$\pi_{n\beta}(\kappa; y) = [1 - \pi_{(n-1)\beta}(\kappa; \tilde{y})\Gamma_{n-1}(\kappa)]^{-1}\pi_{(n-1)\beta}(\kappa; \tilde{y}) \quad (5.41)$$

in cui abbiamo denotato $\tilde{y} \equiv y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y)$

Lemma. 5.3.2. *I nuclei $Dw_n(q, q')$ godono della simmetria*

$$Dw_n^{ll'}(q, q'; y) = Dw_n^{l'l}(-q', -q; y) \quad (5.42)$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la proprietà per Dw_0 , la tesi seguirà dall' Eq. (5.24). Se poniamo

$$F(X) = \lambda \int_{\mathbb{T}^N} v(\theta + X(\theta))d\theta \quad (5.43)$$

si vede che la derivata prima è:

$$DF(X)Y \equiv \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta F(X)}{\delta X(\theta)} Y(\theta)d\theta = \int_{\mathbb{T}^N} W_0(X, \theta)Y(\theta)d\theta \quad (5.44)$$

per definizione si ha

$$w_0(q; x) = \int_{\mathbb{T}^N} W_0(X, \theta) e^{iq \cdot \theta} d\theta = \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta F(X)}{\delta X(\theta)} e^{iq \cdot \theta} d\theta \quad (5.45)$$

espandendo

$$\begin{aligned} w_0(q; x + y) &= \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta F(X)}{\delta X(\theta)} e^{iq \cdot \theta} d\theta + \\ &+ \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \underbrace{\frac{\delta^2 F(X)}{\delta X(\theta) \delta X(\theta')}}_{DW_0(\theta, \theta')} Y(\theta') e^{iq \cdot \theta} d\theta' d\theta + \delta_2 w_0(q; y + x) \end{aligned} \quad (5.46)$$

poiché si ha anche

$$w_0(q; x + y) = w_0(q; x) + Dw_0(q; x)y + \delta_2(q; x) \quad (5.47)$$

otteniamo, eguagliando i due termini del primo ordine

$$\begin{aligned} Dw_0(q; x)y &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta^2 F(X)}{\delta X(\theta) \delta X(\theta')} Y(\theta') e^{iq \cdot \theta} d\theta' d\theta \\ &= \sum_{q' \in \mathbb{Z}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta^2 F(X)}{\delta X(\theta) \delta X(\theta')} e^{-iq' \cdot \theta'} e^{iq \cdot \theta} d\theta' d\theta y(q') \end{aligned} \quad (5.48)$$

che significa

$$\begin{aligned} Dw_0^{l'l'}(q, q'; x) &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta^2 F(X)}{\delta X^l(\theta) \delta X^{l'}(\theta')} e^{i(q \cdot \theta - q' \cdot \theta')} d\theta' d\theta = \\ &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\delta^2 F(X)}{\delta X^{l'}(\theta') \delta X^l(\theta)} e^{i(-q' \cdot \theta' - (-q) \cdot \theta)} d\theta' d\theta = \\ &= Dw_0^{l'l}(-q', -q; x) \end{aligned} \quad (5.49)$$

□

Da quest'ultimo Lemma otteniamo, più in generale

Corollario. 5.3.3. denotando i nuclei delle mappe $\pi_n(\kappa; y)$ con $\pi_n(q, q'; \kappa; y)$

$$\pi_n^{ll'}(q, q'; \kappa; y) = \pi_n^{l'l}(-q', q; \kappa; y) \quad (5.50)$$

Siamo ora in grado di dimostrare un'importante conseguenza dell'identità di Ward (5.12)

Lemma. 5.3.4.

$$\pi_n^{ij}(0, 0; \kappa; y)|_{\substack{\kappa=0 \\ y=0}} = 0 \quad \forall i, j \quad (5.51)$$

$$\partial_\kappa \pi_n^{ij}(0, 0; \kappa; y)|_{\substack{\kappa=0 \\ y=0}} = 0 \quad \forall i, j \quad (5.52)$$

Dimostrazione. Innanzitutto l'Equazione (5.14) è valida per w_n , come abbiamo mostrato, e ci dà

$$Dw_n^{ij}(0, q; 0) = \frac{\partial w_n^i(0; y)}{\partial y^j(q)}|_{y=0} = iq^i w_n^j(-q; 0) \quad (5.53)$$

Ponendo $q = 0$ otteniamo la prima uguaglianza

$$0 = Dw_n^{ij}(0, 0; y)|_{y=0} = \pi_n^{ij}(0, 0; \kappa; y)|_{\substack{\kappa=0 \\ y=0}} \quad (5.54)$$

Per la seconda usiamo la relazione (5.40) che, scritta in termini dei nuclei

$\pi_n(q, q'; \kappa; y)$, ci fornisce

$$\partial_\kappa \pi_n(q, q'; \kappa; y)|_{\substack{\kappa=0 \\ y=0}} = \sum_{m=1}^n \sum_{q'' \in \mathbb{Z}^N} Dw_n(q, q''; 0) \partial_\kappa \frac{\chi_{m-1}(\omega \cdot q'')}{(\omega \cdot q'')^2} Dw_n(q'', q'; 0) \quad (5.55)$$

In particolare, per $q = q' = 0$

$$\begin{aligned} \partial_\kappa \pi_n^{ij}(0, 0; \kappa; y)|_{\substack{\kappa=0 \\ y=0}} &= \sum_{m=1}^n \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} Dw_n^{il}(0, q; 0) \partial_\kappa \frac{\chi_{m-1}^{ll'}(\omega \cdot q)}{(\omega \cdot q)^2} Dw_n^{l'j}(q, 0; 0) = \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} Dw_n^{il}(0, q; 0) \partial_\kappa \frac{\chi_{m-1}^{ll'}(\omega \cdot q)}{(\omega \cdot q)^2} Dw_n^{jl'}(0, -q; 0) \end{aligned} \quad (5.56)$$

in cui per ottenere l'ultima disuguaglianza abbiamo usato il Lemma 5.3.2. Infine sostituiamo l'identità di Ward (5.53) e otteniamo la relazione

$$\partial_\kappa \pi_n^{ij}(0, 0; \kappa; y) \Big|_{\substack{\kappa=0 \\ y=0}} = \sum_{m=1}^n \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} q^i q^j w_n^l(-q, 0) \partial_\kappa \frac{\chi_{m=1}^{ll'}(\omega \cdot q)}{(\omega \cdot q)^2} w_n^{l'}(q; 0) \quad (5.57)$$

Il membro destro è banalmente simmetrico negli indici i, j mentre il membro sinistro è antisimmetrico negli stessi indici per il Corollario 5.3.3, quindi deve essere nullo. \square

Capitolo 6

Stime uniformi

6.1 Sottospazi n -dipendenti

Per facilitare lo studio degli innocui “grandi denominatori” risulta conveniente definire dei sottospazi di h che dipendano da n

$$h_n \equiv P_n h \tag{6.1}$$

Definendo la proiezione $P_n : h \rightarrow h$ nel seguente modo: $P_1 \equiv Id$ e per $n \geq 2$

$$P_n(y) = \begin{cases} y(q) & \text{se } |\omega \cdot q| < 2\eta^{(n-1)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{6.2}$$

Tali sottospazi ereditano la norma di h . Le immersioni naturali sono

$$h_n \rightarrow h_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow h \tag{6.3}$$

Notiamo che l'operatore Γ_{n-1} , oltre a “tagliare” i piccoli denominatori contiene la proiezione P_n , infatti dalla definizione si vede subi-

to che $\Gamma_{n-1} = \Gamma_{n-1}P_n$ e inoltre gli operatori $t_p\Gamma_{n-1}$ obbediscono alla disuguaglianza

Lemma. 6.1.1.

$$\|t_p\Gamma_{n-1}\|_{\mathcal{L}(h;h)} \leq \eta^{-2n} \quad (6.4)$$

Dimostrazione. ponendo $\kappa = (\omega \cdot q)$ e $\epsilon = (\omega \cdot p)$

$$\begin{aligned} \|t_p\Gamma_{n-1}\|_{\mathcal{L}(h;h)} &= \sup_{q \in \mathbb{Z}^N} \frac{|\bar{\chi}(\eta^{-n+1}(\kappa + \epsilon)) - \bar{\chi}(\eta^{-n}(\kappa + \epsilon))|}{(\kappa + \epsilon)^2} \\ &\leq \sup_{\substack{q \in \mathbb{Z}^N \\ \eta^n \leq |\kappa + \epsilon| \leq 2\eta^{n-1}}} \frac{1}{(\kappa + \epsilon)^2} \leq \eta^{-2n} \end{aligned} \quad (6.5)$$

□

Per semplificare la notazione, denoteremo con B_n la palla aperta in h_n di raggio r^n e con \mathcal{A}_n lo spazio $H^\infty(B_n, h)$ delle funzioni analitiche su B_n , dotate della norma del sup $\|\cdot\|_{\mathcal{A}_n}$. Grazie alle immersioni (6.3) possiamo considerare le mappe $w_{n\beta}$, la cui esistenza per $|\lambda|$ sufficientemente piccoli è dimostrata nella Proposizione 2, appartenenti allo spazio di Banach \mathcal{A}_n :

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{w_{n\beta}} & h \\ i \downarrow & & \\ B(r^n) & & \end{array} \quad (6.6)$$

Notiamo che ambedue i membri in (4.26) sono ben definiti per tali mappe, poiché se $y \in B_n$ allora ovviamente $y + \Gamma_{n-1}w_n(y)$ è in h_{n-1} e

$$\begin{aligned}
\|y + \Gamma_{n-1}w_n(y)\| &\leq \|y\| + \|\Gamma_{n-1}\|_{\mathcal{L}(h;h)}\|w_n(y)\| \\
&\leq r^n + \eta^{-2n}D\lambda_n \\
&\leq 2r^n \leq r^{n-1}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

e l'uguaglianza è garantita dalla Proposizione 2.

6.2 Costruzione delle soluzioni

Con la seguente proposizione dimostreremo l'esistenza delle soluzioni delle equazioni (4.26) nei domini appena costruiti, per $|\lambda|$ uniformemente piccolo in n . Tali soluzioni obbediranno inoltre in 0 ad una stima che ci permetterà di dimostrare il Teorema KAM. Procederemo alla costruzione delle soluzioni per via induttiva.

Proposizione. 3. (a) *Esistono delle costanti positive r e λ_0 con $r < \eta^4$ tali che, per $|\lambda| < \lambda_0$ e $|\operatorname{Im}\beta| < \alpha_n$ dove*

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_n = (1 - n^{-2})\alpha_{n-1}, \quad n \geq 2 \tag{6.8}$$

esistono soluzioni $w_{n\beta} \equiv w$ delle Equazioni (4.26) appartenenti ad \mathcal{A}_n , analitiche in λ e β , le quali coincidono con le soluzioni $w_{n\beta}$ della Proposizione 2 per $|\lambda| < \lambda_n(r)$

(b) *Scrivendo*

$$w(y) = w(0) + Dw(0)y + \delta_2 w(y) \tag{6.9}$$

abbiamo

$$\|P_n w(0)\| \leq \epsilon r^{2n} \quad (6.10)$$

$$\|P_n \delta_2 w\|_{\mathcal{A}_n} \leq \epsilon r^{\frac{3}{2}n} \quad (6.11)$$

dove $\epsilon \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow 0$

(c)

$$\|P_n D w(y)\|_{\mathcal{L}(h_n; h)} \leq A \epsilon \eta^{2n} \quad (6.12)$$

per una costante A che non dipende da n .

Dimostrazione. (a)

Consideriamo l'equazione ricorsiva (4.27) per z' , cioè $z'(y) = \Gamma w(y + z'(y))$ e decomponiamola come in (6.9) per riscriverla:

$$z'(y) = \Gamma w(0) + \Gamma D w(0)(y + z'(y)) + \delta_2 \Gamma w(y + z'(y)) \quad (6.13)$$

da essa otteniamo

$$z'(y) - \Gamma D w(0) z'(y) = \Gamma w(0) + \Gamma D w(0) y + \delta_2 \Gamma w(y + z'(y)) \quad (6.14)$$

Dunque ponendo $H_0 : h_{n-1} \rightarrow h_{n-1} : H_0 \equiv (1 - \Gamma D w(0))^{-1} = 1 + H_0 \Gamma D w(0)$ possiamo scriverla

$$H_0^{-1}(z'(y)) = \Gamma w(0) + \Gamma D w(0)(y) + \delta_2 \Gamma w(y + z'(y)) \quad (6.15)$$

quindi

$$z'(y) = H_0 \Gamma w(0) + H_0 \Gamma D w(0)(y) + H_0 \delta_2 \Gamma w(y + z'(y)) \quad (6.16)$$

sommando y e usando la definizione di H_0

$$\begin{aligned}
y + z'(y) &= H_0\Gamma w(0) + y + H_0\Gamma Dw(0)(y) + H_0\delta_2\Gamma w(y + z'(y)) \\
&= H_0\Gamma w(0) + H_0(y) + H_0\delta_2\Gamma w(y + z'(y)) \quad (6.17)
\end{aligned}$$

Se ora definiamo

$$u(y) \equiv H_0\delta_2\Gamma w(y + z'(y)) = H_0\delta_2\Gamma w(H_0\Gamma w(0) + H_0(y) + u(y)) \quad (6.18)$$

una volta verificata l'esistenza di tale $u(y)$, possiamo scrivere l'espressione per $z'(y)$ come

$$z'(y) = H_0\Gamma w(0) + H_0\Gamma Dw(0)(y) + u(y) \quad (6.19)$$

Dunque, nel passo induttivo assumiamo che w soddisfi le disuguaglianze (6.10) (6.11) e (6.12) con n sostituito da $n - 1$. L'operatore H_0 è ben definito, infatti, ricordando che $\Gamma w = \Gamma P_{n-1}w$ le disuguaglianze (6.12) (6.4) implicano

$$\begin{aligned}
\|\Gamma Dw(0)\|_{\mathcal{L}(h_n;h)} &= \|\Gamma P_{n-1}Dw(0)\|_{\mathcal{L}(h_n;h)} \\
&\leq \|\Gamma\|_{\mathcal{L}(h_n;h)} \|P_{n-1}Dw(0)\|_{\mathcal{L}(h_n;h)} \\
&\leq \eta^{-2n} A\epsilon\eta^{2n-2} \\
&= A\epsilon\eta^{-2} < 1 \quad (6.20)
\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}
\|H_0\|_{\mathcal{L}(h_n;h)} &= (\|1 - \Gamma Dw(0)\|_{\mathcal{L}(h_n;h)})^{-1} \\
&\leq |1 - \|\Gamma Dw(0)\|_{\mathcal{L}(h_n;h)}|^{-1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\epsilon \eta^{-2})^k \\
&= 1 + \underbrace{\epsilon \sum_{k=1}^{\infty} (\eta^{-2})^k \epsilon^{k-1}}_{=C} \\
&< 2
\end{aligned} \tag{6.21}$$

se ϵ (i.e. λ) è sufficientemente piccolo.

Troviamo una soluzione a (6.18) usando il Teorema di Punto Fisso di Banach . Data una tale soluzione, l'esistenza di z' in (6.19) segue. Definiamo la mappa \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(u)(y) = H_0 \delta_2 \Gamma w(\tilde{y}) \quad \text{con} \quad \tilde{y} = H_0 \Gamma w(0) + H_0(y) + u(y) \tag{6.22}$$

Affermiamo che \mathcal{G} è una contrazione nella palla

$$\mathcal{B} = \{u \in H^\infty(B_\delta, h_{n-1}) \mid \|u\|_{H^\infty} \leq 2\eta^{-2n} \epsilon r^{\frac{3}{2}(n-1)}\} \tag{6.23}$$

Dove $B_\delta \subset h_{n-1}$ è la palla aperta di raggio $r^{n-\delta}$ per $0 \leq \delta < 1$ e $r < r(\delta)$

Per $y \in B_\delta$, ovviamente $\tilde{y} \in h_{n-1}$ e usando le disuguaglianze (6.4), (6.21) e (6.10)

$$\begin{aligned}
\|\tilde{y}\| &\leq \|H_0\| \|\Gamma\| \|P_{n-1}w(0)\| + \|\tilde{H}\| \|y\| + \|u\| \\
&\leq 2\eta^{-2n} \epsilon r^{(2n-2)} + 2r^{n-\delta} + 2\epsilon r^{\frac{3}{2}(n-1)} \\
&\leq \frac{1}{2} r^{n-1}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

se r è piccolo abbastanza. Quindi $\tilde{y} \in B_{n-1}$, dove Γw è definito. Segue che per $\bar{u} \in \mathcal{B}$ $\mathcal{G}(\bar{u})(y) : B_\delta \rightarrow h_{n-1}$ analiticamente. Inoltre, usando (6.11) e (6.21)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(\bar{u})\|_{H^\infty} &\leq \|H_0\delta_2\Gamma w\|_{H^\infty} \\ &\leq 2\|\delta_2\Gamma w\|_{H^\infty} \\ &\leq 2\eta^{-2n}\epsilon r^{\frac{3}{2}(n-1)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Quindi $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$

Per dimostrare che \mathcal{G} è una contrazione, facciamo uso della stima (A.8) per $\tilde{y}_i(y) = H_0\Gamma w(0) + H(y) + u_i(y)$ e $u_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$. $\tilde{y}_i \in h_{n-1}$ avendo già verificato in (6.24) come $\|\tilde{y}_i\| \leq \frac{1}{2}r^{n-1}$, dunque le disuguaglianze (A.8), (6.11), (6.4) e (6.21) implicano che

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(u_1) - \mathcal{G}(u_2)\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{y \in B_\delta} \|H_0\delta_2\Gamma w(\tilde{y}_1) - H_0\delta_2\Gamma w(\tilde{y}_2)\| \\ &\stackrel{(6.21)}{\leq} 2 \sup_{y \in B_\delta} \|\delta_2\Gamma w(\tilde{y}_1) - \delta_2\Gamma w(\tilde{y}_2)\| \\ &\stackrel{(A.8)}{\leq} 4r^{-n+1}\|\delta_2\Gamma w\|_{H^\infty} \sup_{y \in B_\delta} \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\| \\ &\stackrel{(6.11)}{\leq} 4\epsilon r^{\frac{1}{2}(n-1)}\eta^{-2n} \sup_{y \in B_\delta} \|u_1(y) - u_2(y)\| \\ &\leq 4\epsilon r^{\frac{1}{2}(n-1)}\eta^{-2n}\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} \end{aligned} \quad (6.26)$$

per r e ϵ piccoli. Questo prova la proprietà contrattiva di \mathcal{G} in \mathcal{B} . Abbiamo quindi dimostrato l'esistenza del punto fisso $u \in \mathcal{B}$ di \mathcal{G} che risolve (6.18) e dunque $z' : B_\delta \rightarrow h_{n-1}$ data dall' Equazione (6.19) segue. Per la loro definizione $B_n \subset B_\delta$ quindi $z' : B_n \rightarrow h_{n-1}$.

Si noti anche che $\tilde{y} = y + z'(y)$ (si veda (6.18)) $\tilde{y} \in B_\delta \Rightarrow y + z'(y) \in B_{n-1}$, come abbiamo già notato in (6.24)

Abbiamo quindi dimostrato anche l'esistenza di $w'(y) \in \mathcal{A}_n$, la quale sarà semplicemente definita, come nello schema rinormalizzativo

$$w'(y) := w(y + z'(y)) \quad (6.27)$$

essendo $w \in \mathcal{A}_{n-1}$ □

Dimostrazione. (b)

Per prima cosa iteriamo la disuguaglianza (6.10). Scrivendo l'espansione in serie di Taylor di (6.27) attorno allo zero si ha

$$w'(0) = w(0) + Dw(0)(z'(0)) + \delta_2 w(z'(0)) \quad (6.28)$$

e, poiché abbiamo costruito $z' : B_n \rightarrow h_{n-1}$ abbiamo

$$\|z'(0)\| \leq r^{n-1} \quad (6.29)$$

dunque possiamo usare (6.10) (6.11) e (6.12) sostituendo $n - 1$ al posto di n per ottenere

$$\begin{aligned} \|P_n w'(0)\| &\leq \|P_{n-1} w'(0)\| \\ &\leq \|P_{n-1} w(0)\| + \|P_{n-1} Dw(y)\| \|z'(0)\| + \|\delta_2 P_{n-1} w\|_{\mathcal{A}_{n-1}} \\ &\leq \epsilon r^{2(n-1)} + \epsilon \eta^{2(n-1)} r^{n-1} + \epsilon r^{\frac{3}{2}(n-1)} \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned} \quad (6.30)$$

Il che è più debole di ciò che ci occorre dimostrare, poiché noi vorremmo una stima superiore con ϵr^{2n} . Ma lavorando con $w_{n\beta}$ si guadagna abbastanza per dimostrare la stima desiderata. Infatti la disuguaglianza (6.30) vale per $|Im\beta| \leq \alpha_{n-1}$, mentre noi dobbiamo stabilirla solo per

$|Im\beta| < \alpha_n = (1-n^{-2})\alpha_{n-1}$. Dunque, traslando a $\beta' = \beta - i\frac{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}{|q|}q$ ed usando (6.30) per $|\omega \cdot q| \leq \eta^{n-1}$ abbiamo

$$|w'_{\beta'}(q; 0)|e^{(\alpha_{n-1}-\alpha_n)|q|} \leq \|P_{n-1}w'_{\beta'}(0)\| \leq \epsilon \quad (6.31)$$

segue che

$$\|P_n w'_{\beta'}(q; 0)\| \leq \epsilon \sum_{|\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} e^{-n^{-2}\alpha_{n-1}|q|} \quad (6.32)$$

La somma può essere limitata superiormente da Cn^2 , dunque sfruttando la semplice constatazione che $\alpha_{n-1} \geq \prod_{n=2}^{\infty} (1-n^{-2})\alpha \equiv A > 0$, e usando la condizione diofantea $a|q|^{-\nu} < |\omega \cdot q|$ possiamo estrarre:

$$\begin{aligned} & \epsilon \sum_{|\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} e^{-n^{-2}A|q|} \\ & \leq \epsilon e^{-n^{-2}Ab\eta^{(-n+1)/\nu}} \sum_{q \in \mathbb{Z}^N} e^{-n^{-2}A|q|} \\ & \leq \epsilon e^{-n^{-2}Ab\eta^{(-n+1)/\nu}} \left(2 \sum_{|q| \in \mathbb{N}} e^{-n^{-2}A(|q|/2)} \right)^N \\ & \leq \epsilon e^{-n^{-2}Ab\eta^{(-n+1)/\nu}} \left(\frac{2}{1 - e^{-n^{-2}A/2}} \right)^N \\ & \leq \epsilon e^{-n^{-2}Ab\eta^{(-n+1)/\nu}} Cn^2 \\ & \leq \epsilon r^{2n} \end{aligned} \quad (6.33)$$

per $n \geq n_0(\lambda)$ abbastanza grande e per $r = r(n_0)$

Adesso possiamo iterare (6.11). Consideriamo di nuovo l'espansione in serie di Taylor di $w'(y)$, proiettando otteniamo

$$P_n \delta_2 w'(y) = P_n D w(0) \delta_2 z'(y) + P_n \delta_2 \delta_2 w(y + z'(y)) \quad (6.34)$$

dove $\delta_2 z' = \delta_2 u$ (cfr. Eq. (6.19)). Per la definizione di \mathcal{B} si ha che $\|u(y)\| \leq 2\eta^{-2n} \epsilon r^{\frac{3}{2}(n-1)}$ per $y \in h_{n-1}$ $\|y\| \leq r^{n-\delta}$. La stima (A.10) con $k = 2$, $\gamma = r^\delta$ e $r' = r^{n-\delta}$ ci da per $y \in B_n$

$$\begin{aligned}
\|P_n D w(0) \delta_2 z'\|_{\mathcal{A}_n} &\leq \|P_{n-1} D w(0)\|_{\mathcal{A}_{n-1}} \|\delta_2 u\|_{\mathcal{A}_n} \\
&\leq \epsilon \eta^{2(n-1)} \sup_{\|y\| \leq r^n} \|\delta_2 u(y)\| \\
&\leq \epsilon \eta^{2(n-1)} \frac{r^{2\delta}}{1-r^\delta} \sup_{\substack{y \in h_n \\ \|y\| \leq r^{n-\delta}}} \|u(y)\| \\
&\leq \epsilon \eta^{2(n-1)} \frac{r^{2\delta}}{1-r^\delta} \sup_{y \in B_\delta} \|u(y)\| \\
&\leq \epsilon \eta^{2(n-1)} \frac{r^{2\delta}}{1-r^\delta} 2\eta^{-2n} \epsilon r^{\frac{3}{2}(n-1)} \\
&\leq 2 \frac{\epsilon \eta^{-2} r^{2\delta - \frac{3}{2}}}{1-r^\delta} \epsilon r^{\frac{3}{2}n} \\
&\leq \frac{1}{2} \epsilon r^{\frac{3}{2}n} \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Per la seconda parte procediamo in maniera analoga

$$\begin{aligned}
\|P_n \delta_2 \delta_2 w(1+z')\|_{\mathcal{A}_n} &= \sup_{y \in B_n} \|\delta_2 P_n \delta_2 w(y+z'(y))\| \\
&\stackrel{(A.10)}{\leq} \frac{r^{2\delta}}{1-r^\delta} \sup_{\substack{\|y\| \leq r^{n-\delta} \\ y \in h_n}} \|P_n \delta_2 w(y+z(y))\| \\
&\stackrel{h_n \subset h_{n-1}}{\leq} \frac{r^{2\delta}}{1-r^\delta} \sup_{y \in B_\delta} \|P_n \delta_2 w(y+z(y))\| \\
&\leq \frac{r^{2\delta}}{1-r^\delta} \sup_{\tilde{y} \in B_{n-1}} \|P_n \delta_2 w(\tilde{y})\| \\
&\stackrel{(6.11)}{\leq} \frac{r^{2\delta - \frac{3}{2}}}{1-r^\delta} \epsilon r^{\frac{3}{2}n} \\
&\leq \frac{1}{2} \epsilon r^{\frac{3}{2}n} \tag{6.36}
\end{aligned}$$

combinando i due risultati (ottenuti scegliendo δ in maniera opportuna)

$$\|P_n \delta_2 w\|_{\mathcal{A}_n} \leq \epsilon r^{\frac{3}{2}n} \tag{6.37}$$

La dimostrazione induttiva di (b) è completa. \square

Dimostrazione. (c)

Le π_n , legate alle Dw_n dall'equazione (5.36), sono state costruite nella sezione 5.3 come mappe da $B(r^n) \subset h$ a $\mathcal{L}(h_n, h)$, per $|\lambda| < \lambda_n$. Tenendo a mente (6.3) esse possono essere viste come applicazioni da $B_n \subset h_n$ a $\mathcal{L}(h_n; h)$. Come vedremo potranno essere estese per $|\lambda| < \lambda_0$ ad una mappa analitica

$$\pi_n : [-\eta, \eta] \times B_n \longrightarrow \mathcal{L}(h_n, h) \quad (6.38)$$

tale che $\pi_n(\kappa, y)$ sia C^2 in κ e soddisfi le stime

Lemma. 6.2.1. $\exists A$ indipendente da n t.c.

$$\|P_n \partial_\kappa^i \pi_n(\kappa, y) P_n\| \leq A \epsilon \eta^{(2-i)n} \quad i \leq 2 \quad (6.39)$$

per $|\kappa| \leq \eta^n$, $y \in B_n$

il che, per $i = 0$, concluderà la nostra dimostrazione.

Dimostrazione. Per dimostrare (6.39) scriviamo $\pi_n(\kappa, 0)$ come somma della sua parte diagonale $\sigma_n(\kappa)$ e quella non diagonale $\rho_n(\kappa)$

$$\pi_n(\kappa; 0) = \sigma_n(\kappa) + \rho_n(\kappa) \quad (6.40)$$

in cui $\sigma_n(q, q') = \pi_n(q, q') \delta_{q, q'}$. Mostriamo separatamente, ponendo $\|\cdot\|_n = \|P_n \cdot P_n\|$ e per $i = 1, 2$

$$\|\delta_1 \partial_\kappa^i \pi_n(\kappa; y)\|_n \leq \epsilon r^{\frac{n}{2+i}} \quad (6.41)$$

$$\|\partial_\kappa^i \sigma_n(\kappa)\|_n \leq A \epsilon \eta^{(2-i)n} \quad (6.42)$$

$$\|\partial_\kappa^i \rho_n(\kappa)\|_n \leq \epsilon r^n \quad (6.43)$$

In cui $\delta_1 \pi_n(\kappa; y) = \pi_n(\kappa; y) - \pi_n(\kappa; 0)$. La disuguaglianza (6.39) seguirà combinando (6.41), (6.42) e (6.43)

π_n verifica l'iterazione (5.41)

$$\pi_{n\beta}(\kappa; y) = [1 - \pi_{(n-1)\beta}(\kappa; \tilde{y})\Gamma_{n-1}(\kappa)]^{-1}\pi_{(n-1)\beta}(\kappa; \tilde{y}) \quad (6.44)$$

in cui abbiamo denotato $\tilde{y} \equiv y + \Gamma_{n-1}w_{n\beta}(y)$. Abbiamo mostrato in (6.24) che per $y \in B_\delta$, $\|\tilde{y}\| \leq \frac{1}{2}r^{n-1}$, dunque il membro destro di (5.41) è ben definito in $\mathcal{L}(h_n, h)$ ed è analitico in y e C^2 in κ . Segue per induzione che esso coincide per $|\lambda| < \lambda_n$ con le mappe $\pi_{n\beta}$ costruite nella Sezione 5.3.

Inoltre si ha che

$$\|\partial_\kappa^i \Gamma_{n-1}(\kappa)\|_n \leq C\eta^{(-2+i)n} \quad i \leq 2 \quad (6.45)$$

infatti, per $i = 0$ abbiamo già (4.21), inoltre per la definizione (4.20) si ha

$$\begin{aligned} & \|\partial_\kappa \Gamma_{n-1}(\kappa)\| \\ &= \sup_{\eta^n \leq |\kappa + \omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} \left| \frac{\chi'_{n-1}(\kappa + \omega \cdot q)}{(\kappa + \omega \cdot q)^2} - 2 \frac{\chi_{n-1}(\kappa + \omega \cdot q)}{(\kappa + \omega \cdot q)^3} \right| \\ &\leq \sup_{\eta^n \leq |\kappa + \omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} C(\kappa + \omega \cdot q)^{-3} \\ &\leq C\eta^{-3n} \end{aligned} \quad (6.46)$$

ed anche

$$\begin{aligned}
& \|\partial_\kappa^2 \Gamma_{n-1}(\kappa)\| \\
&= \sup_{\eta^n \leq |\kappa + \omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} \left| \frac{\chi''_{n-1}(\kappa + \omega \cdot q)}{(\kappa + \omega \cdot q)^2} - 4 \frac{\chi'_{n-1}(\kappa + \omega \cdot q)}{(\kappa + \omega \cdot q)^3} + \right. \quad (6.47) \\
&\quad \left. + 6 \frac{\chi''_{n-1}(\kappa + \omega \cdot q)}{(\kappa + \omega \cdot q)^4} \right| \\
&\leq \sup_{\eta^n \leq |\kappa + \omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} C(\kappa + \omega \cdot q)^{-4} \\
&\leq C\eta^{-4n} \quad (6.48)
\end{aligned}$$

Abbiamo bisogno di una stima a priori, per provare la quale sarà necessario il seguente Lemma

Lemma. 6.2.2. $\forall m \leq n$

$$\|\partial_\kappa H_m(\kappa, y)\|_n \leq \eta^{-(m-1)} \quad (6.49)$$

$$\|\partial_\kappa^2 H_m(\kappa, y)\|_n \leq \eta^{-2(m-1)} \quad (6.50)$$

$$(6.51)$$

La dimostrazione del lemma è intuitiva e diretta; ne accenneremo lo schema al termine della dimostrazione.

Differenziando (5.41), utilizzando (6.2.2) e (6.39) con $n - 1$ al posto di n insieme alle stime su Γ appena ottenute si ottiene la stima a priori per un generico passo

$$\|\partial_\kappa^i \pi_n(\kappa, y)\|_n \leq CA\epsilon\eta^{(2-i)(n-1)} \quad (6.52)$$

A prima vista, dunque, perderemo nella nostra stima una quantità pari a C ad ogni passo iterativo.

Stimiamo ora (6.43). Dalla stima a priori (6.52) si ottiene

$$|P_n \partial_\kappa^i \rho_n(\kappa) P_n(q, q')| \leq \epsilon \quad (6.53)$$

ma quest'ultima è valida per tutti i β con $|Im\beta| < \alpha_{n-1}$. Se β' è tale che $|Im\beta'| < \alpha_n$ allora, se lo trasliamo a $\beta = \beta' - i(\alpha_{n-1} - \alpha_n)(q - q')/|q - q'|$ otteniamo

$$\begin{aligned} |P_n \partial_{\kappa}^i \rho_{n;\beta}(\kappa) P_n(q, q')| &= |e^{i(\beta - \beta') \cdot (q - q')} P_n \partial_{\kappa}^i \rho_{n;\beta'}(\kappa) P_n(q, q')| \\ &= e^{n^{-2} \alpha_{n-1} |q - q'|} |P_n \partial_{\kappa}^i \rho_{n;\beta}(\kappa) P_n(q, q')| \end{aligned} \quad (6.54)$$

Dunque per tale β' otteniamo¹

$$\|\partial_{\kappa}^i \rho_{n;\beta}(\kappa)\|_n \leq \epsilon \sup_{\substack{q' \\ |\omega \cdot q'| \leq 2\eta^{n-1}}} \sum_{\substack{q \neq q' \\ |\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}}} e^{-n^{-2} \alpha_{n-1} |q - q'|} \quad (6.55)$$

usando la condizione diofantea per $|\omega \cdot (q - q')| \leq 4\eta^{n-1}$ abbiamo $|q - q'| \geq b\eta^{\frac{-n+1}{\nu}}$ e possiamo estrarre

$$\begin{aligned} \|\partial_{\kappa}^i \rho_{n;\beta}(\kappa; y)\|_n &\leq \epsilon e^{-n^{-2} A b \eta^{(-n+1)/\nu}} \sum_{\substack{q \neq q' \\ |q - q'| \geq b\eta^{(-n+1)/\nu}}} e^{-n^{-2} A/2(|q - q'|)} \\ &\leq \epsilon e^{-n^{-2} A b \eta^{(-n+1)/\nu}} C n^2 \leq \epsilon r^n \end{aligned} \quad (6.56)$$

Per iterare (6.42) scriviamo $\sigma_{n\beta}(\kappa)$ facendo uso di (6.44)

$$\begin{aligned} \sigma_n(\kappa) &= \text{diag} \left([1 - (\sigma_{(n-1)\beta}(\kappa) + \rho_{(n-1)\beta}(\kappa) + \delta_1 \pi(\kappa, y_{n,0})) \Gamma_{n-1}(\kappa)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. (\sigma_{(n-1)\beta}(\kappa) + \rho_{(n-1)\beta}(\kappa)) + \delta_1 \pi(\kappa, y_{n,0}) \right) \\ &= \underbrace{[1 - \sigma_{(n-1)\beta}(\kappa) \Gamma_{n-1}(\kappa)]^{-1}}_{H_{n\beta}^{\sigma}(\kappa)} \sigma_{(n-1)\beta}(\kappa) + R_n \end{aligned} \quad (6.57)$$

avendo definito

$$R_n = \text{diag} \left(\frac{1}{1 - (\sigma + \mathcal{R})\Gamma} \mathcal{R} \Gamma \frac{1}{1 - \sigma\Gamma} \sigma + \frac{1}{1 - (\sigma + \mathcal{R})\Gamma} \mathcal{R} \right) \quad (6.58)$$

con $\sigma = \sigma_{(n-1)\beta}(\kappa)$ e $\mathcal{R} = \rho_{(n-1)\beta}(\kappa) + \delta_1 \pi_{(n-1)\beta}(\kappa, y_{n,0})$. Abbiamo

dunque

$$\sigma_{n\beta}(\kappa) = H_{n\beta}^{\sigma}(\kappa) \sigma_{n-1\beta}(\kappa) + R_n \quad (6.59)$$

¹ Per un operatore con nucleo $a(q, q')$, $\|a\| \leq \sup_{q'} \sum_q |a(q, q')|$

Usando le ipotesi induttive non è difficile dimostrare che

$$\|\partial_\kappa^i R_n\|_n \leq \epsilon r^{\frac{n}{2}} \quad (6.60)$$

poiché \mathcal{R} compare in entrambi i termini di (6.58).

Inoltre possiamo notare come $H_n^\sigma(\kappa)$ sia uguale all'identità per la maggior parte degli n , infatti fissati $\kappa \leq \eta^n$ ed n vogliamo stimare $P_n \sigma_{n\beta}(\kappa; y)$ con supporto in $|\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}$, dunque, ad esempio, $|\omega \cdot q + \kappa| \leq \eta^{n-2}$. Sappiamo, d'altro canto che $\Gamma_{m-1}(\kappa)$ ha supporto contenuto in $|\omega \cdot q| \geq \eta^m$. Dunque, allorché $\eta^{n-2} \leq \eta^m$ si avrà che $H_m^\sigma(\kappa; y)(q) = 1$, bastera scegliere $m \leq n - 2$ per avere

$$\sigma_{m\beta}(\kappa) = \sigma_{(m-1)\beta}(\kappa) + R_m \quad (6.61)$$

Inoltre affermiamo

Lemma. 6.2.3. $\exists B$ t.c. $\forall n$, si ha che $\forall m \leq n - 2$ e $|\kappa| \leq \eta^n$

$$\|\partial_\kappa^2 \sigma_m(\kappa)\|_n \leq \epsilon B \quad (6.62)$$

$$\|\partial_\kappa \sigma_m(\kappa)\|_n \leq \epsilon B \eta^n \quad (6.63)$$

$$\|\sigma_m(\kappa)\|_n \leq \epsilon B \eta^{2n} \quad (6.64)$$

Dimostrazione. Proviamo prima (6.62) usando la formula ricorsiva (6.61) e procedendo per induzione. Sia $\ell \leq m$ e supponiamo che $\|\partial_\kappa^2 \sigma_{\ell-1}\|_n \leq \epsilon \tilde{B}_{\ell-1}$ per una costante $\tilde{B}_{\ell-1}$, segue da (6.60)

$$\|\partial_\kappa^2 \sigma_\ell(\kappa)\|_n \leq \tilde{B}_{\ell-1} \epsilon + \epsilon r^{\frac{\ell-1}{2}} \leq \epsilon (\tilde{B}_{\ell-1} + r^{\frac{\ell-1}{2}}) \equiv \epsilon \tilde{B}_\ell \quad (6.65)$$

Chiaramente $\tilde{B}_m \leq B_2$ con B_2 uniforme in n . Ora grazie alle conseguenze delle identità di Ward contenute nel Lemma 5.3.4, possiamo scrivere, ricordando che $\sigma_n(q, \kappa) = \sigma_n(0, \underbrace{\kappa + \omega \cdot q}_{\tilde{\kappa}})$

$$\begin{aligned}
|\partial_\kappa \sigma_m(q, \kappa)| &= |\partial_\kappa \sigma_m(0, \tilde{\kappa})| \\
&= \left| \int_0^{\tilde{\kappa}} \partial_{\kappa'}^2 \sigma_m(0, \kappa') d\kappa' \right| \\
&\leq |\tilde{\kappa}| B_2 \epsilon
\end{aligned} \tag{6.66}$$

quindi

$$\|\partial_\kappa \sigma_m(\kappa)\|_n = \sup_{|\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} |\partial_\kappa \sigma_m(q, \kappa)| \leq \epsilon 2\eta^{n-1} B_2 \leq \epsilon B_1 \eta^n \tag{6.67}$$

inoltre

$$\begin{aligned}
|\sigma_m(q, \kappa)| &= |\sigma_m(0, \tilde{\kappa})| \\
&= \left| \int_0^{\tilde{\kappa}} \partial_\kappa \sigma_m(0, \kappa') d\kappa' \right| \\
&\leq |\tilde{\kappa}| \epsilon B_1 \eta^n
\end{aligned} \tag{6.68}$$

dunque

$$\|\sigma_m(\kappa)\|_n = \sup_{|\omega \cdot q| \leq 2\eta^{n-1}} |\sigma_m(q, \kappa)| \leq \epsilon 2\eta^{n-1} B_1 \eta^n \leq \epsilon B_0 \eta^{2n} \tag{6.69}$$

Il lemma è concluso ponendo $B \equiv \max\{B_0, B_1, B_2\}$ □

A questo punto possiamo dimostrare (6.42) per $i = 0$. Iteriamo (6.59) per ottenere

$$\sigma_n(\kappa) = H_n^\sigma(\kappa) H_{n-1}^\sigma(\kappa) \sigma_{n-2}(\kappa) + H_{n-1}^\sigma(\kappa) R_{n-1} + R_n \tag{6.70}$$

che ci darà la stima voluta su $\sigma_n(\kappa)$

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n\|_n &\leq 2^2 B \epsilon \eta^{2n} + 4r^{n-1} \epsilon \\
&\leq 2^2 B \epsilon \eta^{2n} + 4\epsilon \eta^{2n} \underbrace{r^{n-1} \eta^{-2n}}_{\leq r^{\frac{n}{2}}} \\
&\leq (2^2 B + r^{\frac{n}{2}}) \epsilon \eta^{2n} \\
&\leq A_0 \epsilon \eta^{2n}
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Poichè $2^2B + r^{\frac{n}{2}}$ è limitato uniformemente in n .

Per iterare le stime su $\partial_\kappa \sigma_n(\kappa)$ e $\partial_\kappa^2 \sigma_n(\kappa)$ notiamo che il Lemma 6.2.2 fornisce le stesse stime per H_m^σ . Scriveremo dunque, usando (6.60), (6.63), (6.70), (6.64), (6.49)

$$\begin{aligned}
\|\partial_\kappa \sigma_n(\kappa)\|_n &= \|\partial_\kappa(H_n^\sigma(\kappa)H_{n-1}^\sigma(\kappa))\sigma_{n-2} + \\
&\quad + H_n^\sigma(\kappa)H_{n-1}^\sigma(\kappa)\partial_\kappa \sigma_{n-2}(\kappa) + \partial_\kappa H_{n-1}^\sigma(\kappa)R_{n-1}(\kappa) + \\
&\quad + H_{n-1}^\sigma \partial_\kappa R_{n-1}(\kappa) + \partial_\kappa R_n(\kappa)\|_n \\
&\leq 4\eta^{-n}B\epsilon\eta^{2n} + 4B\epsilon\eta^n + \eta^{-n}\epsilon r^{\frac{n-1}{2}} + 2\epsilon r^{\frac{n-1}{2}} + \epsilon r^{\frac{n}{2}} \\
&\leq (8B + \eta^{-2n}r^{\frac{n-1}{2}} + 2\eta^{-n}r^{\frac{n-1}{2}} + \eta^{-n}r^{\frac{n}{2}})\epsilon\eta^n \\
&\leq A_1\epsilon\eta^n
\end{aligned} \tag{6.72}$$

La stima $\|\partial_\kappa^2 \sigma_n(\kappa)\| \leq A_2\epsilon\eta^{2n}$ si dimostra nella stessa maniera, in modo altrettanto diretto. La disuguaglianza (6.42) è dunque dimostrata ponendo $A \equiv \max\{A_0, A_1, A_2\}$.

Passiamo ora a dimostrare (6.41). Scriviamo (6.44) nella forma $\pi_n(\kappa; y) = H_n(\kappa, \tilde{y})\pi_{n-1}(\kappa; \tilde{y})$, e notiamo che si ha la banale uguaglianza

$$H_n(\kappa, \tilde{y})\pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) = \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y})(1 - \Gamma_{n-1}(\kappa)\pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}))^{-1} \equiv \pi_{n-1}\tilde{H}(\kappa, \tilde{y}) \tag{6.73}$$

Si ottiene $\forall y \in B_\delta$ l'identità

$$\begin{aligned}
\delta_1 \pi_n(\kappa; y) &= \pi_n(\kappa; y) - \pi_n(\kappa, 0) \\
&= H_n(\kappa, \tilde{y}) \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) - \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0}) \tilde{H}_n(\kappa, \tilde{0}) \\
&= H_n(\kappa, \tilde{y}) \left[\pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) \tilde{H}_n^{-1}(\kappa, \tilde{0}) - H_n^{-1}(\kappa, \tilde{y}) \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0}) \right] \tilde{H}(\kappa, \tilde{0}) \\
&= H_n(\kappa, \tilde{y}) \left[\pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) (1 - \Gamma_{n-1}(\kappa) \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0})) - \right. \\
&\quad \left. - (1 - \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) \Gamma_{n-1}(\kappa)) \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0}) \right] \tilde{H}(\kappa, \tilde{0}) \\
&= H_n(\kappa, \tilde{y}) \left[\pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) - \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0}) \right] \tilde{H}(\kappa, \tilde{0}) \\
&= H_n(\kappa, \tilde{y}) \left[\delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) - \delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0}) \right] \tilde{H}(\kappa, \tilde{0}) \tag{6.74}
\end{aligned}$$

Nel caso $i = 0$ usiamo le ipotesi induttive e la stima (6.20) su H_n e \tilde{H}_n , per ottenere da (6.74) la stima a priori

$$\|\delta_1 \pi_n(\kappa; y)\|_n \leq 8\epsilon r^{\frac{n-1}{2}} \tag{6.75}$$

Per guadagnare il fattore extra di cui abbiamo bisogno restringiamo il dominio di definizione di y . Usiamo il Lemma A.2.4 con $\gamma = r^\delta$, $r' = r^{n-\delta}$ e otteniamo $\forall y \in B_n$

$$\begin{aligned}
\|\delta_1 \pi_n(\kappa; y)\|_n &= \|\delta_1 \pi_n(\kappa; y) - \delta_1 \pi_n(\kappa; 0)\|_n \\
&\leq \sup_{y \in B_n} \|\delta_1 \pi_n(\kappa; y) - \delta_1 \pi_n(\kappa; 0)\|_n \\
&= \frac{r^\delta}{1 - r^\delta} \sup_{y \in B_\delta} \|\delta_1 \pi_n(\kappa; y)\|_n \\
&\leq \frac{r^\delta}{1 - r^\delta} 8\epsilon r^{\frac{n-1}{2}} \leq \epsilon r^{\frac{n}{2}} \tag{6.76}
\end{aligned}$$

per $r \ll 1$ e un δ opportuno.

Nel caso $i = 1$, otteniamo una stima a priori analoga a (6.75) usando

l'identità (6.74), e il Lemma 6.2.2

$$\begin{aligned}
\|\partial_\kappa \delta_1 \pi_n(\kappa, y)\|_n &\leq \|\partial_\kappa H_n(\kappa, \tilde{y}) [\delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) - \delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0})] \tilde{H}(\kappa, \tilde{0}) + \\
&\quad + H_n(\kappa, \tilde{y}) \partial_\kappa [\delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) - \delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0})] \tilde{H}(\kappa, \tilde{0}) + \\
&\quad + H_n(\kappa, \tilde{y}) [\delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{y}) - \delta_1 \pi_{n-1}(\kappa, \tilde{0})] \partial_\kappa \tilde{H}(\kappa, \tilde{0})\|_n \\
&\leq \eta^{-n} \epsilon r^{\frac{n-1}{2}} 2 + 2\epsilon r^{\frac{n-1}{3}} 2 + 2\epsilon r^{\frac{n-1}{2}} \eta^{-n} \\
&\leq 8\epsilon r^{\frac{n-1}{3}}
\end{aligned} \tag{6.77}$$

$$\text{In cui } \eta^{-n} r^{\frac{n-1}{2}} = r^{\frac{n-1}{3}} \underbrace{r^{\frac{n-4}{6}}}_{\leq 1} \eta^{-n}.$$

Restringendo il dominio di definizione di y si ottiene come nel caso precedente un fattore extra che ci porterà alla stima desiderata

$$\|\partial_\kappa \delta_1 \pi_n(\kappa, y)\|_n \leq 8\epsilon r^{\frac{n-1}{3}} \frac{r^\delta}{1 - r^\delta} \leq \epsilon r^{\frac{n}{3}} \tag{6.78}$$

Il caso $i = 2$ è assolutamente analogo a quello per $i = 1$, distribuendo due derivate anziché una e usando le stesse ipotesi per ottenere una stima a priori. Restringendo il dominio di definizione di y ancora una volta otterremo il fattore extra desiderato e avremo

$$\|\partial_\kappa^2 \delta_1 \pi_n(\kappa, y)\|_n \leq D\epsilon r^{\frac{n-1}{4}} \frac{r^\delta}{1 - r^\delta} \leq \epsilon r^{\frac{n}{4}} \tag{6.79}$$

Rimane ora solamente da dimostrare il Lemma 6.2.2. Per definizione $H_m(\kappa) = (1 - \pi_{m-1}(\kappa)\Gamma_{m-1}(\kappa))^{-1}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\partial_\kappa H_m(\kappa) &= H_m(\kappa) \partial_\kappa [\pi_{m-1}(\kappa)\Gamma_{m-1}(\kappa)] H_m(\kappa) \\
&= H_m(\kappa) [\partial_\kappa \pi_{m-1} \Gamma_{m-1}(\kappa) + \pi_{m-1}(\kappa) \partial_\kappa \Gamma_{m-1}(\kappa)] H_m(\kappa)
\end{aligned} \tag{6.80}$$

Sfruttando le ipotesi induttive e le disuguaglianze (4.21), (6.45), pos-

siamo ottenere la prima stima

$$\begin{aligned}
 \|\partial_\kappa H_m(\kappa)\|_n &\leq 4[\epsilon A \eta^{m-1} \eta^{-2m} + \epsilon A \eta^{2(m-1)} \eta^{-3m}] \\
 &\leq 8\epsilon \eta^{-3} A \eta^{-(m-1)} \\
 &\leq \eta^{-(m-1)} \tag{6.81}
 \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza (6.50) si procede nella stessa maniera. Il Lemma è così dimostrato \square

Usando il Lemma 6.2.1 nel caso $i = 0$ otteniamo subito la dimostrazione di (c) \square

Ciò conclude anche la dimostrazione della Proposizione 3

■

Capitolo 7

Dimostrazione del Teorema

KAM

Ricapitolando brevemente, ricordiamo che stiamo prendendo in considerazione l'Hamiltoniana

$$H(I, \theta, \lambda) = h(I) + \lambda v(\theta) = \frac{1}{2}I^2 + \lambda v(\theta) \quad (7.1)$$

Per la quale speriamo di ottenere soluzioni quasiperiodiche del tipo

$$I(t) = I_0 + Y(\omega t) \quad (7.2)$$

$$\theta(t) = \omega t + X(\omega t) \quad (7.3)$$

per valori di $\frac{\partial h}{\partial I} = I_0 \equiv \omega$ sufficientemente irrazionali, cioè

$$|\omega \cdot q| > a|q|^{-\nu} \quad \text{per } q \in \mathbb{Z}^N, q \neq 0 \quad (7.4)$$

Tali soluzioni esisteranno se e solo se esiste la soluzione dell'equazione

$$\mathcal{D}^2 X = -\lambda \frac{\partial v}{\partial \theta}(\omega t + X(\omega t)) \quad \mathcal{D} \equiv \theta \cdot \partial_\theta \quad (7.5)$$

Che puo' essere scritta, come nel capitolo 3.2

$$X = G_0 W_0(X) \quad (7.6)$$

Grazie ai risultati ottenuti fin qui, siamo in grado finalmente di provare il

Teorema 1. *Sia v reale analitica in θ . Assumiamo che ω soddisfi la condizione (7.4). Allora l'equazione (7.5) ammette una soluzione analitica in λ e reale analitica in θ a condizione che $|\lambda|$ sia sufficientemente piccolo*

Dimostrazione. Mostriamo dapprima che $X_n \equiv F_n(0) = \Gamma_{<n} W_n(0)$ converge ad una funzione reale analitica X a media nulla, quando $n \rightarrow \infty$ e che tale X risolve l' Eq. (7.6)

Ricordiamo che nella Prop 2 abbiamo costruito per $|\lambda| < \lambda_n$ le mappe analitiche $f_{n\beta} : B(r^n) \subset h \rightarrow h$, verificanti le relazioni (4.29), (4.28) e la stima $\|f_{n\beta}\|_{H^\infty} \leq 2r^n$. Esse possono naturalmente essere considerate mappe da B_n in h . Come tali possono essere estese in maniera analitica a $|\lambda| < \lambda_0$ per $n \geq n_0$ usando iterativamente (4.29) tenendo a mente la stima (6.24). Le estensioni sono chiaramente limitate uniformemente (ad esempio da $2r^{n_0}$). Proviamo ora la convergenza in h della successione $x_{n\beta} \equiv f_{n\beta}(0)$ ottenuta nel modo appena visto. La ricorsione (4.29) implica

$$x_{n\beta} = x_{(n-1)\beta} + \delta_1 f_{(n-1)\beta}(\Gamma_{n-1} w_{n\beta}(0)) \quad (7.7)$$

Usando le stime (6.4) (6.10) e (A.10) con $k = 1$ e

$\gamma = \eta^{-2n} \epsilon r^{n+1}$ possiamo inferire

$$\begin{aligned}
\|x_{n\beta} - x_{(n-1)\beta}\| &= \|\delta_1 f_{(n-1)\beta}(\Gamma_{n-1} w_{n\beta}(0))\| \leq \\
&\leq \sup_{\|y\| \leq \eta^{-2n} \epsilon r^{2n}} \|\delta_1 f_{(n-1)\beta}(y)\| \leq \\
&\leq \frac{\eta^{-2n} \epsilon r^{n+1}}{1 - \eta^{-2n} \epsilon r^{n+1}} \|f_{(n-1)\beta}(y)\|_{H^\infty} \\
&\leq C \eta^{-2n} \epsilon r^{2n}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

La successione dunque, essendo di Cauchy, converge in h

$$x_{n\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_\beta \tag{7.9}$$

e si ha $\|x_\beta\| \leq C\epsilon$ uniformemente nella striscia

$|Im\beta| < \alpha' = \alpha \prod_{n=2}^{\infty} (1 - n^{-2})$. Quest'ultima stima implica che, puntualmente, si ha

$$|x(q)| \leq C\epsilon e^{-\alpha'|q|} \tag{7.10}$$

e dunque X , la trasformata di Fourier di x e' reale e analitica

Per $|\lambda| < \lambda_n$, le Eqq. (4.29) e (4.27) implicano che

$$x_n \equiv f_n(0) = \Gamma_{<n} w_0(0) \quad \text{e} \quad w_0(x_n) = w_n(0) \tag{7.11}$$

In particolare segue dalla prima di queste equazioni che

$$x_n(q)|_{q=0} = 0 \tag{7.12}$$

e dalla seconda insieme a (5.15) che

$$w_0^i(q; x_n)|_{q=0} = 0 \quad \forall i \tag{7.13}$$

Per la analiticit  in λ queste relazioni devono mantenersi valide per $|\lambda| \leq \lambda_0$. Poiche' w_0 e' analitica, possiamo dunque prendere il limite per $n \rightarrow \infty$ nelle Equazioni (7.11), e inferire che

$$x(0) = 0, \quad x(q) = G_0 w_0(q; x) \text{ per } q \neq 0, \quad \text{e } w_0(0; x) = 0 \tag{7.14}$$

La seconda di queste equazione non e' altro che la trasformata di Fourier dell' equazione (7.5). La soluzione x e' una funzione analitica in λ per $|\lambda| < \lambda_0$, e si annulla per $\lambda = 0$. La sua unicit  a meno di traslazioni del tipo T_β (cfr. (5.4)) segue dal fatto che l' equazione (7.5) determina completamente i coefficienti dell'espansione in serie di Taylor della propria soluzione rispetto a λ . Questo conclude la dimostrazione del Teorema 1

□

Capitolo 8

Gruppo di Rinormalizzazione e Serie di Lindstedt

8.1 Cenni introduttivi

In questo capitolo metteremo in evidenza la connessione tra il nostro approccio alla serie di Lindstedt e la risommazione di quest'ultima da parte di Eliasson (cfr. [Eli88]). Quello di Lindsted sembra essere stato il primo metodo generalmente applicabile usato diffusamente nello studio numerico delle orbite quasi-periodiche. L'idea di base di tale metodo consiste nel considerare una famiglia di funzioni quasi-periodiche dipendenti dal parametro λ e nell'imporre che essa diventi una situazione delle nostre equazioni del moto. Si definisce una serie di potenze formale in λ , F , su \mathbb{R}^N , come una successione infinita di funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\{F_k\}_{k \geq 0}$, e scriveremo

$F \sim \sum_{k \geq 0} F_k \lambda^k$. Se g è una funzione C^∞ e $F \sim \sum_{k \geq 0} F_k \lambda^k$ una serie formale, si definisce naturalmente la serie formale $g \circ F \sim \sum_{k \geq 0} G_k \lambda^k$

ponendo

$$G_k = \left[g \left(\sum_{h=0}^k F_h \lambda^h \right) \right]_k \equiv \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} g \left(\sum_{h=0}^k F_h \lambda^h \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (8.1)$$

L'equazione risultante è risolta - nel senso delle serie di potenze formali in λ - eguagliando i termini dello stesso grado in λ di ambedue i membri. Poincaré ha intrapreso in [Poi99] lo studio della convergenza di tali serie. Egli ottenne risultati negativi per la convergenza uniforme rispetto ad un parametro che obbligava anche la frequenza a variare. La sua conclusione era:

Il semble donc permis de conclure que les series (2) ne convergent pas.

Toutefois la raisonnement qui précède ne suffit pas pour établir ce point avec une rigueur complète.

En effect, ce que nous avons démontré au n. 42 c'est qu'il ne peut pas arriver que, pour toutes les valeurs de μ inférieurs à une certaine limite, il y ait une double infinité de solutions périodiques, et il nous suffirait ici que cette double infinité existât pour une valeur de $\hat{\mu}$ déterminée, différent de 0 et généralement très petit.

[...]

Ne peut-il pas arriver que les series (2) convergent quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies?

Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté les series ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$

soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'annoncer un peu au hasard)?

Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort inversemblable.

Ciò si è rivelato sorprendentemente predittorio, poiché infatti la serie converge per numeri diofantei.

8.2 Rappresentazione ad alberi

La serie di Lindstedt possiede una rappresentazione grafica e il nostro metodo rinormalizzativo consiste nel risommare ad ogni passo un particolare sottoinsieme di grafici.

Sia la nostra hamiltoniana

$$H(I, \theta, \lambda) = \frac{1}{2}I^2 + \lambda v(I, \theta) \quad (8.2)$$

e di nuovo

$$I(t) = I_0 + Y(\omega t), \quad \theta(t) = \omega t + X(\omega t) \quad (8.3)$$

le soluzioni quasi-periodiche con frequenza ω

Useremo la notazione abbreviata \mathcal{Q} per indicare la variabile q e la componente i , $\mathcal{Q} = (q, i) \in \mathbb{Z}^N \times \{1, \dots, 2N\} \equiv \mathcal{J}$, e scriveremo ad esempio $x(\mathcal{Q}) \equiv x^i(q)$ e $w_0^{(m)}(\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_m)$ per gli elementi della matrice dei nuclei $w_0^{(m)}(q_0, \dots, q_m)$ che figurano nell' Eq. (4.8). Usando le

relazioni (3.14) e (7.6) vogliamo arrivare ad esprimere la nostra soluzione $x(\mathcal{Q})$ come una serie di potenze in λ ; ciò sarà ottenuto risolvendo la (3.14) come un'equazione di punto fisso risolta iterativamente iniziando con $x = 0$.

Gli elementi della successione risultante possono essere espressi in modo conveniente tramite grafici ad albero. Useremo infine tale rappresentazione per descrivere la soluzione formale ottenuta come limite della precedente successione. Ricordiamo che un albero T è un grafico connesso e aciclico. Denotiamo rispettivamente $V(T)$ e $L(T)$ l'insieme dei vertici e delle linee sull'albero T . Sugli alberi viene assegnato un vertice (esterno) speciale 0 , detto *radice* che apparterrà alla linea $(0, p_0)$. Definiamo \mathcal{T}_{m+1}^k l'insieme dei grafici ad albero T su $m+1+k$ vertici $p \in (0, \dots, m+k) \equiv V(T)$ tali che i primi $m+1$, i *vertici esterni*, abbiano assegnato il numero di coordinazione 1. Le linee $\ell \in L(T)$ che contengono uno dei vertici esterni sono chiamate esterne $\ell \in L_E(T)$, e le rimanenti interne $\ell \in L_I(T)$. È naturale definire sugli alberi un *ordinamento parziale*: dato T e $u, p \in V(T)$ diciamo che

$$u \geq p \quad \text{o} \quad u \geq_T v \quad (8.4)$$

se il percorso unico dalla radice a p passa per u . Le linee ℓ di T sono dunque coppie $\ell = (p, p') : p, p' \in V(T)$ t.c. $p \geq p'$. Assegnamo ad ogni vertice $v \in V(T)$ un numero κ_p tale che $\kappa_p \equiv \#\{p' \mid p' \leq p, (p, p') \in V(T)\}$ e $\kappa_\eta \equiv 0$, in modo che si abbia $\kappa_p = (\text{numero di coordinazione di } p) - 1$.

Sia data ora una funzione $G : \mathcal{J}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ e un insieme di funzioni $(w^{(m)})_{m \geq 0} \equiv w$ tali che le $w^{(m)} : \mathcal{J}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}$ siano simmetriche nelle ultime m variabili. Assegnamo inoltre le variabili $\mathcal{Q}_i \equiv (q_i, \alpha_i) \in \mathcal{J}$ agli $0 \leq i \leq m$ vertici esterni di T e le variabili $\mathcal{P}_{\ell_p} = (\varrho_{\ell_p}, \alpha_{\ell_p}) \in \mathcal{J}$ per

ogni linea interna ℓ e uno dei due vertici v contenuti in essa. Scriviamo $\mathcal{P}_\ell = (\mathcal{P}_{\ell_p}, \mathcal{P}_{\ell_{p'}})$ per $\ell = (p, p')$. Per $m < p < m + \kappa$, poniamo $R_p = \mathcal{P}_{\ell_p}$ se p fa parte di una linea interna (p', p) altrimenti sarà $R_p = \mathcal{Q}_0$ (cioè quando $(0, p)$ è una linea esterna), inoltre $\mathcal{P}_p = \{\mathcal{P}_{\ell_p} | \ell \in \mathcal{L}_I(T), \ell = (p, p')\}$, $\mathcal{Q}_p = \{\mathcal{Q}_i | \ell = (v, i) \in \mathcal{L}_E(T)\}$.

Possiamo ora definire una funzione *ampiezza*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T, G, w, \mathcal{Q}) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{m!k!} \sum_{\mathcal{P}}^* \prod_{\ell \in \mathcal{L}_I(T)} G(\mathcal{P}_\ell) \prod_{p \in V(T)} \kappa_p! w^{(\kappa_p)}(R_p; \mathcal{P}_p, \mathcal{Q}_p) \end{aligned} \quad (8.5)$$

nella quale la presenza dei fattoriali è dovuta al numero di “etichettature” assegnabili ad un albero con k vertici che sarà spiegata nell’appendice in A.3.

Tramite di essa assegneremo ai primi elementi della successione $F^{(n)}(0) \equiv \underbrace{GW \circ GW \circ \dots \circ GW}_{n \text{ volte}}(0)$ la rappresentazione grafica dei loro coefficienti di Fourier.

$$\begin{aligned} F(X)(\mathcal{Q}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{Q}}^* G_0(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) w_0^{(n)}(\mathcal{Q}_0, \mathcal{P}) \prod_{\ell=1}^n x(\mathcal{P}_\ell) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{Q}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \\ p_0 := q_0 - \sum p_i}} G_0(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) \frac{\lambda^{n+1}}{n!} p_0^{\alpha_0} v_{p_0} \prod_{k=1}^n p_0^{\alpha_k} \cdot x(\mathcal{P}_k) \end{aligned} \quad (8.6)$$

in cui $\mathcal{P}_i \equiv (p_i, \alpha_i) \in \mathcal{J}$

Si ha dunque

$$X^{(1)} \equiv F(0) \quad (8.7)$$

$$x^{(1)}(\mathcal{Q}) = \frac{\lambda}{(\omega \cdot q)^2} i q^i v_q \quad (8.8)$$

che rappresenteremo (in maniera piuttosto semplice), tramite grafici ad albero del tipo $T^{(1)}$ (Fig. 8.2)

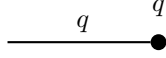


Figura 8.1: $T^{(1)}$

E che scriveremo

$$x^{(1)}(\mathcal{Q}) = \sum_{T \in T^{(1)}} G(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) \mathcal{A}(T, G_0, w_0, \mathcal{Q}_0) \quad (8.9)$$

Passiamo al secondo termine

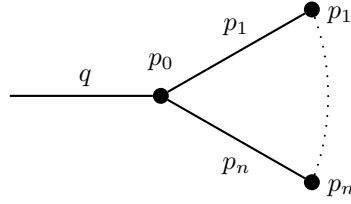
$$X^{(2)} \equiv F(X^{(1)}) \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} x^{(2)}(\mathcal{Q}) &= \frac{\lambda}{(\omega \cdot q)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \\ p_0 := q_0 - \sum p_i}} \frac{i^{n+1}}{n!} p_0^{\alpha_0} v_{p_0} \prod_{k=1}^n p_0^{\alpha_k} x^{(1)}(\mathcal{P}_k) \\ &= \frac{\lambda}{(\omega \cdot q)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \\ p_0 := q_0 - \sum q_i}} \frac{i^{n+1}}{n!} p_0^{\alpha_0} v_{p_0} \prod_{k=1}^n p_0^{\alpha_k} \frac{\lambda}{(\omega \cdot p_k)^2} i p_k^{\alpha_k} v_{p_k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{Q}_0, \mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n \\ p_0 + \dots + p_n = q_0}} \underbrace{\frac{\delta_{q, q_0} \delta_{i, \alpha_0}}{(\omega \cdot q_0)^2}}_{G_0(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0)} \underbrace{\left(\prod_{k=0}^n p_0^{\alpha_k} \right) \frac{i^{n+1} \lambda v_{p_0}}{n!}}_{w^{(n)}(\mathcal{Q}_0; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)} \\ &\quad \prod_{k=1}^n \underbrace{(p_k^{\alpha_k}) i \lambda v_{p_k}}_{w^{(0)}(\mathcal{P}_k)} \prod_{k=1}^n \frac{1}{(\omega \cdot p_k)^2} \end{aligned} \quad (8.11)$$

che verrà rappresentato dagli alberi $T^{(2)}$ (Fig. 8.2)

e scritto allo stesso modo di (8.9)

$$x^{(2)}(\mathcal{Q}) = \sum_{T \in T^{(2)}} G(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) \mathcal{A}(T, G_0, w_0, \mathcal{Q}_0) \quad (8.12)$$

Figura 8.2: $T^{(2)}$

Computiamo ora il terzo termine

$$X^{(3)} \equiv F(X^{(2)}) \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} x^{(3)}(\mathcal{Q}) &= \frac{\lambda}{(\omega \cdot q)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n \\ p_0 = q_0 - \sum p_i}} \frac{i^{n+1}}{n!} p_0^{\alpha_0} v_{p_0} \prod_{k=1}^n p_0^{\alpha_k} \cdot x^{(2)}(\mathcal{P}_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \left(\frac{i^{(n+1)+(2m_1+1)+\dots+(2m_n+1)}}{n! m_1! \dots m_n!} \right) \lambda^{1+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)} \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\sum_{\substack{p_0 := q_0 - \sum p_i \\ p_{k,0} := p_k - \sum_i p_{k,i}}} \prod_{k=1}^n \left[\left(\prod_{s_k=1}^{m_k} p_{k,0}^{\alpha_{k,s_k}} p_{k,s_k}^{\alpha_{k,s_k}} \right) \left(\prod_{s_k=1}^{m_k} \frac{1}{(\omega \cdot p_{k,s_k})^2} \right) \right] \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{s_k=0}^{m_k} v_{p_{k,s_k}} \right) p_0^{\alpha_{k,0}} p_{k,0}^{\alpha_{k,0}} \frac{1}{(\omega \cdot p_k)^2} \left] \frac{1}{(\omega \cdot p)^2} p_0^{\alpha_0} v_{p_0} \right. \\ &= \frac{1}{(\omega \cdot q)^2} \sum_{n, m_1, \dots, m_n} \sum_{\substack{p_0 := q_0 - \sum p_i \\ p_{k,0} := p_k - \sum_i p_{k,i}}} \underbrace{\left[\prod_{k=0}^n (p_0^{\alpha_k}) \frac{i^{n+1} \lambda v_{p_0}}{n!} \right]}_{w^{(n)}(\mathcal{Q}; (p_1, \alpha_{1,0}), \dots, (p_n, \alpha_{n,0}))} \\ & \prod_{k=0}^n \underbrace{\left[\left(\prod_{s_k=0}^{m_k} p_{k,0}^{\alpha_{k,s_k}} \right) \frac{i^{m_k+1} \lambda v_{p_{k,0}}}{m_k!} \right]}_{w^{(m_k)}(\mathcal{P}_k; \mathcal{P}_{k,1}, \dots, \mathcal{P}_{k,m_k})} \left[\prod_{s_k=1}^{m_k} \underbrace{\left(p_{k,s_k}^{\alpha_{k,s_k}} i \lambda v_{p_{k,s_k}} \right)}_{w^{(0)}(\mathcal{P}_{k,s_k})} \right] \\ & \prod_{k=1}^n \prod_{s_k=1}^{m_k} \left(\frac{1}{(\omega \cdot p_{k,s_k})^2} \right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

che puo' essere rappresentato dagli alberi del tipo $T^{(3)}$ (Fig. 8.3) e che

di nuovo scriveremo

$$x^{(3)}(\mathcal{Q}) = \sum_{T \in T^{(3)}} G(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) \mathcal{A}(T, G, w_0, \mathcal{Q}_0) \quad (8.17)$$

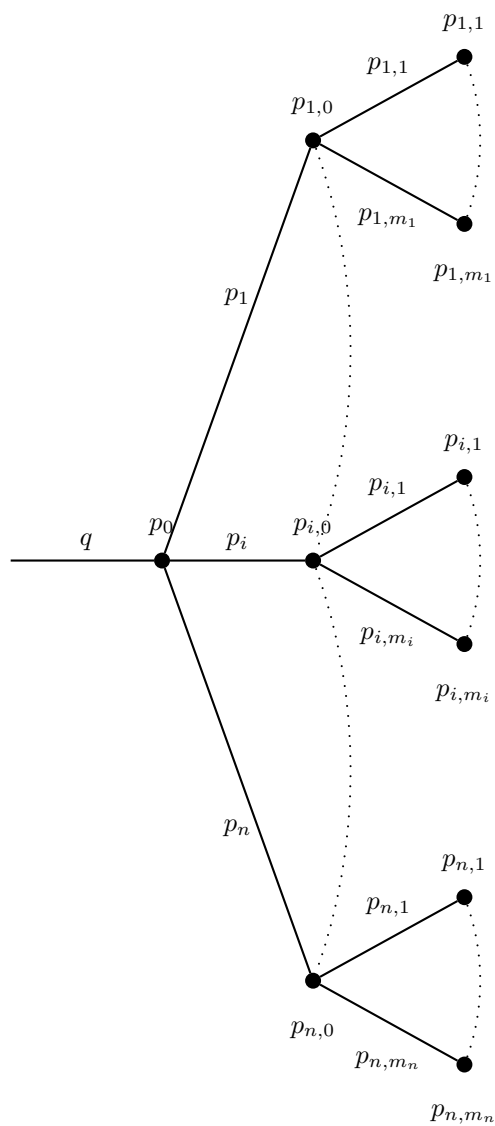


Figura 8.3: $T^{(3)}$

Diventa ora chiaro come iterando il procedimento all' infinito, si

giunga ad una somma del tipo (8.12) su tutti i grafici ad albero del tipo \mathcal{T}_1^k . Si avrà dunque

$$x(\mathcal{Q}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} G(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) \mathcal{A}(T, G_0, w_0, \mathcal{Q}_0) \quad (8.18)$$

dove $\mathcal{T}_1 = \cup_k \mathcal{T}_1^k$

Usando (4.8) e la notazione abbreviata introdotta, con $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m)$, scriviamo l'equazione originale

$$x(\mathcal{Q}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{P}} G_0(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0) w_0^{(m)}(\mathcal{Q}_0, \mathcal{P}) \prod_{\ell=1}^m x(\mathcal{P}_\ell) \quad (8.19)$$

e questo, insieme a (8.18) ci permette di affermare che

$$w_0(x; \mathcal{Q}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_1} \mathcal{A}(T, G, w_0, \mathcal{Q}) \quad (8.20)$$

Come abbiamo già detto, era ben noto sin dai tempi di Poincaré che la serie nell'equazione (8.18) non converge per valori non triviali di v , cioè $\sum_{T \in \mathcal{T}_1} |\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}(T, G)| = \infty$, come e' dimostrato ad esempio in [CC93]. Ciò è dovuto alla presenza di ripetute *risonanze*, cioè sottoalberi $S \subset T$ di grado due (S è collegato a T tramite vertici con numero di coordinazione 2). In ogni caso, molti alberi contribuiscono allo stesso ordine in λ e, come mostrato da Eliasson in [Eli88], si verificano delle cancellazioni raggruppando i termini in maniera opportuna.

Mostriamo ora l'idea della rinormalizzazione nel linguaggio dei grafici. L'idea di base è una identità combinatoria la quale opera una risommissione parziale di (8.18).

Proposizione. 4. *Sia $G = G' + \Gamma$. Allora*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{m+1}} A(T, G, w, \mathcal{Q}) = \sum_{T' \in \mathcal{T}_{m+1}} A(T', G', w', \mathcal{Q}) \quad (8.21)$$

con

$$w^{(m')}(P) = \sum_{T \in \mathcal{T}_{m'+1}} A(T, \Gamma, w, P) \quad (8.22)$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa nel sostituire $G = G' + \Gamma$ nella espressione di A nel membro sinistro di (8.21) Si avrà

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_{m+1}} A(T, G, w, Q) \equiv \\ & \equiv \sum_{T \in \mathcal{T}_{m+1}} \frac{1}{m!k!} \sum_{\mathcal{P}}^* \prod_{\ell \in L_I(T)} G(\mathcal{P}_\ell) \prod_{p \in V_I(T)} k_p! w^{(k_p)}(R_p, \mathcal{P}_p, Q_p) \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}_{m+1}} \frac{1}{m!k!} \sum_{T' \subset T} \sum_{\mathcal{P}}^* \prod_{\ell \in L_I(T')} G'(\mathcal{P}_\ell) \prod_{\ell' \in L_I^C(T')} \Gamma(\mathcal{P}_{\ell'}) \\ & \prod_{p \in V(T)} k_p! w^{(k_p)}(R_p, \mathcal{P}_p, Q_p) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Si otterra una somma su alberi con linee del “tipo Γ ” e linee del “tipo G' ”, come ad esempio in figura 8.4 Se ora in ogni albero cosi' strutturato

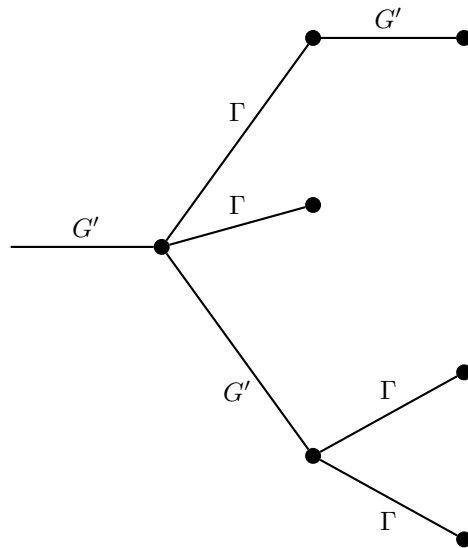


Figura 8.4: Linee “ G' ” e “ Γ ”

T contraiamo ogni sottoalbero formato esclusivamente da linee del tipo

Γ ad un punto (in Fig.8.5 l' albero di Fig.8.4), considerando l' "albero" T' delle linee G' così ottenuto, fissato, otteniamo una corrispondenza che associa ad un albero T con linee del tipo G' e Γ , le coppie $(T', \{T_i\})$, in cui T' e' un insieme di linee collegate da k' "bolle" e $\{T_i\}_{i=1,\dots,k'}$ un insieme di alberi ciascuno con $m_i + 1$ vertici esterni e k_i vertici interni tali che $m_i + 1$ sia uguale al numero di coordinazione della i -esima bolla e $\sum_{i=1}^{k'} k_i + k' = k$.

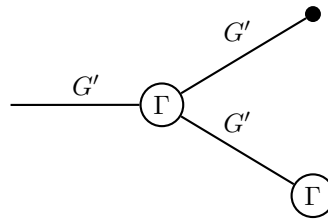


Figura 8.5: I sottoalberi "Γ" vengono contratti a una bolla

Possiamo dunque, fissato T' come abbiamo detto, sommare su tutti i possibili insiemi di alberi $\{T_i\}$ che si congiungano alle linee di T' in modo da formare un albero T . Ragionando in tale modo procediamo:

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_{m+1}} \mathcal{A}(T, G, w, \mathcal{Q}) \equiv \\
& \equiv \sum_{T' \in \mathcal{T}_{m+1}} \frac{1}{m!k'!} \sum_{\mathcal{P}_{\ell'}}^* \prod_{\ell' \in L_I(T')} G'(\mathcal{P}_{\ell'}) \prod_{p' \in V_I(T')} \\
& \left[\sum_{T_{p'}} \frac{1}{n_{p'}!k_{p'}!} \sum_{\mathcal{P}_{\ell}}^* \prod_{\ell \in L_I(T_{p'})} \Gamma(\mathcal{P}_{\ell}) \prod_{p \in V_I(T_{p'})} w^{(k_p)}(P'_p, \mathcal{P}_p, \mathcal{Q}_p) \right] \\
& \tag{8.24}
\end{aligned}$$

□

Al fine della risommazione applichiamo (8.21) iniziando da $w =$

w_0 , $G = G_0 = G_1 + \Gamma_0$, $w' = w_1$, e quindi induttivamente continueremo con $w = w_{n-1}$, $G = G_{n-1} = G_n + \Gamma_{n-1}$, $w' = w_n$. Si verifica facilmente che le w'_n così costruite coincidono con quelle costruite in (3.28). Infatti

$$W_1(Y) = W_0(Y + \Gamma_0 W_1(Y)) \quad (8.25)$$

Scrivendo entrambi i membri ed espandendo in serie di Taylor, otteniamo

$$\begin{aligned} w_1(\mathcal{Q}; y) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{P}} w_1^{(m)}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \prod_{\ell=1}^m y(\mathcal{P}_\ell) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{P}} w_0^{(m)}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \prod_{\ell=1}^m (y(\mathcal{P}_\ell) + \Gamma_0 w_1(y)(\mathcal{P}_\ell)) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{P}} w_0^{(m)}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \prod_{\ell=1}^m \left(y(\mathcal{P}_\ell) + \sum_{\mathcal{Q}} \Gamma_0(\mathcal{P}_\ell, \mathcal{Q}) w_1(\mathcal{Q}; y) \right) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Questo procedimento iterato porta alla somma su alberi con $m + 1$ linee esterne ad ognuna delle quali è attaccato un fattore $y(\mathcal{P}_\ell)$. Gli alberi posseggono un'ampiezza del tipo $A(T, \Gamma_0, w_0, \mathcal{Q})$, $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, permettendoci di riscrivere il membro destro di (8.26) usando la definizione (8.22) nel modo

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathcal{P}} w_0'^{(m)}(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \prod_{\ell=1}^m y(\mathcal{P}_\ell) \quad (8.27)$$

il quale confrontato con il membro sinistro in (8.26) mostra che $w_1 = w_0'$ definito qui coincide con w_1 definito nel capitolo 3.2. Questo argomento si applica induttivamente agli w_n .

Vediamo ora un esempio di come avvengono alcune cancellazioni tra strutture a prima vista “pericolose”, le quali, ripetute all'interno di un albero, daranno luogo nella serie di Lindstedt a contributi apparente-

mente grandi, ma che, attraverso opportune risommazioni, si compenseranno nella maniera sperata. Per una discussione più dettagliata del meccanismo delle divergenze rimandiamo il lettore interessato a [CC93].

Le strutture considerate, come detto in precedenza, sono costituite da risonanze ripetute, ad esempio del tipo in figura 8.6. Esse infatti porteranno contributi del tipo $\left[\frac{1}{(\omega \cdot q)^2}\right]^k$ i quali potranno essere dunque molto grandi.

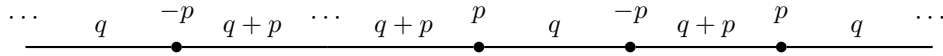


Figura 8.6: Risonanza

Strutture di questo tipo si cancelleranno ad esempio in corrispondenza di risonanze del tipo in Figura 8.7

Seguendo il formalismo sviluppato finora, possiamo rappresentare le strutture risonanti come in Figura 8.8, in cui in ogni bolla dovremo sommare, ovviamente, su tutti gli alberi “compatibili”, come spiegato in precedenza.

Le cancellazioni che renderanno la serie di Lindstedt convergente potranno essere mostrate semplicemente notando che la somma su tutti gli alberi del tipo in Figura 8.8 daranno luogo ad una serie

$$\sum_k (\Gamma_{n-1} w_n^{(1)}(q, q))^k = \sum_k (\Gamma_{n-1} D w_n(q, q; 0))^k \quad (8.28)$$

Come abbiamo mostrato $\Gamma_{n-1}(q) \sim \eta^{-2n}$ e $D w_n(q, q; 0) \sim \eta^{2n}$ quindi

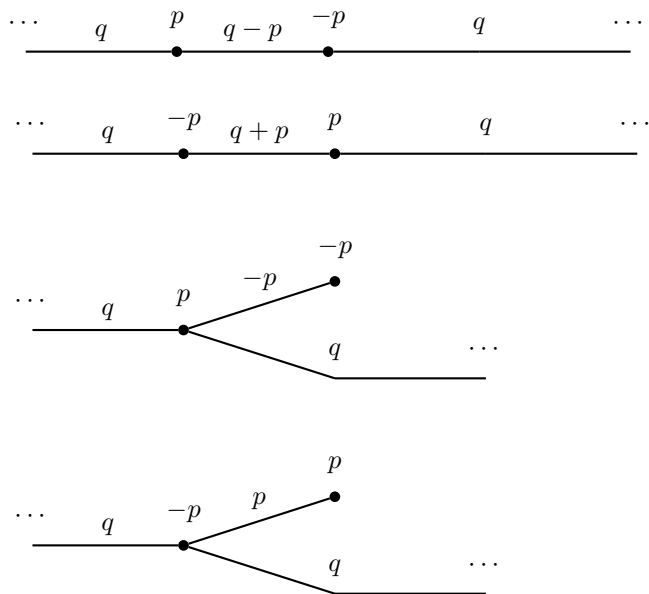


Figura 8.7: Strutture divergenti

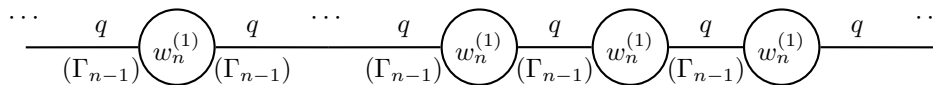


Figura 8.8: Struttura risonante

la serie in (8.28) è ben definita e converge a

$$[1 - \Gamma_{n-1} D w_n(q, q, 0)]^{-1} \leq \infty \tag{8.29}$$

Appendice A

Appendice

A.1 Stime di Cauchy

Lemma. A.1.1. 1. Supponiamo che una funzione $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$ sia analitica in $B(r) := \{z : |z| < r\}$ e continua in $\overline{B(r)}$ e $|\varphi| < \epsilon$ on $B(r)$; allora $|\varphi_k| < \epsilon r^{-k}$ per $k \in \mathbb{N}$

2. Supponiamo $|\varphi_k| < K r^{-k}$ per $k \in \mathbb{N}$. Allora la funzione $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$ è analitica in $B(r)$ e $|\varphi| \leq K r / \delta$ in $B(r - \delta)$.

Dimostrazione. 1.

$$|\varphi_k| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}} \right| dz \leq \epsilon / r^k \quad (\text{A.1})$$

2.

$$|\varphi(z)| \leq K \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k} (r - \delta)^k = K r / \delta \quad (\text{A.2})$$

□

A.2 Lemmi tecnici

Siano h, h', h'' be spazi di Banach, $B(r) \subset h, B(r') \subset h'$ e $w_i \in H^\infty(B(r), h'), w \in H^\infty(B(r'), h'')$. Allora

Lemma. A.2.1. *Se $\|w_i\|_{H^\infty} < r'$ allora $w \circ w_i \in H^\infty(B(r), h'')$ e*

$$\|w \circ w_i\|_{H^\infty} \leq \|w\|_{H^\infty} \quad (\text{A.3})$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} & \|w \circ w_i\|_{H^\infty} \\ &= \sup_{\|x\| < r} \|w \circ w_i(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\| < r'} \|w(x)\| \\ &\leq \|w\|_{H^\infty} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

□

Lemma. A.2.2. *Per $r_1 < r'$*

$$\sup_{\|x\| < r_1} \|Dw(x)\|_{\mathcal{L}(h'; h'')} \leq \frac{1}{(r' - r_1)} \|w\|_{H^\infty} \quad (\text{A.5})$$

Dimostrazione. Dalla formula di Cauchy per le funzioni analitiche

$$Dw(x)(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{w(x + zy)}{z^2} dz \quad (\text{A.6})$$

nella quale $\|x + zy\| < r'$, possiamo dunque prendere $R = r' - r_1$ quando $\|y\| = 1$ e $\|x\| < r_1$ otteniamo così

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\| < r_1} \|Dw(x)\|_{\mathcal{L}(h;h)} &\leq \sup_{\substack{\|y\|=1 \\ \|x\| < r_1}} \frac{1}{|2\pi|} \int_{|z|=r'-r_1} \frac{\|w(x+zy)\|}{|z|^2} dz \\
&\leq \frac{1}{r'-r_1} \|w(x)\|_{H^\infty}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

□

Lemma. A.2.3. *Prendendo $r_1 = \frac{1}{2}r'$, affermiamo che, se $\|w_i\|_{H^\infty} \leq \frac{1}{2}r'$ allora*

$$\|w \circ w_1 - w \circ w_2\|_{H^\infty} \leq \frac{2}{r'} \|w\|_{H^\infty} \|w_1 - w_2\|_{H^\infty} \tag{A.8}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&\|w \circ w_1 - w \circ w_2\|_{H^\infty} \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} \|Dw(w_1 + t(w_2 - w_1))\|_{\mathcal{L}(h';h'')} \|w_1 - w_2\|_{H^\infty} \\
&\stackrel{(2)}{\leq} \sup_{\|\xi\| \leq \frac{r'}{2}} \|Dw(\xi)\|_{\mathcal{L}(h';h'')} \|w_1 - w_2\|_{H^\infty} \\
&\stackrel{(2)}{\leq} \frac{2}{r'} \|w\|_{H^\infty} \|w_1 - w_2\|_{H^\infty}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

□

Lemma. A.2.4. *Se $\delta_k w(x) = w(x) - \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{\ell!} D^\ell w(0)(x)$, allora per $0 \leq \gamma < 1$*

$$\sup_{\|x\| \leq \gamma r'} \|\delta_k w(x)\| \leq \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \sup_{\|x\| \leq r'} \|w(x)\| \tag{A.10}$$

Dimostrazione. Usando la versione multidimensionale delle stime di Cauchy A.1.1 si ha

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\| \leq \gamma r'} \|\delta_k w(x)\| &= \sup_{\|x\| \leq \gamma r'} \left\| \sum_{\ell=k}^{\infty} \frac{1}{\ell!} D^\ell w(0)(x) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{\ell=k}^{\infty} \left\| \frac{D^\ell w(0)}{\ell!} \right\| (\gamma r')^\ell \leq \\
&\stackrel{\text{A.1.1}}{\leq} \sup_{\|x\| \leq r'} \|w(x)\| \sum_{\ell=k}^{\infty} \gamma^\ell = \\
&= \frac{\gamma^k}{1 - \gamma} \sup_{\|x\| \leq r'} \|w(x)\| \tag{A.11}
\end{aligned}$$

□

A.3 Etichettature

Calcoliamo in quanti modi è possibile assegnare k etichette ai k vertici interni di un albero $T \in \mathcal{T}_1^k$ in modo da ottenere lo stesso contributo ai fini della nostra rappresentazione. Il calcolo si rivelerà piuttosto semplice, infatti, mantenendoci consistenti con la notazione del capitolo 8.2 e indicando i k vertici in questione p_i , $i = 1, \dots, k$, avremo k scelte per il primo vertice p_1 , dopodiché dobbiamo attaccare κ_{p_1} delle $k - 1$ etichette rimaste nei vertici generati da p_1 , ripetendo questo procedimento possiamo ottenere il numero desiderato:

$$\begin{aligned}
N &= k \binom{k-1}{\kappa_{p_1}} \binom{k-1-\kappa_{p_1}}{\kappa_{p_2}} \dots \binom{k-1-\sum_{i=0}^{k-1} \kappa_{p_i}}{\kappa_{p_k}} \\
&= k \frac{(k-1)!}{\kappa_{p_1}!(k-1-\kappa_{p_1})!} \frac{(k-1-\kappa_{p_1})!}{\kappa_{p_2}!(k-1-\kappa_{p_1}-\kappa_{p_2})!} \dots \\
&\dots \frac{(k-1-\sum_{i=0}^{k-1} \kappa_{p_i})!}{\kappa_{p_k}!0!} \tag{A.12}
\end{aligned}$$

cancellando a catena i denominatori coi numeratori del termine successivo rimarremo con

$$N = \frac{k!}{\prod_{i=1}^k \kappa_{p_i}!} \quad (\text{A.13})$$

Indice analitico

- Ampiezza di un albero, 77
- Campo vettoriale hamiltoniano,
10
- Contraazione, 22, 33
- Equazioni del moto, 19
- Etichettature, 90
- Flusso di fase hamiltoniano, 10
- Funzione
 - di Hamilton, 10
 - di taglio, 22
 - generatrice, 14–16
- Grafici ad albero, 76, 78
- Grandi denominatori, 6, 49
- Gruppo di rinormalizzazione, 6,
22
- Hamiltoniana perturbata, 3, 14,
17, 19
- Henri Poincaré, 3, 74
- Identità di Ward, 39
- Kolmogorov, Arnold e Moser, 16
- Meccanica hamiltoniana, 2
- Orbite quasi-periodiche, 4
- Parentesi di Poisson, 10
- Piccoli denominatori, 6, 14, 15,
22, 49
- Problema non degenerare, 4
- Pull back, 13
- Risonanze, 81
- Serie di Lindstedt, 6, 73
- Serie di potenze formale, 73
- Sistema integrabile, 2, 11
- Sistema solare, 2
- Sistemi deterministici, 1
- Soluzioni quasi-periodiche, 17,
20
- Stime di Cauchy, 87
- Struttura simplettica, 9
- Superficie equienergetica, 16
- Teorema

- del Punto Fisso di Banach,
 - 6, 54
- di Arnold-Jost, 12
- KAM, 6, 69
- Teoria delle perturbazioni, 2
- Teoria quantistica di campo, 6
- Tori
 - non risonanti, 4
 - risonanti, 4
- Trasformazione canonica, 14, 15
- Variabili azione-angolo, 3, 14
- Vettore
 - razionalmente dipendente, 15
 - razionalmente indipendente,
 - 4, 15
- Vettore diofanteo, 17, 20
- Vettori diofantei, 75

Bibliografia

- [Arn87] V.I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, II edition, 1987.
- [Arn95] V. I. Arnol'd. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti, II edition, 1995.
- [BAS] J. Brichmont, A.Kupiainen, and A. Schenkel. Renormalization Group and the Melnikov Problem for PDE's.
- [BGK99] Jean Brichmont, Krzysztof Gawedzki, and Antti Kupiainen. KAM Theorem and Quantum Field Theory. *Mathematical Physics Preprint Archive*, 1999.
- [Bia98] L. Biasco. Stime analitiche sui tempi di instabilita' per perturbazioni di sistemi hamiltoniani integrabili. Master's thesis, Universita' di Roma "Roma III", 1998.
- [CC93] L. Chierchia and C.Falcolini. A Direct Proof of a Theorem by Kolmogorov in Hamiltonian Systems. *Mathematical Physics Preprint Archive*, June 1993.
- [Chi96] L. Chierchia. *Lezioni di Analisi matematica 2*. Aracne, I edition, September 1996.

- [DM] W. Ditrich and M.Reuter. Classical and Quantum Dynamics.
- [Eli88] L. H. Eliasson. Absolutely convergent series expansions for quasi periodic motions. *Reports Department of Math., Univ. of Stockholm, Sweden*, pages 1–31, 1988.
- [HZ94] H. Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser Verlag, 1994.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [LC94] L.Chierchia and C.Falcolini. Compensations in small divisor problems. *Mathematical Physics Preprint Archive*, August 1994.
- [Poi99] H. Poincaré. *Les méthode de la mécanique céleste*, volume 1-3. Paris: Gauthier-Villars, 1892/1893/1899.
- [Thi78] W Thirring. *Classical Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1978.
- [Val98] E. Valdinoci. Tori di transizione nella teoria KAM. Master's thesis, Università degli Studi Roma Tre, febbraio 1998.