

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

SINTESI DELLA TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

presentata da
Manuela Di Fazio

**Il Calcolo di Malliavin,
con applicazioni alla
Finanza Matematica**

Relatore
Prof.ssa Lucia Caramellino

Anno Accademico 2000–2001

Classificazione AMS: 60H10; 60H07; 91B24.

Parole chiave: Equazioni differenziali stocastiche; Calcolo di Malliavin; Finanza Matematica; Copertura e “greche” di opzioni europee.

Il **Calcolo di Malliavin**, conosciuto anche come **calcolo stocastico delle variazioni**, è una teoria che studia il calcolo differenziale infinito dimensionale, introdotta da Malliavin negli anni '70 e sviluppata in seguito da autori quali Stroock, Bismut, Watanabe, Nualart e altri.

In questa tesi trattiamo alcuni argomenti appartenenti a questa vasta teoria. Tali argomenti verranno utilizzati per studiare delle quantità di notevole importanza in Finanza, che vanno sotto il nome di **Greche**.

Affrontiamo la teoria del Calcolo di Malliavin seguendo l'approccio descritto nel celebre testo di Nualart [17], con una trattazione molto legata all'analisi funzionale e un po' meno a quella originaria, più probabilistica, di Malliavin. Sia $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ un moto browniano unidimensionale¹ su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed \mathcal{F}_t , per ogni $t \in [0, T]$, il completamento rispetto a \mathbb{P} della σ -algebra generata da $\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Per² $h \in L^2([0, T])$, definiamo

$$\mathbf{W}(h) = \int_0^T h(s) dW(s)$$

e denotiamo con \mathcal{S} lo spazio delle **variabili aleatorie semplici**: $F \in \mathcal{S}$ se e solo se F è della forma

$$F = f(\mathbf{W}(h_1), \dots, \mathbf{W}(h_n)),$$

dove $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ denota una funzione C^∞ tale che f e tutte le sue derivate, di qualsiasi ordine, sono a crescita polinomiale e $h_j \in L^2([0, T])$ per ogni j . Si noti che in particolare³ $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, dunque⁴ $\mathcal{S} \subset L^2(\Omega)$. Su \mathcal{S} definiamo la **derivata di Malliavin** come l'operatore⁵

$$\begin{aligned} D : \mathcal{S} \subset L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega \times [0, T]) \\ F &\mapsto D_t F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{W}(h_1), \dots, \mathbf{W}(h_n)) h_j(t). \end{aligned}$$

Osserviamo che, poiché le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono a crescita polinomiale e $h_j \in L^2([0, T])$, allora $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{W}(h_1), \dots, \mathbf{W}(h_n)) h_j(t) \in L^2(\Omega \times [0, T])$, dunque lo

¹In questa introduzione abbiamo preferito presentare l'argomento nel caso unidimensionale per non appesantire troppo le notazioni. Nella tesi, la trattazione è svolta in dimensione d qualsiasi.

²Scriveremo brevemente $L^2([0, T])$ per indicare lo spazio $L^2([0, T], \mathcal{B}(0, T), \text{Leb})$, dove, al solito, $\mathcal{B}(0, T)$ e Leb denotano, rispettivamente, i boreliani di $[0, T]$ e la misura di Lebesgue.

³Perché f è a crescita polinomiale e $\mathbf{W}(h)$ ha momento di qualsiasi ordine, essendo una variabile aleatoria gaussiana.

⁴Da ora in poi indicheremo con $L^2(\Omega)$ lo spazio $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

⁵Da ora in poi, indicheremo con $L^2(\Omega \times [0, T])$ lo spazio $L^2(\Omega \times [0, T], \mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(0, T), \mathbb{P} \times \text{Leb})$.

spazio di arrivo di D è proprio $L^2(\Omega \times [0, T])$. Si noti inoltre che D è lineare. Allo scopo di interpretare D come una derivata direzionale, osserviamo che per ogni $h \in L^2([0, T])$ si ha, denotando con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare in $L^2([0, T])$ e posto $H(s) = \int_0^s h(u) du$,

$$\begin{aligned} & \langle DF, h \rangle = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{W}(h_1) + \varepsilon \langle h_1, h \rangle, \dots, \mathbf{W}(h_n) + \varepsilon \langle h_n, h \rangle) - f(\mathbf{W}(h_1), \dots, \mathbf{W}(h_n))}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[f \left(\int_0^T h_1(s) d[W(s) + \varepsilon H(s)], \dots, \int_0^T h_n(s) d[W(s) + \varepsilon H(s)] \right) \right. \\ & \quad \left. - f \left(\int_0^T h_1(s) dW(s), \dots, \int_0^T h_n(s) dW(s) \right) \right] \end{aligned}$$

in $L^2(\Omega)$.

In tal modo, abbiamo definito la derivata di Malliavin sulla classe delle variabili aleatorie semplici. Per estendere la definizione ad una classe più ampia, si fa uso della seguente norma: per $F \in \mathcal{S}$, sia

$$\begin{aligned} \|F\|_{1,2} &= \left(\mathbb{E}(F^2) + \mathbb{E} \left(\int_0^T (D_t F)^2 du \right) \right)^{1/2} \\ &\equiv \left(\|F\|_{L^2(\Omega)} + \|DF\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

L'operatore D risulta essere chiudibile rispetto alla norma appena definita, rendendo così immediata la definizione di variabili aleatorie derivabili secondo Malliavin e di derivata di Malliavin per densità:

Definizione 1. Denotiamo con $\mathbb{D}^{1,2}$ il dominio di D in $L^2(\Omega)$, intendendo con $\mathbb{D}^{1,2}$ la chiusura di \mathcal{S} rispetto alla norma $\|\cdot\|_{1,2}$ definita in (1). Se $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ allora esiste $(F_N)_N \subset \mathcal{S}$ tale che $F_N \rightarrow F$ in $L^2(\Omega)$ e $DF_N \rightarrow G$ in $L^2(\Omega \times [0, T])$. Allora definiamo

$$DF := \lim_{N \rightarrow \infty} DF_N = G.$$

DF è detta **derivata di Malliavin** della variabile aleatoria F .

L'operatore D gode di numerose ed interessanti proprietà come ad esempio la seguente, la quale fornisce una regola di derivazione che si rifà a quella classica: se $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ denota una funzione differenziabile con continuità e con derivate parziali limitate e $F = (F^1, \dots, F^m)$ è un vettore aleatorio le cui componenti appartengono allo spazio $\mathbb{D}^{1,2}$, allora $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e

$$D(\phi(F)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(F) DF^i. \quad (2)$$

Una volta definita la derivata di Malliavin è possibile passare al concetto di **integrale di Skorohod** δ , che non è altro che l'operatore aggiunto dell'operatore D :

Definizione 2. Denotiamo con δ l'aggiunto dell'operatore D . Questo significa che δ è un operatore lineare su $L^2(\Omega \times [0, T])$ a valori in $L^2(\Omega)$ tale che:

(i) il dominio di δ , denotato con $Dom(\delta)$, è l'insieme dei processi $u \in L^2(\Omega \times [0, T])$ tali che

$$|\mathbb{E}[\langle DF, u \rangle]| = \left| \mathbb{E} \left[\int_0^T D_t F u(t) dt \right] \right| \leq C \|F\|_{L^2(\Omega)},$$

per ogni $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, dove C è una costante dipendente solo da u ;

(ii) se u appartiene a $Dom(\delta)$, allora $\delta(u)$ è l'elemento di $L^2(\Omega)$ caratterizzato da

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle], \quad (3)$$

per ogni $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Quindi l'integrale di Skorohod δ trasforma processi in variabili aleatorie di $L^2(\Omega)$. In particolare vale la formula (3), la cosiddetta **formula di integrazione per parti**, che riveste un ruolo centrale nella teoria del Calcolo di Malliavin e nelle applicazioni studiate in questa tesi.

Un risultato importante, che peraltro giustifica il termine "integrale" e che dimostreremo nel Capitolo dedicato al Calcolo di Malliavin, consiste nel fatto che l'integrale di Skorohod è un'estensione dell'integrale di Ito: essi difatti coincidono sui processi appartenenti ad $L^2(\Omega \times [0, T])$ che sono $(\mathcal{F}_t)_t$ -adattati⁶. Mostriamo anche che se

$$X(t) = \int_0^t v(s) dW(s), \quad t \in [0, T],$$

con $\{W(s), s \in [0, T]\}$ moto browniano e se $\{v(s), s \in [0, T]\}$ è un processo appartenente a $Dom(\delta)$ verificante opportune proprietà, allora, per ogni $t \in [0, T]$, $X(t)$ è derivabile secondo Malliavin e la sua derivata è data da

$$D_s X(t) = \begin{cases} 0 & s > t \\ v(s) + \int_s^t D_s v(r) dW(r) & s \leq t. \end{cases}$$

⁶Si noti infatti che quest'ultima proprietà, fondamentale per la definizione di integrale di Ito, non è richiesta nella definizione di integrale di Skorohod.

Questo fatto porterà ad individuare il **processo derivata di Malliavin della soluzione di una Equazione Differenziale Stocastica (E.D.S.)**: se X^x denota la soluzione dell'E.D.S.

$$\begin{cases} dX^x(t) = b(t, X^x(t))dt + \sigma(t, X^x(t))dW(t) \\ X^x(0) = x, \end{cases} \quad (4)$$

con b e σ soddisfacenti opportune ipotesi, allora

$$D_s X^x(t) = Y^x(t)(Y^x(s))^{-1} \sigma(s, X^x(s)) \mathbf{1}_{s \leq t}, \quad (5)$$

dove⁷

$$Y^x(t) = \frac{d}{dx} X^x(t).$$

Le dimostrazioni di questi fatti avvengono attraverso lo studio di proprietà e caratterizzazioni legate agli operatori D e δ in termini di una opportuna espansione delle quantità aleatorie di interesse: l'**espansione in caos di Wiener**.

Rifacendoci fondamentalmente al lavoro [6] di Fournié, Lasry, Lebuchoux, Lions e Touzi e attraverso argomenti di Calcolo di Malliavin, studieremo le derivate, rispetto a opportuni parametri, di aspettative di funzionali della traiettoria di un processo di diffusione soluzione dell'E.D.S. (4), ottenendo delle formule di rappresentazione interessanti dal punto di vista numerico e quindi applicativo. Vale la pena di sottolineare che questa è di fatto la ragione principale della notorietà di cui il lavoro sopra citato gode nell'ambiente matematico-finanziario: per la prima volta, tecniche di Calcolo di Malliavin portano a risultati che rivestono un importante ruolo in ambito puramente applicativo. Ma entreremo in seguito nei dettagli delle applicazioni; per il momento passiamo alla formalizzazione del problema teorico sottostante.

Sia X^x la soluzione dell'E.D.S. (4). Fissati m istanti $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ e $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, consideriamo la variabile aleatoria

$$\phi(X^x(t_1), \dots, X^x(t_m))$$

verificante, insieme ai coefficienti di drift e di diffusione di X^x , opportune condizioni (ad esempio, $\phi(X^x(t_1), \dots, X^x(t_m)) \in L^2(\Omega)$). Definiamo ora la quantità:

$$u(x) = \mathbb{E}[\phi(X^x(t_1), \dots, X^x(t_m))].$$

⁷L'esistenza del processo Y^x è studiata nel Capitolo 1. Nel caso d -dimensionale, si avrà

$$Y^x(t) = (Y_j^i(t, x, \omega))_{i,j} = \left(\frac{\partial X^j(t, x, \omega)}{\partial x_i} \right)_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Sebbene, come tradizione, sia stata sottolineata la dipendenza di u solo da x , osserviamo che tale valore atteso può anche essere considerato come un funzionale del coefficiente di diffusione σ oppure del coefficiente di drift b . Nel Capitolo 4 studieremo:

- la derivata di u rispetto alla condizione iniziale x ($\frac{\partial u}{\partial x}$);
- la derivata direzionale di u rispetto a σ nella direzione $\tilde{\sigma}$ ($\frac{\partial u}{\partial \tilde{\sigma}}$);
- la derivata direzionale di u rispetto a b nella direzione \tilde{b} ($\frac{\partial u}{\partial \tilde{b}}$).

In tutti e tre i casi, usando tecniche di Calcolo di Malliavin, si dimostrano delle formule di rappresentazione per tali derivate, ottenendo che la derivata di u si può rappresentare come un'aspettazione pesata dello stesso funzionale ϕ , in cui il peso non dipende dalla funzione ϕ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \mathbb{E}[\phi(X^x(t_1), \dots, X^x(t_m)) \delta(H_1^x)], \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{\sigma}} &= \mathbb{E}[\phi(X^x(t_1), \dots, X^x(t_m)) \delta(H_2^x)], \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{b}} &= \mathbb{E}[\phi(X^x(t_1), \dots, X^x(t_m)) \delta(H_3^x)],\end{aligned}\tag{6}$$

dove H_2^x ed H_3^x sono ovviamente processi dipendenti da $\tilde{\sigma}$ e \tilde{b} . Si noti che i tre pesi non sono altro che tre integrali di Skorohod. Infatti, la dimostrazione di tali risultati discende fondamentalmente dalla regola di derivazione (2), dalla formula di integrazione per parti (3) e dalla rappresentazione della derivata di Malliavin della soluzione dell'E.D.S. (5). Vediamo brevemente qual è l'idea sottostante le dimostrazioni.

Indichiamo genericamente con $F(\varepsilon)$ la variabile aleatoria di riferimento, a valori in \mathbb{R}^m e dipendente dal parametro ε . Supponiamo di essere interessati a studiare

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) - \mathbb{E}(\phi(F(0)))}{\varepsilon}.$$

Ad esempio, se il parametro di interesse fosse il punto iniziale x , allora

$$F(\varepsilon) = (X^{x+\varepsilon}(t_1), \dots, X^{x+\varepsilon}(t_m))$$

(definiremmo in maniera del tutto simile $F(\varepsilon)$ nel caso in cui fossimo interessati alla derivata direzionale rispetto a σ o a b). Supponiamo che ϕ sia sufficientemente regolare ed assumiamo che esista

$$G := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon},\tag{7}$$

ad esempio in $L^2(\Omega)$. In tal caso, utilizzando le usuali regole di derivazione sotto segno di integrale, possiamo scrivere

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}(\phi'(F) G), \quad (8)$$

avendo indicato $F = F(0)$. Ora, l'esistenza (teorica) di un peso π_0 tale che

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}(\phi'(F) G) = \mathbb{E}(\phi(F) \pi_0) \quad (9)$$

per ogni ϕ (regolare), è immediata se si suppone che la variabile aleatoria $F(\varepsilon)$ abbia densità f_ε regolare in ε . Infatti, in tal caso, usando la regola di derivazione sotto segno di integrale, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(z) f_\varepsilon(z) dz \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \phi(z) \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f_\varepsilon(z) dz \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(z) \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\log f_\varepsilon(z)) \right|_{\varepsilon=0} f_0(z) dz, \end{aligned}$$

ottenendo quindi la (9) con

$$\pi_0 = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\log f_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} (F). \quad (10)$$

Tale peso è solo teorico, perché per poterlo calcolare occorre conoscere esplicitamente la densità f_ε e, com'è noto, tale fatto è possibile solo in pochissimi casi. Usando però il Calcolo di Malliavin, è possibile pervenire ad un altro peso, ottenuto stavolta con la formula di integrazione per parti (3) stabilita nella definizione di integrale di Skorohod. Infatti, assumiamo che F sia derivabile secondo Malliavin e che $D_t F$ sia “non degenerare”, nel senso che possiamo determinare un processo Skorohod integrabile v tale che

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T D_t F v_t dt \mid \sigma(F) \right) = \mathbb{E}(G \mid \sigma(F))$$

dove, ricordiamo, G è definita tramite (7) e soprattutto (8). In tal caso, per tale v (e per ogni ϕ anche qui regolare), usando le note proprietà dell'aspettazione condizionata, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} &= \mathbb{E}(\phi'(F) G) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(\phi'(F) G \mid \sigma(F)) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\phi'(F) \mathbb{E}(G \mid \sigma(F)) \right) = \mathbb{E} \left(\phi'(F) \mathbb{E} \left(\int_0^T D_t F v_t dt \mid \sigma(F) \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\phi'(F) \int_0^T D_t F v_t dt \mid \sigma(F)\right)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \phi'(F) D_t F v_t dt\right).$$

Ora, secondo la regola di derivazione (2) $\phi'(F) D_t F = D_t F(\phi)$, quindi

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}\left(\int_0^T D_t \phi(F) v_t dt\right) = \mathbb{E}(\langle D\phi(F), v \rangle).$$

La formula di integrazione per parti (3) dà $\mathbb{E}(\langle D\phi(F), u \rangle) = \mathbb{E}(\phi(F) \delta(v))$, da cui segue che

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}(\phi(F) \delta(v)).$$

Ma allora otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbb{E}(\phi(F(\varepsilon))) \Big|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}(\phi(F) \pi), \quad \text{con } \pi = \delta(v).$$

Tali argomenti, così come l'esistenza di v , le proprietà che devono essere richieste affinché i passaggi sopra accennati siano possibili, in particolare le ipotesi non troppo restrittive sulla funzione ϕ , saranno ampiamente discussi nel Capitolo 4 e porteranno alle rappresentazioni (6). Verrà data anche un'ulteriore dimostrazione, che porta ad un peso alternativo, per la rappresentazione della derivata direzionale di u rispetto al drift b (Teorema 4.3.11).

Vediamo ora in che senso u e le sue derivate sono quantità di interesse finanziario. Esse hanno a che fare con un tipo di contratto che va sotto il nome di **opzione europea**. Tale contratto è un **titolo derivato**, cioè un titolo il cui valore deriva da altre attività finanziarie dette sottostanti, ad esempio obbligazioni, titoli azionari, valute o altro.

Nel contratto si individuano due parti: il **venditore** e l'**acquirente** della opzione. Esistono molteplici tipi di opzione come, ad esempio, l'**opzione di acquisto (call)**, l'**opzione di vendita (put)**, le **opzioni digital**, le **opzioni asiatiche**, etc. Prendiamo in esame una call, che attribuisce all'acquirente il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare alla **scadenza del contratto** $T > 0$ il titolo sottostante ad un prezzo prefissato K , detto **prezzo di esercizio**. Alla scadenza del contratto, il prezzo di esercizio potrebbe essere maggiore o minore del prezzo di mercato $X(T)$ del bene sottostante. Il valore finale dell'opzione di acquisto è quindi

$$(X(T) - K)^+ = \max(X(T) - K, 0),$$

detto *payoff*. Da ciò si desume che ogni opzione è determinata da un **valore a scadenza**, detto *payoff*.

Inoltre alla scadenza abbiamo visto che si presentano due possibili scenari:

$X(T) \leq K$: l'acquirente dell'opzione non esercita il proprio diritto di acquisto del titolo, dal momento che lo comprerebbe ad un prezzo K più alto di quello quotato sul mercato, quindi non guadagna nulla;

$X(T) > K$: l'acquirente dell'opzione esercita il proprio acquisto e quindi il venditore dell'opzione perde una somma pari a $X(T) - K$.

L'eventuale vantaggio da parte dell'acquirente deve tradursi in un **costo iniziale dell'opzione**. Inoltre, il venditore deve avere la possibilità di **coprirsi** dalle possibili perdite. Infine, nessuna delle due parti deve poter guadagnare con probabilità positiva (**assenza di arbitraggio**). Il problema del prezzo e della copertura di un'opzione è stato affrontato da molti autori e noi lo consideriamo risolto, ovvero ci poniamo in ipotesi di mercato privo di arbitraggio in cui si realizzano prezzo e copertura. Vediamo brevemente quali.

Supponiamo che l'attività sottostante sia un titolo azionario. Costruiamo un portafoglio (P) costituito da una certa quantità (ξ) del titolo rischioso sottostante e da una certa quantità (η) di un titolo non rischioso (ad esempio un'obbligazione). L'idea è quella di trovare le quantità iniziali di ξ ed η in modo tale che alla scadenza il portafoglio abbia un valore pari al *payoff*. In questo modo infatti, se il venditore dell'opzione investe attraverso questo portafoglio P , egli è in grado di coprirsi dall'eventuale perdita. A questo punto il prezzo equo dell'opzione, detto anche **premio** (per il venditore) non potrà che essere il valore iniziale del portafoglio trovato P .

Prendiamo il seguente modello.

Sia $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ uno spazio di probabilità e sia $\{\tilde{W}(t), 0 \leq t \leq T\}$ un moto browniano unidimensionale su tale spazio. Supponiamo poi che il prezzo del titolo non rischioso segua la dinamica

$$X_0(t) = e^{\int_0^t r(s) ds},$$

con $r(s)$ (deterministico) tasso di interesse istantaneo al tempo s e che l'andamento del prezzo del titolo rischioso sia descritto dalla dinamica (4), cioè

$$X^x(t) = x + \int_0^t b(s, X^x(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X^x(s)) d\tilde{W}(s).$$

Sotto ipotesi opportune su r , b e σ , esiste un'unica misura di probabilità \mathbb{P} equivalente a $\tilde{\mathbb{P}}$, chiamata **misura neutrale al rischio**, tale che sotto \mathbb{P} si abbia

$$X^x(t) = x + \int_0^t r(s) X^x(s) ds + \int_0^t \sigma(s, X^x(s)) dW(s),$$

dove W è un moto browniano rispetto a \mathbb{P} . Tecnicamente, \mathbb{P} è la misura rispetto alla quale il prezzo del bene sottostante scontato rispetto al titolo non rischioso diviene una martingala. Più praticamente, \mathbb{P} è la misura rispetto alla quale le variazioni percentuali istantanee del titolo rischioso ($dX^x(t)/X(t)$) si comportano come le variazioni percentuali istantanee del titolo non rischioso ($dX_0(t)/X_0(t) = r(t)dt$) più un errore a media nulla ($(\sigma(t, X^x(t))dW(t)/X(t)$). Intuitivamente, \mathbb{P} è la misura rispetto alla quale il “gioco” di compravendita risulta equo in qualche senso (mancanza di arbitraggio), diventando così la misura di riferimento.

Poiché il *payoff* dell'opzione dipende dal prezzo del titolo sottostante, esso sarà un funzionale di X^x che denotiamo con $\phi(X^x)$. I tipi di opzioni che trattiamo sono caratterizzate da un *payoff* che è dato da $\phi(X^x(T))$.

Denotiamo con i processi $\xi(t)$ e $\eta(t)$, rispettivamente la quantità del titolo rischioso e non. Allora il valore del portafoglio $P(t) = (\xi(t), \eta(t))$ al tempo t sarà

$$V_P(t) = \xi(t)X^x(t) + \eta(t)X_0(t). \quad (11)$$

Nel modello in cui ci siamo posti, è allora possibile costruire un portafoglio che consente al venditore di coprirsi dagli eventuali rischi e che replica l'opzione, cioè tale che il valore finale del portafoglio coincide con il *payoff* dell'opzione. Tale portafoglio è dato da

$$\begin{aligned} V_P(t) &= e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{E}_{t,y} [\phi(X^x(T))] \Big|_{y=X^x(t)} \\ \xi(t) &= e^{-\int_t^T r(s) ds} \frac{\partial}{\partial y} \mathbb{E}_{t,y} [\phi(X^x(T))] \Big|_{y=X^x(t)} \end{aligned} \quad (12)$$

dove $\mathbb{E}_{t,y}[\cdot]$ denota la media sotto \mathbb{P} condizionata al dato $X^x(t) = y$. Si noti che, dalla (12) e dalla (11), anche il processo $\eta(t)$ è perfettamente individuato. Inoltre, come abbiamo già accennato, conoscere il valore del portafoglio al tempo iniziale, risolve anche il problema di stabilire il prezzo equo dell'opzione. Tale prezzo è dato proprio dal valore del portafoglio sopra scritto all'istante iniziale. Posto quindi

$$u(x) = \mathbb{E}[\phi(X^x(T))],$$

allora dalla (12) si ha che

$$prezzo = V_P(0) = e^{-\int_0^T r(s) ds} u(x)$$

e

$$copertura = \xi(0) = e^{-\int_0^T r(s) ds} \frac{\partial}{\partial x} u(x).$$

Cominciamo quindi ad intravedere il significato finanziario delle derivate di u : esse danno la sensibilità del prezzo rispetto ai parametri in gioco e prendono il nome di **Greche**⁸. Abbiamo visto che la derivata rispetto ad x , detta **delta**, dà la copertura necessaria; quindi la derivata seconda di u rispetto ad x , detta **gamma**, indica la variabilità del processo di copertura rispetto al prezzo iniziale dell'opzione. Le altre derivate rispetto ad r (drift) e σ (coefficiente di diffusione) danno indicazione di come varia il prezzo dell'opzione rispetto a variazioni del tasso di interesse e della volatilità del titolo azionario e vengono chiamate rispettivamente **rho** e **vega**.

Le Greche di un'opzione rivestono un ruolo molto importante dal punto di vista degli operatori di mercato ed è essenziale poterle calcolare. Per lo più non esistono formule chiuse, anche nel ben noto **modello di Black e Scholes** descritto nel Capitolo 5 di questa tesi. Un approccio naturale per risolvere numericamente il calcolo delle greche consiste nell'approssimare, attraverso simulazioni Monte Carlo, le derivate di interesse con il metodo delle differenze finite dei differenziali. Per rendere più chiaro il discorso, limitiamoci al caso della delta. Seguendo tale approccio, si dovrà calcolare uno stimatore Monte Carlo per $u(x)$ ed uno stimatore Monte Carlo per $u(x + \varepsilon)$, per qualche ε piccolo; la delta viene quindi stimata da $[u(x + \varepsilon) - u(x)]/\varepsilon$. Se le simulazioni dei due stimatori sono eseguite indipendentemente, allora è stato provato (Glynn, [26]) che l'ordine di convergenza è tipicamente $N^{-1/4}$, dove N è il numero di simulazioni. Sostituendo lo stimatore delle differenze finite in "avanti" dalle differenze "centrali" $[u(x + \varepsilon) - u(x - \varepsilon)]/(2\varepsilon)$, l'ordine di convergenza ottimale diventa $N^{-1/3}$. Tuttavia, usando numeri casuali comuni per entrambi gli stimatori, si può raggiungere l'ordine di $N^{-1/2}$, che è il migliore che si possa ottenere da un ordinario metodo Monte Carlo (Glasserman e Yao [25], Glynn [26], L'Ecuyer e Perron [27]). Si è visto inoltre che uno svantaggio notevole del metodo alle differenze finite con numeri casuali comuni, consiste nel fatto che esso funziona male quando ϕ non è abbastanza regolare, come ad esempio nel caso della delta di una digital, in cui

$$\phi(X^x(T)) = \mathbf{1}_{X^x(T) \in (a,b)}$$

o anche nel caso della gamma (derivata seconda rispetto a x) di una opzione call, dove

$$\phi(X^x(T)) = (X_T^x - K)^+.$$

Occorre infine sottolineare che il risultato di queste approssimazioni è anche affetto dall'errore dovuto alla presenza dell' ε . Un metodo alternativo che

⁸Semplicemente perché sono denotate con lettere greche.

ovvia a quest'ultimo errore e che permette di raggiungere l'ordine di convergenza di $N^{-1/2}$, consiste nell'utilizzare il peso π_0 costruito a partire dalla densità, così come descritto nelle (9) e (10) (Broadie e Glasserman [24]). Ma alla discussione già effettuata riguardo a questo peso occorre aggiungere un'ulteriore limitazione: esso può essere applicato solo a funzionali ϕ molto regolari.

Finalmente, utilizzando il calcolo di Malliavin, abbiamo mostrato che i differenziali ai quali siamo interessati possono essere espressi come un'aspettazione pesata dello stesso funzionale ϕ , con pesi ottenuti come integrali di Skorohod di opportune quantità. Quindi, il differenziale richiesto può essere calcolato direttamente con simulazioni Monte Carlo e lo stimatore raggiunge l'usuale ordine di convergenza di $N^{-1/2}$. Un vantaggio importante della formula sta nel fatto che il peso non dipende dalla funzione ϕ : in termini finanziari, ciò significa che fissato il modello e calcolato il peso relativo alla greca di interesse, tale peso è utilizzabile in via teorica per qualsiasi tipo di opzione. Vale la pena di sottolineare che le proprietà che ϕ deve verificare affinché si abbiano le (6) valgono per buona parte delle opzioni più famose quotate sul mercato.

Infine, abbiamo visto che i pesi che danno luogo alle rappresentazioni (6) non sono unici. Nasce quindi il problema della "scelta del peso migliore", dando ovviamente un opportuno significato alla parola "migliore" (ad esempio, a varianza minima). Tali argomenti non sono stati direttamente affrontati in questa tesi, tranne che in un caso particolare (Paragrafo 5.4, Proposizione 5.4.1). Per un'analisi su tali questioni, rimandiamo ai lavori [7] e [8] di Fournié, Lasry, Lebuchoux e Lions.

Per concludere diamo uno schema di organizzazione della tesi.

Nel Capitolo 2 diamo alcuni risultati di calcolo stocastico che saranno utilizzati nel seguito, dimostrando solo i risultati di esistenza e di regolarità delle soluzioni di E.D.S. che solitamente non vengono affrontati nei corsi avanzati di probabilità. I testi di riferimento di questo capitolo sono stati, principalmente, Baldi [2], Ikeda e Watanabe [12], Karatzas e Shreve [13], Kloeden e Platen [14] e Øksendal [20].

Nel Capitolo 3 trattiamo la teoria del Calcolo di Malliavin, introducendo i seguenti argomenti: l'espansione in caos di Wiener, la derivata di Malliavin, l'integrale di Skorohod e la derivata di Malliavin della soluzione di una E.D.S. I testi di riferimento sono il libro di Nualart [17], il suo corso tenuto a St. Flour [18] e le dispense di Øksendal [19].

Nel Capitolo 4 dimostriamo le formule di rappresentazione delle derivate direzionali del funzionale u , riprendendo il lavoro di Fournié, Lasry, Lebuchoux, Lions e Touzi [6].

Nel Capitolo 5 affrontiamo dapprima alcune questioni di carattere finanziario, come il problema della copertura e del prezzo delle opzioni. Mostriamo quindi il legame tra le greche e le derivate dell'aspettazione di opportuni funzionali della soluzione di una E.D.S., dando un esempio di applicazione delle formule di rappresentazione trovate nel Capitolo 4. Infine, a titolo di esempio, specializzeremo al modello di Black e Scholes. I principali testi di riferimento di questo capitolo sono i lavori di Fournié, Lasry, Lebuchoux, Lions [6], [7], [8], Lamberton e Lapeyre [15] e Runggaldier [22].

Riferimenti bibliografici

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] P. Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni, seconda edizione*. Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, n.28. Pitagora-U.M.I., Bologna, 2000.
- [3] P. Baldi. *Calcolo delle probabilità e statistica, seconda edizione*. McGraw-Hill, 1998.
- [4] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson Editeur, Paris, 1983.
- [5] L. Chierchia. *Lezioni di Analisi II*. Aracne editore, 1996.
- [6] E. Fournié, J.M. Lasry, J.Lebuchoux, P.L. Lions, N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance and Stochastics* **3**, pp. 391–412, 1999.
- [7] E. Fournié, J.M. Lasry, J.Lebuchoux, P.L. Lions. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. Preliminary version, 1998.
- [8] E. Fournié, J.M. Lasry, J.Lebuchoux, P.L. Lions. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. II. *Finance and Stochastics* **5**, pp. 201–236, 2001.
- [9] J.M. Harrison, S.R. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. *Stochastic Processes and their Applications* **15**, pp. 313–316, 1983.
- [10] J.M. Harrison, S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications* **11**, pp. 215–260, 1981.
- [11] K. Ito: Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan* **3**, pp. 157–169, 1951.
- [12] N. Ikeda e S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Second edition*. North Holland, 1989.
- [13] I. Karatzas e S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus. Second edition*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

- [14] P.E. Kloeden e E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability n.23. Springer, 1991.
- [15] D. Lamberton e B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman-Hall. London, 1996.
- [16] E.H. Lieb e M. Loss. *Analysis* in Graduate Studies in Mathematics, vol 14. American Mathematical Society, 1997.
- [17] D. Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [18] D. Nualart. *Analysis on Wiener space and Anticipating stochastic calculus*. Lectures on Probability theory and Statistics, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint Flour XXV, 1995 (P. Bernard Ed.)-Lectures Notes in Mathematics 1690. Springer, 1995.
- [19] B. Øksendal. *An introduction to Malliavin calculus with applications to economics*. Dept. of Mathematics, University of Oslo, 1997.
- [20] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations, an Introduction with Applications*. Fourth Edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [21] Ph. Protter. *Stochastic integration and differential equations. A new approach*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [22] W. Runggaldier. Aspetti matematico-probabilistici di nuove problematiche in Finanza. Bollettino U.M.I. (7) **10-A**, pp. 19–36, 1996.
- [23] P. Wilmott. *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*. University Edition, 1998.

Bibliografia supplementare

- [24] M. Broadie, P. Glasserman. Estimating security price derivatives using simulation, *Manag. Sci.* **42**, pp. 269–285, 1996.
- [25] P. Glasserman, D.D. Yao. Some guidelines and guarantees for common random numbers, *Manag. Sci.* **38**, pp. 884–908, 1992.
- [26] P.W. Glynn. Optimization of stochastic systems via simulation. Proceedings of the 1989 Winter simulation Conference. Dan Diego: Society for Computer Simulation, pp. 90–105, 1989.
- [27] P. L'Ecuyer, G. Perron. On the convergence rates of IPA and FDC derivative estimators, *Oper. Res.* **42**, pp. 643–656, 1994.