UNIVERSITA' DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTA' DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

di

Cristiano Di Giovambattista

Sul Prezzaggio di Obbligazioni a Rischio di Fallimento con un Modello Regime Switching

Relatore

Prof. Alessandro Ramponi

ANNO ACCADEMICO 2003 - 2004

Luglio 2004

Classificazione AMS: 90C40, 91B99, 60G35.

Parole chiave: Rischio di credito, titoli obbligazionari, regime switching.

Le obbligazioni sono titoli rappresentativi di un rapporto di credito tra un emittente (debitore) ed un investitore (creditore). Sono emessi da società, Stati, enti etc.., per raccogliere fondi presso il pubblico dei risparmiatori per un periodo di tempo predefinito e ad uno specifico tasso di interesse.
Elemento fondamentale di un titolo obbligazionario è l'interesse riconosciuto al possessore del titolo, a remunerazione del prestito operato.
Tale remunerazione può essere effettuata sotto forma di pagamento di flussi cedolari nel corso della vita del titolo e/o di rimborso di una somma superiore al capitale iniziale investito.
Le obbligazioni con cedola prevedono solitamente il pagamento di somme di denaro ad intervalli regolari (es. ogni sei/dodici mesi); è possibile peraltro avere cedole corrisposte ad intervalli irregolari o in unica soluzione alla scadenza (cosiddette obbligazioni "one-coupon") unitamente al rimborso del capitale.
Le obbligazioni senza cedola vengono chiamate *zero coupon bond* e gli interessi vengono percepiti come differenza fra il prezzo di rimborso (generalmente pari al valore nominale del titolo) ed il prezzo di emissione più basso. Possono emettere obbligazioni Stati sovrani, enti locali, società private, istituzioni sovranazionali. Il rischio principale associato al possesso del titolo obbligazionario è il cosiddetto rischio di insolvenza, ovvero il rischio che la controparte in posizione debitoria non faccia fronte interamente e nei tempi stabiliti ai propri impegni contrattuali, quali il pagamento degli interessi delle eventuali cedole e il rimborso del capitale. Le obbligazioni emesse da imprese private o da governi di Paesi finanziariamente deboli presentano in

generale un rischio di insolvenza e/o di credito non trascurabile. Più è elevato il rischio di credito maggiore deve essere il rendimento offerto dai titoli obbligazionari al fine di attrarre gli investitori.
Altro elemento distintivo di un prestito obbligazionario è la scadenza: più lontana è la scadenza, più lungo è il prestito e quindi più ritardato nel tempo il recupero del capitale. Maggiore di conseguenza è il rischio, in quanto è più difficile prevedere l'andamento dei "fondamentali "economico/finanziari dell'emittente se per esempio, l'obbligazione verrà rimborsata tra 10 anni invece che tra uno o due. Il rendimento percepito dalle obbligazioni a scadenza più lunga pertanto, è in generale più elevato di quello percepito dalle obbligazioni a breve scadenza.
Volendo essere più specifici richiamiamo qui nel seguito le quattro tipologie di rischio a cui sono esposti i possessori di titoli obbligazionari:

1. *Rischio di credito.* E' il rischio, come detto precedentemente, legato alla possibilità che l'emittente non sia solvibile, ovvero non sia in grado di far fronte al pagamento degli interessi e/o al rimborso del capitale.

2. *Rischio di inflazione.* Quando un certo ciclo economico porta ad un aumento dei prezzi, anche i titoli obbligazionari possono risentirne. Infatti se il tasso di inflazione aumenta, la ricchezza detenuta oggi varrà meno in futuro e l'ammontare immobilizzato in un titolo obbligazionario viene di fatto eroso. Se ci sono aspettative per un aumento del tasso di inflazione, i prezzi dei titoli obbligazionari tenderanno a scendere favorendo chi li deve ancora acquistare, ma non chi li possiede già.

3. *Rischio di tasso di interesse.* E' il rischio di variazioni dei tassi di

interesse di mercato che influiscono sul prezzo del titolo.

La reattività del prezzo di un titolo obbligazionario alla variazione dei tassi di interesse viene definita sensitività.

4. *Rischio di rimborso anticipato.* Alcune volte le obbligazioni possono prevedere la possibilità di essere "richiamate" dal loro emittente, il quale può avere interesse a ritirarle, ad esempio, nel caso di discesa dei tassi di interesse, per potersi rifinanziare a tassi più bassi.

   L'investitore, in questo caso, subisce una perdita se ha acquistato il titolo ad un prezzo maggiore rispetto al suo valore nominale e comunque è costretto a reinvestire in attività a tassi più bassi.

Nel valutare il rischio di credito di un emittente, attuale e potenziale, può venire in aiuto il *rating*, una valutazione della situazione economica e finanziaria del debitore, espressa in forma sintetica mediante l'uso di lettere, fornita da società specializzate quali ad esempio, Moody's e Standard & Poor. Esse fondano il proprio giudizio sull'analisi dei bilanci aziendali e delle prospettive dell'azienda, alla luce anche dello scenario economico sottostante. La classificazione delle obbligazioni parte dal punteggio di massima affidabilità AAA e procede con AA, A e BBB (secondo un ordine decrescente). Seguono poi BB, B, CCC, CC che corrispondono a un giudizio di bassa qualità riferito al debito. L'ultimo stato, D, rappresenta il fallimento, cioè il caso di insolvenza nei confronti del creditore.
Una misura alternativa del rischio di credito di un'impresa è rappresentata dallo *spread*, dato dalla differenza tra il tasso di interesse che essa paga sul proprio debito e il tasso di interesse su un titolo privo di rischio, quale ad esempio un titolo del debito pubblico.

La differenza di rendimento fornisce un'indicazione del premio richiesto dal mercato obbligazionario o dalle banche per prestare denaro ad una società che potrebbe fallire e riflette quindi la probabilità attribuita all'evento che il prestito non venga restituito.
Uno dei principali e più recenti temi della matematica finanziaria consiste nello sviluppo di modelli matematici per i prezzi di prodotti obbligazionari che tengano esplicitamente in considerazione il rischio di credito.
Descriviamo quindi in questa Tesi due tra i più importanti modelli di rischio di credito, i modelli strutturali e i modelli ridotti, per poi sviluppare, nell'ambito di questi ultimi, un modello per il prezzo di obbligazioni prive di cedole aventi le caratteristiche seguenti:

(a) il prezzo viene determinato utilizzando l'andamento aleatorio del tasso a breve (modello ad un fattore);

(b) la dinamica del tasso è di tipo diffusivo ed incorpora un meccanismo di "switching" tra due prefissati livelli.

Di recente [4] modelli aventi le caratteristiche (a) e (b) sono stati proposti per il prezzaggio di zero coupon bonds senza rischio di fallimento.

Nel primo capitolo di questa Tesi illustriamo i differenti modelli per la valutazione del prezzo di un bond rischioso. Analizziamo inizialmente il modello di Merton (1974) il cui approccio si fonda sul lavoro di Black e Scholes (1973) per la determinazione dei prezzi delle opzioni; quindi studiamo due classi di modelli in particolare: i modelli strutturali e i modelli ridotti.
I primi generalizzano il modello di Merton, nel quale il tasso di rendimento offerto dal mercato veniva assunto costante durante il periodo di vita

dell'obbligazione. La generalizzazione consiste nell'assumere che il tasso a breve r, non più costante, abbia un andamento descritto dalla soluzione di un'equazione differenziale stocastica di tipo diffusivo:

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \tag{1}$$

dove W_t rappresenta un moto browniano standard.
I modelli ridotti invece differiscono completamente dai modelli strutturali. Tali modelli, infatti, studiano in particolare, la possibilità che l'emittente di un titolo obbligazionario possa fallire prima della scadenza del prestito. Il fallimento viene considerato una variabile aleatoria e si assume che la probabilità di fallimento in ogni intervallo di tempo sia diversa da zero. Il $default$ (fallimento) è governato da processi di salto, come ad esempio i processi di Poisson o di Cox: esso scatta quando il processo compie il primo salto.

Definizione 1. *Consideriamo lo spazio di probabilità filtrato* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. *Sia* $N = (N_t)_{t\geq 0}$ *un processo di conteggio non esplosivo di intensità* λ_t *adattato ad una filtrazione* $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}$ *tale che* $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. $N = (N_t)_{t\geq 0}$ *è detto* ***processo di Cox****, o doppiamente stocastico, associato alla filtrazione* $\{\mathcal{G}_t : t \geq 0\}$*, se* λ_t *è* $(\mathcal{G}_t)-$*predicibile e se, per ogni tempo* t *e per ogni* $s > t$*, condizionato alla* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_s$ *(generata da* $\mathcal{F}_t \cup \mathcal{G}_s$*), l'incremento* $N_s - N_t$ *si distribuisce come una Poisson di parametro* $\int_t^s \lambda(u)du$*, ovvero*

$$\mathbb{P}[N_s - N_t = k | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_s] = e^{-\int_t^s \lambda(u)du} \frac{(\int_t^s \lambda(u)du)^k}{k!}$$

per $k = 0, 1, \ldots, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *e* $N_0 = 0$.

Tra i modelli ridotti analizziamo nel dettaglio il lavoro di Lando che consente di determinare esplicitamente il prezzo di un bond a rischio di default. Denotiamo con $P(t,T)$ il prezzo di un'obbligazione esente da rischio che paga X Euro alla scadenza $T \leq t$. Allora è possibile dimostrare sotto ipotesi di assenza di arbitraggio (si veda l'Appendice B) che

$$P(t,T) = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[X \cdot e^{-\int_t^T r(u)du} \,|\, \mathcal{G}_t \right]$$

dove $r(u)$ è il tasso a breve, $e^{-\int_t^T r(u)du}$ è il fattore di sconto, $\mathcal{G}_t$ è la σ-algebra che rappresenta le informazioni di mercato relative all'arco di tempo $[0,t]$ e $\mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}$ è l'aspettazione condizionata sotto la misura neutrale al rischio $\mathbb{Q}$. In [8], Lando descrive il fallimento mediante un processo di Cox, ovvero un processo di Poisson con intensità stocastica, da cui deriva il prezzo di un'obbligazione rischiosa, che indichiamo con $P^d(t,T)$.

Teorema 1. ***(ref.[8])*** *Consideriamo lo spazio di probabilità filtrato* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, *con* $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \cup \mathcal{H}_t$ *e* $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ *variabile aleatoria* $\mathcal{G}_t$ *misurabile (X rappresenta la promessa di pagamento a maturità T fissata se non vi è stato fallimento prima del tempo T). Sia* r_t *il tasso a breve* $\mathcal{G}_t-$*adattato per ogni* $t \geq 0$. *Allora, assumendo che l'aspettazione di* $\boldsymbol{E}[X]$ *sia finita, vale la seguente identità:*

$$\boldsymbol{E}\left[e^{-\int_t^T r_u du} 1_{\{\tau>T\}} X \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = 1_{\{\tau>t\}} \boldsymbol{E}\left[e^{-\int_t^T (r_u+\lambda_u)du} X \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right]. \tag{2}$$

Corollario 1. *Consideriamo lo spazio di probabilità filtrato, neutrale al rischio,* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$. *Sotto le ipotesi del Teorema 1 si ha che il prezzo di uno zero coupon bond rischioso, nel caso di zero-recovery, è dato da*

$$P^d(t,T) = 1_{\{\tau>t\}} \boldsymbol{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T (r_u+\lambda_u^{\mathbb{Q}})du} X \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right]. \tag{3}$$

dove $\lambda_u^{\mathbb{Q}}$ *è l'intensità del processo di Cox considerata rispetto alla misura neutrale al rischio* $\mathbb{Q}$ *e* $1_{\{\tau>t\}}$ *è la variabile aleatoria che vale 1 nel caso di fallimento dopo il tempo t e 0 altrimenti.*

Nel secondo capitolo descriviamo l'estensione del modello di Lando al caso di bonds rischiosi in cui è esplicitata la relazione che lega il rischio di credito alla classe di rating che è assegnata ad ogni bond.
Le possibili transizioni di rating sono descritte attraverso una catena di Markov a tempo continuo $R = \{R_t : 0 \leq t \leq T\}$ con spazio degli stati finito $E = \{1, 2, ..., K\}$. Lo spazio degli stati E corrisponde alle rispettive classi di rating: la 1 equivale alla classe migliore, cioè AAA, $K-1$ a quella peggiore (con rating più basso) e l'ultimo stato, K, corrispondente alla classe D, rappresenta il fallimento. Dapprima studiamo il caso in cui il modello di Lando può essere riformulato come una catena di Markov con intensità aleatoria e due sole classi di rating (K=2): sopravvivenza e fallimento. Quindi generalizziamo il modello a K classi di rating ottenendo in tal modo il prezzo di un'obbligazione a rischio di default emessa da un'istituzione finanziaria appartenente ad una determinata classe di rating.
Concludiamo il capitolo con una applicazione: scriviamo esplicitamente il prezzo di uno zero coupon bond rischioso emesso da una società avente rating creditizio $i \in E$, nel caso in cui il tasso a breve sia governato dal classico modello di Vasicek definito, prendendo in (1)

$$\mu(t, r_t) = k(\theta - r_t) \quad \text{e}$$

$$\sigma(t, r_t) = \sigma \text{ costante,}$$

dall'equazione

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

dove k, θ sono parametri costanti e $W_t^{\mathbb{Q}}$ è un moto browniano standard sotto la misura neutrale al rischio. In tale caso infatti, è possibile ottenere esplicitamente il prezzo di uno zero coupon bond $P_V(t,T)$ nel caso in cui l'intensità di fallimento λ dipenda dal tasso a breve r come

$$\lambda_j^{\mathbb{Q}}(r_s) = -\gamma_j - \kappa_j r_s, \quad j = 1, \ldots, K-1$$

con γ e κ costanti.

Nel terzo ed ultimo capitolo di questa Tesi introduciamo un modello regime switching. Tale modello è stato proposto in [4] ed utilizzato per determinare il prezzo di un titolo obbligazionario in assenza di rischio di fallimento. In particolare il processo che modellizza il tasso a breve è un processo di Vasicek in cui il parametro θ può assumere due differenti stati o "regimi", con $\theta^H > \theta^L$ per convenzione. I cambi di regime sono governati da un processo di Poisson.

Proposizione 1. ***(ref.[4])*** *Assumiamo che esista un'unica misura di martingala equivalente $\mathbb{Q}$; in particolare non esistono opportunità di arbitraggio. Assumiamo inoltre che esista un processo di Wiener $W_t^{\mathbb{Q}}$ e un processo di Poisson $N_t^{\mathbb{Q}}$, indipendente da $W_t^{\mathbb{Q}}$, con intensità $\lambda^{\mathbb{Q}}$. Allora le $\mathbb{Q}$-dinamiche del processo di tasso a breve $r(t)$ sono date da:*

$$dr(t) = k(\theta(t) + \sigma\lambda(t)/k - r(t))dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t), \tag{4}$$

con k, $\sigma > 0$ e

$$d\theta(t) = (\theta^H - \theta^L)(1_{\{\theta(t)=\theta^L\}} - 1_{\{\theta(t)=\theta^H\}})dN^{\mathbb{Q}}(t) \tag{5}$$

dove $\theta(t) \in \{\theta^L, \theta^H\}$.

Proposizione 2. ***(ref.[4])*** *Sia* $r(0) = r_0,\ \theta(0) = \theta_0 \in \{\theta^L, \theta^H\}$ *e* A *l' insieme di numeri dispari. Il tasso a breve può essere scritto come*

$$r(t) = a(t) + b(t) + c(t)$$

dove

$$a(t) = r_0 e^{-kt} + k\int_0^t e^{-k(t-s)}\theta_0 ds + \sigma\int_0^t e^{-k(t-s)} dW^{\mathbb{Q}}(s),$$

$$b(t) = \begin{cases} k(\theta^H - \theta^L)\int_0^t e^{-k(t-s)} 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} ds & se\ \theta_0 = \theta^L \\ k(\theta^L - \theta^H)\int_0^t e^{-k(t-s)} 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} ds & se\ \theta_0 = \theta^H \end{cases}$$

e

$$c(t) = \sigma\int_0^t e^{-k(t-s)}\lambda(s) ds.$$

In particolare $a(t)$ *è indipendente da* $b(t)$ *e*

$$a(t) \sim N\left(\theta_0 + e^{-kt}(r_0 - \theta_0),\ \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})\right).$$

Nel modello regime switching osserviamo come il prezzo di uno zero coupon bond dipenda da due quantità distinte: una componente di "Vasicek", che corrisponde al prezzo di un'obbligazione nel modello di Vasicek tradizionale e una componente di "salto": infatti si può dimostrare [4] che vale:

Proposizione 3. ***(ref.[4])*** *Sia* $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0 \in \{\theta^L, \theta^H\}$ *e* A *l'insieme dei numeri dispari. Allora il prezzo di uno zero coupon bond a scadenza* T *equivale a*

$$P(0, T|r_0, \theta_0) = P_V^{\theta_0}(r_0, 0, T)\exp\left(-\int_0^T c(s)ds\right) h(\theta_0, T)$$

dove $P_V^{\theta_0}(r_0, t, T)$ *denota il prezzo di uno zero coupon bond in un modello di Vasicek, con* θ *come livello verso cui tende il tasso a breve, ed è dato esplicitamente da*

$$P_V^{\theta_0}(r_t, t, T) = \exp(m(\theta, t, T) - r_t n(t, T))$$

dove m e n sono le funzioni definite sopra.

Il rapporto dei prezzi del bond immediatamente prima e dopo un salto è

$$\begin{aligned}\frac{P(0,T|r_0,\theta^L)}{P(0,T|r_0,\theta^H)} &= \frac{h(\theta^L,T)}{h(\theta^H,T)} \\ &= \frac{\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-k(\theta^H-\theta^L)\int_0^T\int_0^t e^{-k(t-s)}1_{\{N_s^{\mathbb{Q}}\in A\}}dsdt)\right)\right)}{\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-k(\theta^L-\theta^H)\int_0^T\int_0^t e^{-k(t-s)}1_{\{N_s^{\mathbb{Q}}\in A\}}dsdt)\right)\right)}.\end{aligned}$$

Per cui i prezzi di un bond al tempo 0 e al tempo t in tale modello a salti, sono dati rispettivamente da

$$P(t,T|r_0,\theta_0) = P_V^{\theta_0}(r(t),t,T)\exp\left(-\int_t^T c(s)ds\right)h(\theta_0,T-t) \qquad (6)$$

e

$$P(t,T|r_t,\theta_t) = P_V^{\theta(t)}(r(t),t,T)\exp\left(-\int_t^T c(s)ds\right)h(\theta(t),T-t). \qquad (7)$$

Il prezzo così ottenuto non può essere esplicitamente valutato per la presenza del termine $h(\theta(t),T-t)$. Descriviamo quindi un metodo numerico (noto come algoritmo di *backward induction*) proposto da [4] e ne dimostriamo la convergenza.

Infine generalizziamo tale risultato in modo utile a determinare il prezzo di un'obbligazione rischiosa emessa da una società in classe di credito i

$$P_i^d(t,T,\tilde{r}_t,\tilde{\theta}(t)) = \sum_{j=1}^{K-1}\beta_{ij}\, e^{\int_t^T\gamma_j\,ds}\, P_V^{\tilde{\theta}(t)}(\tilde{r}(t),t,T)e^{-\int_t^T\tilde{c}(s)ds}h(\tilde{\theta}(t),T-t)$$

e il relativo spread creditizio

$$s_i(r_t) \equiv \lim_{T\to t}\left(-\frac{\partial}{\partial T}\log\, P_i^d(t,T)\right) - r_t.$$

Nell'ultima parte di questa Tesi utilizziamo un modello di tipo regime switching anche per l'intensità di fallimento λ, la cui espressione diviene:

$$\lambda_j^{\mathbb{Q}}(r_s) = -\gamma_j(t) - \kappa_j(t)r_s, \quad j=1,\ldots,K-1$$

nella quale

$$d\gamma(t) = (\gamma^H - \gamma^L)(1_{\{\gamma(t)=\gamma^L\}} - 1_{\{\gamma(t)=\gamma^H\}})dN^{\mathbb{Q}}(t)$$

e

$$d\kappa(t) = (\kappa^H - \kappa^L)(1_{\{\kappa(t)=\kappa^L\}} - 1_{\{\kappa(t)=\kappa^H\}})dN^{\mathbb{Q}}(t)$$

con

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\in \{\gamma^L, \gamma^H\} \\ \kappa(t) &\in \{\kappa^L, \kappa^H\}. \end{aligned}$$

In questo caso la formula alla quale si perviene è data dall'equazione

$$\begin{aligned} P_i^d(t, T, r_t, \gamma_t, \tilde{\kappa}_t) &= \sum_{j=1}^{K-1} \beta_{ij}\, e^{(T-t)\gamma_j^L} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \Bigg[e^{\int_t^T (\gamma_j^H - \gamma_j^L) 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} ds} \\ &\times \ \exp\Bigg(- \int_t^T \Big(\tilde{\kappa}_j^L a(s) + \tilde{\kappa}_j^L b(s) \\ &+ \ \tilde{\kappa}_j^L c(s) + r_0 e^{-ks} (\tilde{\kappa}_j^H - \tilde{\kappa}_j^L) 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} \\ &+ \ k(\tilde{\kappa}_j^H - \tilde{\kappa}_j^L) 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} \theta^L \int_0^s e^{-k(s-u)} du \\ &+ \ (\tilde{\kappa}_j^H - \tilde{\kappa}_j^L) 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} \sigma \int_0^s e^{-k(s-u)} \lambda(u) du \\ &+ \ \sigma(\tilde{\kappa}_j^H - \tilde{\kappa}_j^L) 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}} \int_0^s e^{-k(s-u)} dW^{\mathbb{Q}}(u) \\ &+ \ k(\tilde{\kappa}_j^H - \tilde{\kappa}_j^L) 1_{\{N_s^{\mathbb{Q}} \in A\}}\ (\theta^H - \theta^L) \int_0^s e^{-k(s-u)} 1_{\{N_u^{\mathbb{Q}} \in A\}} du \Big) ds \Bigg) \,\Bigg|\, \mathcal{G}_t \Bigg], \end{aligned}$$

che rappresenta il prezzo di un titolo obbligazionario emesso da un'istituzione finanziaria avente rating i nel caso in cui sia il tasso a breve che l'intensità di fallimento siano modellizzati attraverso un processo regime switching.

Bibliografia

[1] T. Bjork. *Arbitrage Theory in Continuos Time.* Oxford, 2000.

[2] P. J. Schonbucher. *The Pricing of Credit Risk and Credit Risk Derivatives.* University of Bonn, 2000.

[3] John C. Hull. *Opzioni, futures e altri derivati.* Il Sole 24 ore, 1997.

[4] A. T. Hansen, R. Poulsen. *Finance and Stochastics.* Springer-Verlag, 1999.

[5] P. Brémaud. *Point Processes and Queues.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[6] D. C. Shimko, N. Tejima, D. R. Van Deventer. *The Pricing of Risky Debt when Interest Rates are Stochastic.* The Journal of Fixed Income, 1993.

[7] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, 1992.

[8] D. Lando. *On Cox Processes and Credit Risky Securities.* University of Copenhagen, 1998.

[9] D. Duffie, K. Singleton. *Modelling Term Structures of Defaultable Bonds.* Review of Financial Studies, 1999.

[10] C. Mari. *Applicazione dei modelli ridotti alla gestione del rischio di credito.* Università di Pescara, 2001.

[11] S. Nandi. *Valuation Models for Default Risky Securities: An Overview.* Economic Review, 1998.

[12] B. Huge. *On Defaultable Claims and Credit Derivatives.* University of Copenhagen, 2001.

[13] A. Jarrow, D. Lando, Fan Yu. *Default Risk and Diversification: Theory and Applications.* Cornell University, University of Copenhagen, University of California, 1999.

[14] D. Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.

[15] G. R. Grimmett, D. R. Stirzaker. *Probability and Random Processes.* Oxford University Press, 1992.