Analisi complessa su superfici di Riemann

Sintesi della tesi di laurea di Federica Gari

Professore Relatore: Edoardo Sernesi

Nella tesi si da un'esposizione, completa di dimostrazioni, di alcuni importanti teoremi classici di analisi complessa sulle superfici di Riemann. I risultati considerati sono essenzialmente tre: il teorema dell'applicazione di Riemann, il teorema di esistenza di Riemann ed il teorema di uniformizzazione per superfici semplicemente connesse.

Il teorema dell'applicazione di Riemann afferma che un aperto $U \subset \mathbb{C}$ semplicemente connesso, che non sia tutto il piano, è analiticamente isomorfo al disco unitario D. Analogamente si può affermare che due aperti semplicemente connessi, diversi dal piano, sono conformemente equivalenti.

Dimostreremo poi che su ogni superficie di Riemann compatta e connessa esistono funzioni meromorfe non costanti, e cioè proporremo una dimostrazione del teorema di esistenza di Riemann basata sulla teoria delle forme differenziali.

Infine ci occuperemo di classificare le superfici di Riemann semplicemente connesse dividendole in tre gruppi: quelle conformemente equivalenti alla sfera complessa $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, o al disco unitario aperto D o al piano complesso $\mathbb{C}$.

La dimostrazione del teorema dell'applicazione di Riemann consiste dunque nel trovare un isomorfismo tra un aperto $U \subset \mathbb{C}$ ed il disco unitario D. Per fare questo sfrutteremo gli spazi di funzioni olomorfe ed alcune loro proprietà come l'uniforme limitatezza e la relativa compattezza: introdurremo una semplificazione nella dimostrazione del teorema, verificando che è sempre possibile trovare un isomorfismo dell'aperto U con un sottoinsieme aperto del disco. Dimostreremo che esistono applicazioni analitiche iniettive f dell'aperto U nel disco D, e verificheremo che la famiglia Γ di tali applicazioni è relativamente compatta (data una successione in Γ, esiste una sottosuccessione che converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di U).

Considereremo poi la famiglia delle derivate $f'(z_0)$, con $z_0 \in U$, delle applicazioni di Γ, e prenderemo una successione $\{f_n\} \in \Gamma$ tale che $|f_n'(z_0)|$ converga al più grande tra i valori $|f'(z_0)|$. Infine verificheremo che esiste in Γ un particolare elemento f tale che $|f'(z_0)|$ sia massimale.

Avendo trovato un'applicazione $f \in \Gamma$ iniettiva, analitica e tale che $|f'(0)| \geq |g'(0)|$ per ogni $g \in \Gamma$, basterà verificare che f è suriettiva per dimostrare che è l'isomorfismo cercato tra l'aperto U ed il disco D.

Un elemento utile per lo studio delle superfici di Riemann è rappresentato dalle funzioni meromorfe che possiamo costruire su esse. Il nostro obiettivo è quello di dimostrare che ogni superficie di Riemann compatta M ammette funzioni meromorfe non costanti. Il teorema di esistenza di Riemann, come già detto, sfrutta la teoria delle forme differenziali. Ne ricorderemo dunque alcune definizioni di base, quali le nozioni di operatore di coniugazione, di 1 - forma esatta (co-esatta) e chiusa (co-chiusa), e caratterizzeremo, in termini delle precedenti, i differenziali armonici.

Strumenti fondamentali nel corso della dimostrazione del teorema di esistenza di Riemann saranno il Lemma di Weyl e lo spazio di Hilbert delle 1-forme differenziali. Inizieremo con il costruire differenziali armonici su una superficie di Riemann M, aventi una singolarità in un punto $P \in M$: è a tale scopo che introdurremo lo spazio di Hilbert $L^2(M)$ delle 1-forme differenziali a quadrato sommabile, decomponendolo in sottospazi chiusi ortogonali.

Tali sottospazi, che denoteremo E, E^* ed H, conterranno rispettivamente i differenziali esatti, co-esatti e quelli che appartengono all'intersezione degli ortogonali di E ed E^*.

La precedente decomposizione ci permetterà di dimostrare che un differenziale $\omega \in L^2(M)$ è armonico se e soltanto se $\omega \in H$, e questo fatto ci consentirà di determinare la condizione sufficiente per l'esistenza sulla superficie M di differenziali armonici non nulli:

Teorema 1. *Sia M una superficie di Riemann.*
Se ω è un differenziale chiuso a quadrato sommabile non esatto, allora ω è armonico. Esplicitamente, per ogni differenziale chiuso $\omega \in L^2(M)$ esiste un

differenziale $\omega_2 \in H$ *tale che*

$$\int_c \omega = \int_c \omega_2$$

per ogni curva chiusa c *su* M*.*
Se M *è compatta la condizione è anche necessaria.*

Dim. (Cenni)
Sia $\omega \in L^2(M)$ un differenziale chiuso e non esatto. Si può verificare che $\omega \in E^{*\perp} = E \oplus H$, ovvero è possibile esprimere ω nel seguente modo:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dove $\omega_1 \in E \quad \text{e} \quad \omega_2 \in H$.
Dalle ipotesi sappiamo che ω non è esatto e dunque esiste una curva chiusa c tale che

$$\int_c \omega \neq 0.$$

Essendo invece ω_1 un differenziale esatto si ha

$$\int_c \omega_2 = \int_c \omega \neq 0,$$

ovvero $\omega_2 \neq 0$.

Se M è compatta con l'ipotesi che ω è armonico si dimostra che ω è chiuso. Se ω fosse anche esatto allora $\omega = df$ con f funzione armonica, ovvero f sarebbe la parte reale di una funzione olomorfa su M. Poiché M è compatta questa funzione sarebbe costante e quindi ω identicamente nullo.

□

Quindi per costruire differenziali armonici esatti su una superficie di Riemann compatta avremo bisogno di introdurre le singolarità. Ci occuperemo quindi di dimostrare il seguente risultato:

Teorema 2. *Sia* M *una superficie di Riemann e* z *una coordinata locale tale che* $z(P_0) = 0$*, con* $P_0 \in M$*. Allora fissato* $n \geq 1$ *esiste una funzione* u *su* M *che gode delle seguenti proprietà:*

u è armonica in $M \setminus \{P_0\}$.

$u - z^{-n}$ è armonica in ogni intorno sufficientemente piccolo di P_0.

Se M è compatta la funzione u è determinata univocamente a meno di una costante.

Infatti mediante alcune proprietà di integrazione delle 1-forme differenziali, ci occuperemo dapprima di trovare un differenziale armonico con una singolarità nel punto $P \in M$, e quindi di ottenere da questo una funzione armonica sulla superficie di Riemann M, avente naturalmente una singolarità nel punto $P \in M$.

Il secondo passo consisterà nel dimostrare un risultato che garantisce l'esistenza di un differenziale meromorfo (con una singolarità nel punto $P \in M$) sulla superficie M.

Teorema 3. *Sia M una superficie di Riemann, $P \in M$ e z una coordinata locale su M che si annulla in P. Per ogni intero $n \geq 1$, esiste un differenziale meromorfo che risulta essere olomorfo su $M \setminus \{P\}$ ed ha la singolarità $\frac{1}{z^{n+1}}$ in P.*

Dim. (Cenni)
Sia $\alpha = du$, dove u è la funzione armonica determinata nel precedente torema. Vogliamo dimostrare che è possibile scrivere il differenziale α nel seguente modo:

$$\alpha = \omega_1 + \bar{\omega}_2,$$

dove ω_1 e ω_2 sono differenziali olomorfi.
Dimostrato questo, per la definizione di operatore di coniugazione per differenziali rappresentati in notazione complessa, si avrebbe

$$^*\alpha = -i\omega_1 + i\bar{\omega}_2,$$

ovvero

$$\alpha + i^*\alpha = 2\omega_1,$$

con ω_1 differenziale olomorfo. Quindi

$$\omega = -\frac{1}{2n}(\alpha + i^*\alpha)$$

risulterebbe essere un differenziale olomorfo in $M \setminus \{P\}$. $\square$

Concluderemo quindi la dimostrazione del teorema di esistenza di Riemann esprimendo la funzione meromorfa non costante cercata come rapporto di due differenziali meromorfi linearmente indipendenti.

Il teorema di uniformizzazione per superfici di Riemann fornirà una classificazione per le superfici semplicemente connesse che si basa sulla teoria delle funzioni armoniche. Faremo uso di alcune nozioni fondamentali, già introdotte per la dimostrazione del teorema di esistenza di Riemann, e definiremo alcune sottoclassi particolari delle funzioni armoniche: quelle subarmoniche e quelle superarmoniche.

Dimostreremo anche alcune loro proprietà, quali il principio del massimo ed il principio di Perron, ed enunceremo altri risultati di minore importanza. Mediante le funzioni subarmoniche definiremo quindi le superfici di Riemann semplicemente connesse ellittiche, paraboliche ed iperboliche e, sfruttando tale caratterizzazione, ci occuperemo di classificarle.

Definizione 1. *Sia M una superficie di Riemann semplicemente connessa.*

- *Diremo che M è* ellittica *se e soltanto se M è compatta.*
- *M si dirà* parabolica *se e soltanto se M non è compatta e non ammette una funzione subarmonica negativa non costante.*
- *Diremo che M è* iperbolica *se e soltanto se M non è compatta e ammette una funzione subarmonica negativa non costante.*

Sarà utile introdurre una particolare funzione armonica, detta funzione di Green:

Definizione 2. *Sia M una superficie di Riemann e $P \in M$. Una funzione g è detta funzione di Green per la superficie M con una singolarità nel punto P se:*

g è armonica in $M \setminus \{P\}$.

$g > 0$ in $M \setminus \{P\}$.

Se z è una coordinata locale nulla in P, $g(z) + \log|z|$ è armonica in un intorno di P.

Se $\tilde{g}$ è un'altra funzione che soddisfa le precedenti condizioni, allora $\tilde{g} \geq g$.

Indicheremo quindi con $g(P, Q)$ il valore assunto nel punto Q dalla funzione di Green con la singolarità in P.

Dimostreremo quindi che una superficie M è iperbolica se e soltanto se esiste su questa una funzione di Green g. Sfruttando questo risultato dimostreremo il seguente teorema:

Teorema 4. *Una superficie di Riemann M semplicemente connessa e iperbolica è conformemente equivalente al disco unitario D.*

Dim. (Cenni)
Si dimostra che esiste una funzione meromorfa sulla superficie di Riemann M

$$f : M \longrightarrow D,$$

tale che $\log |f| = -g$, dove g è la funzione di Green sulla superficie M. È sufficiente quindi verificare che tale applicazione è iniettiva e suriettiva e che si può estendere ad una funzione olomorfa su tutta la superficie M.

L'applicazione f rappresenterà quindi l'isomorfismo cercato tra la superficie di Riemann M ed il disco unitario D. □

Per quanto riguarda le superfici M semplicemente connesse paraboliche e compatte, verificheremo che *esiste una funzione meromorfa f in M con un polo semplice in un punto $P_0 \in M$ e limitata al di fuori di ogni intorno di P_0*.
Quindi basandoci sulla dimostrazione di tale risultato e sfruttando le funzioni ammissibili (la cui definizione si ottiene proprio dall'enunciato del precedente teorema) e particolari trasformazioni di Moebius, dimostreremo che se M è una superficie di Riemann semplicemente connessa e compatta (rispettivamente parabolica), allora M è conformemente equivalente alla sfera complessa $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (al piano complesso $\mathbb{C}$).

Considereremo infatti una funzione ammissibile

$$F : M \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Se M è compatta allora f è suriettiva, ed essendo ammissibile, possiamo dimostrare che è anche iniettiva. Quindi una superficie di Riemann compatta semplicemente connessa è conformemente equivalente alla sfera complessa $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Se M è parabolica, allora $f(M)$ è la sfera di Riemann privata di almeno un punto. Facendo seguire f da una trasformazione di *Möebius* L, possiamo assumere che

$$L \circ f(M) \subset \mathbb{C}.$$

Se $L \circ f(M) \subsetneqq \mathbb{C}$, allora per il Teorema dell'applicazione di Riemann si avrebbe M iperbolica; dunque se la superficie M è parabolica, è possibile trovare un isomorfismo analitico con il piano complesso $\mathbb{C}$.