UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

SINTESI DELLA TESI DI LAUREA IN MATEMATICA
di

Simonetta Gentili

L'algoritmo di Jacobi-Perron

Relatore

Prof. Andrea Bruno

Anno Accademico 2001-2002
Luglio 2002

Classificazione AMS: 11R27, (11R26), 11A55
Parole chiave: Algoritmo di Jacobi-Perron

Simonetta Gentili è nata a Roma il 31/03/1976.
Ha conseguito il diploma di perito aziendale e corrispondente in lingue estere, sperimentale informatico, presso l'Istituto Tecnico Commerciale XXVIII di Roma nel luglio 1995.
Si è iscritta al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università degli studi "Roma Tre" nell'A.A. 1995/96.
Nell' A.A. 1999-2000 ha svolto attività di assistenza ai due laboratori di informatica presso la Facoltà di Matematica dell'Università degli Studi "Roma Tre", in quanto vincitrice di borsa di collaborazione.

Tesine presentate:

- Le formule per la risoluzione delle equazioni di terzo grado (Prof.ssa Gabelli)
- I fondamenti della geometria secondo D.Hilbert (Prof.ssa Cruciani)

Sintesi

L'espansione di un numero reale in frazione continua semplice è periodico se e soltanto se questo numero è una radice reale di un'equazione quadratica a coefficienti razionali.
Con questo teorema, L.G. Lagrange, matematico italiano di origine francese (Torino, 1736 - Parigi, 1813), riuscì a caratterizzare aritmeticamente le irrazionalità quadratiche. Dopo la scoperta di tale risultato, i matematici, in seguito a vari tentativi, abbandonarono ogni speranza di ricavare ulteriori informazioni sulle proprietà aritmetiche di irrazionali algebrici di grado maggiore, a partire dal mondo delle frazioni continue semplici. Questo problema però continuò ad attrarre l'immaginazione creativa di alcuni matematici che tentarono di generalizzare l'algoritmo di Euclide, con l'intento di ottenere una caratterizzazione delle irrazionalità di grado superiore. Fra essi spicca il nome di C.G.J. Jacobi, matematico tedesco vissuto nella prima metà dell'ottocento (Potsdam, 1804 - Berlino, 1851), il quale formulò un algoritmo che permise di approssimare irrazionalità algebriche di grado > 2. L'algoritmo da lui ideato venne però pubblicato soltanto dopo la sua morte, nel 1869, (vedi [11]) . Si presuppone che le riserve che il matematico ebbe nella rivelazione di questi risultati fossero dovute alle difficoltà che egli stesso incontrò nel trattare la periodicità dell'algoritmo.
Consideriamo l'algoritmo delle frazioni continue; in sintesi partendo da $x \in \mathbb{R}$ si riproduce una successione infinita a_n tale che

$$a_i = b_i + \frac{1}{a_{i+1}}, \tag{0.1}$$

dove $b_i = [a_i]$ per ogni i e $b_0 = [x]$.
L'algoritmo di Jacobi è articolato essenzialmente nella seguente maniera: si parte con una terna di numeri reali u_0, v_0, w_0; si generano nuove terne di

numeri tramite le seguenti formule definite ricorsivamente:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= v_i - l_i u_i, \\ v_{i+1} &= w_i - m_i u_i, \\ w_{i+1} &= u_i, \\ \text{per} \quad & i = 0, 1, \ldots;\ l_0 = l;\ m_0 = m; \quad l, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Questa è la versione omogenea dell'algoritmo; la versione non omogenea, quella da noi adottata, è la seguente:

$$\frac{v_{i+1}}{u_{i+1}} = \frac{\dfrac{w_i}{u_i} - m_i}{\dfrac{v_1}{u_i} - l_i}, \quad \frac{w_{i+1}}{u_{i+1}} = \frac{1}{\dfrac{v_1}{u_i} - l_i}.$$

Ponendo

$$\frac{v_i}{u_i} =: a_1^{(i)}, \quad \frac{w_i}{u_i} =: a_2^{(i)}, \quad l_i =: b_1^{(i)}, \quad m_i =: b_2^{(i)}, \quad u_0 = 1, \quad i \geq 0,$$

l'algoritmo di Jacobi prende la forma

$$a_1^{(i+1)} = \frac{a_2^{(i)} - b_2^{(i)}}{a_1^{(i)} - b_1^{(i)}}, \quad a_2^{(i+1)} = \frac{1}{a_1^{(i)} - b_1^{(i)}}.$$

Jacobi prese u_0, v_0, w_0 interi algebrici di terzo grado e cercò di dimostrare che per tale scelta della terna iniziale l'algoritmo su descritto è periodico. Questo sarebbe stato una generalizzazione immediata del teorema di Lagrange, in quanto per espansioni binarie, partendo soltanto con i valori iniziali u_0, v_0, si ha

$$a_1^{(i+1)} = \frac{1}{a_1^{(i)} - b_1^{(i)}} \Rightarrow a_1^{(i)} = b_1^{(i)} + \frac{1}{a_1^{(i+1)}}, \tag{0.2}$$

che è proprio l'algoritmo di Euclide se $b^{(i)} = \left[a^{(i)}\right]$.
Egli dimostrò che se l'algoritmo non omogeneo di 2 numeri reali diventa periodico, allora tali numeri appartengono ad un campo numerico algebrico di grado ≤ 3, ma non riuscì a stabilire se, preso un insieme di irrazionali algebrici, il suo algoritmo diventasse periodico o meno. Presentò comunque alcuni esempi di irrazionalità con sviluppo periodico:

$$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \quad 1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \quad 1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25}.$$

Il lavoro di Jacobi non fu tenuto in grande considerazione fino agli inizi del ventesimo secolo, quando O. Perron, (Frankethal, 1880 - Monaco di Baviera,

1975), nel 1907 pubblicò un articolo ([18]) in cui rivide l'algoritmo, mettendone in luce le innumerevoli applicazioni. Primo e principale merito di Perron fu quello di generalizzare ad una dimensione qualsiasi l'algoritmo di Jacobi, liberandolo dal suo isolato cubismo; secondo fondamentale apporto fu la sua analisi della convergenza dell'algoritmo in analogia con la convergenza di una frazione continua, ma rapportata alla dimensione n-esima. Egli concesse inoltre molto spazio all'importanza che l'equazione caratteristica, (cioè quell'equazione di grado $n+1$ le cui radici generano il campo numerico algebrico al quale appartengono le componenti della n-upla iniziale), ha per l'algoritmo. La riducibilità di questa equazione è infatti un nodo cruciale nell'analisi della periodicità. Perron provò che l'algoritmo non diventa periodico se le componenti della n-upla iniziale sono linearmente dipendenti, ma non fu in grado di dare condizioni sufficienti per la periodicità.
Il contributo di Perron alle analisi di Jacobi risultò fondamentale; per questo motivo l'algoritmo prese il nome di **Algoritmo di Jacobi-Perron**.
L'Algoritmo di Jacobi-Perron sarà l'oggetto del nostro studio che verrà articolato nel seguente modo.

Nel primo capitolo forniremo le nozioni di base sulla teoria della frazioni continue, osserveremo che esse sono uno strumento adatto a fornire una buona caratterizzazione dei numeri razionali; in particolare, dato $x \in \mathbb{R}$, esso ha sviluppo in frazione continua finito se e soltanto se è razionale, mentre ha sviluppo infinito se e soltanto se è irrazionale. Mostreremo l'equivalenza tra l'algoritmo delle frazioni continue e l'algoritmo euclideo e dimostreremo il seguente teorema dovuto a Lagrange:

Teorema 1. *L'espansione di un numero reale in frazione continua semplice è periodico se e soltanto se questo numero è una radice reale di un'equazione quadratica a coefficienti razionali.*

Dimostreremo in realtà qualcosa di più: è possibile caratterizzare fra tutte le irrazionalità quadratiche quelle con sviluppo in frazione continua puramente periodico.
Tratteremo nei dettagli le irrazionalità quadratiche ed approfondiremo in particolar modo la connessione esistente tra il loro sviluppo in frazione continua semplice e gli elementi invertibili dell'anello degli interi dell'ampliamento algebrico di grado 2 su $\mathbb{Q}$ da esse generato. Questo risultato è racchiuso nel seguente teorema:

Teorema 2. *Sia α un numero ridotto in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, tale che $D(\alpha) = D$, dove D è il discriminante del campo $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Sia k il periodo della frazione continua* *di α. Assumendo:*

$$v = MCD(q_{k-1}, p_{k-1} - q_{k-2}, p_{k-2}), \qquad u = p_{k-1} + q_{k-2},$$

dove $\dfrac{p_k}{q_k}$ è il k-esimo convergente dello sviluppo in frazione continua di x, allora

$$w = \frac{u + \sqrt{D}v}{2}$$

è un elemento invertibile > 1 dell'anello degli interi di $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ e ogni altro elemento invertibile > 1 è di questo tipo. Si ha inoltre che

$$N(w) = (-1)^k.$$

Nel secondo capitolo passeremo all'argomento vero e proprio di questa tesi. Definiremo l'algoritmo di Jacobi-Perron e ne studieremo la convergenza. Per $n \geq 2$ sia E^{n-1} lo spazio vettoriale euclideo di dimensione $n-1$ composto da $n-1$-uple di numeri reali.
Scriveremo che $a^{(k)} \in E^{n-1}$ se $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)})$ con $a_i^{(k)}$ reali per ogni $i = 1, \dots, n-1$ e $k > 0$.

Definizione 1.

$$\begin{array}{rll} \textit{Sia } T: & E^{n-1} & \longrightarrow E^{n-1} \textit{ una trasformazione .} \\ \textit{Sia } f: & E^{n-1} & \longrightarrow E^{n-1} \textit{ una funzione vettoriale tale che} \\ & a^{(k)} & \longmapsto f(a^{(k)}) = b^{(k)} = (b_1^{(k)}, \dots, b_{n-1}^{(k)}). \end{array}$$

*Diremo che f è una **T-funzione** oppure **funzione associata a T** se f è tale che*

$$a_1^{(k)} \neq b_1^{(k)}$$

$$Ta^{(k)} = (a_1^{(k)} - b_1^{(k)})^{-1}(a_2^{(k)} - b_2^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)} - b_{n-1}^{(k)}, 1) \;\; \textit{per} \;\; k \geq 0.$$

Definizione 2. *Una successione $\langle a^{(k)} \rangle_{k \geq 0} = a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(k)}, \dots$ di vettori di E^{n-1} é chiamata **algoritmo di Jacobi-Perron per il vettore $\mathbf{a^{(0)}}$** se esiste una trasformazione $T: E^{n-1} \longrightarrow E^{n-1}$ tale che*

$$\forall k \quad Ta^{(k)} = a^{(k+1)}$$

Un algoritmo di Jacobi-Perron è quindi una successione di vettori ottenuti da un vettore iniziale applicando successivamente una trasformazione T che permette di trovare ogni vettore a partire dal precedente.
Più brevemente denoteremo tale algoritmo con **JPA**.

Le componenti del vettore $a^{(k)}$ sono legate a quelle dei successivi vettori dalla seguente relazione:

$$a_{i+1}^{(k)} = b_{i+1}^{(k)} + \frac{a_i^{(k+1)}}{a_{n-1}^{(k+1)}}, \qquad \text{per } i = 0, \ldots, n-2; \tag{0.3}$$

da confrontarsi con le relazioni (0.1), (0.2) viste in precedenza.
Per $n = 2$ lo spazio vettoriale E^{n-1} diventa $\mathbb{R}$ e lo JPA diventa l'algoritmo delle frazioni continue se scegliamo come funzione associata all'operatore T la funzione f così definita:

$$f(a^{(k)}) = \left[a^{(k)}\right] = \left(\left[a_1^{(k)}\right], \ldots, \left[a_{n-1}^{(k)}\right]\right),$$

dove $\left[a_i^{(k)}\right]$ indica la parte intera dell'elemento $a_i^{(k)}$.
In analogia con la convergenza di una frazione continua, passeremo a studiare la convergenza dell'algoritmo di Jacobi-Perron; per farlo, nel caso $n \geq 2$, dovremo porre alcune condizioni sulla T-funzione da utilizzare.

Definizione 3. *Sia $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, \ldots, a_{n-1}^{(0)}) \in E^{n-1}$. L'algoritmo JPA di $a^{(0)}$ è detto **convergente** se*

$$\lim_{v \to \infty} \frac{A_i^{(v)}}{A_0^{(v)}} = a_i^{(0)} \quad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{0.4}$$

dove i numeri razionali $A_i^{(v)}$ sono intrinsecamente associati allo JPA e generalizzano i convergenti di una frazione continua.

Definizione 4. *Una T-funzione f tale che $f(a^{(k)}) = b^{(k)} = (b_1^{(k)}, \ldots, b_{n-1}^{(k)})$ è detta essere **P-limitata** se*

$$0 < \frac{1}{b_{n-1}^{(k)}} \leq C, \quad 0 \leq \frac{b_i^{(k)}}{b_{n-1}^{(k)}} \leq C, \quad (i = 1, \ldots, n-1),\ k \geq 0, \tag{0.5}$$

con C costante reale indipendente da k.

La definizione precedente prende il nome da Perron che introdusse queste condizioni sulla T-funzione f nel suo studio sulla convergenza dell'algoritmo di Jacobi.

Teorema 3. *Sia $a^{(0)} \in E^{n-1}$. L'algoritmo di Jacobi-Perron per il vettore $a^{(0)}$ è convergente se la sua T-funzione f è P-limitata.*

E' importante notare che la funzione parte intera è P-limitata e dunque se assumiamo essa come T-funzione, come fu inizialmente proposto da Jacobi, il problema della convergenza non si pone.

Come già accennato, Jacobi introdusse l'algoritmo che gli deve il nome, per generalizzare il teorema di Lagrange. Molto importante è dunque la nozione di periodicità per lo JPA che affronteremo nel terzo capitolo.

Definizione 5. *Sia $a^{(0)} \in E^{n-1}$. Fissiamo una trasformazione $T : E^{n-1} \longrightarrow E^{n-1}$ e la sua funzione associata f.*
*Lo JPA del vettore $a^{(0)}$ è detto **periodico** se*

$$\exists\ l, m \quad \textit{interi}, \quad l \geq 0, \quad m \geq 1, \quad \textit{con} \quad l = \min L \quad m = \min M \ \textit{t.c.}$$

$$T^{m+v} = T^{v} \quad \textit{per } v \geq l.$$

Dimostreremo in seguito che se lo JPA di un vettore $a^{(0)}$ è periodico, allora le sue componenti sono algebriche e tutte appartenenti alla stessa estensione di grado al più n di $\mathbb{Q}$. E' un teorema di Perron inoltre che tali componenti sono indipendenti su $\mathbb{Q}$, vedi ([18]). Questo fornisce una naturale generalizzazione di un verso del teorema di Lagrange; cosí come per il caso del teorema di Lagrange, ció che è difficile, è dimostrare che se le componenti di $a^{(0)}$ sono algebriche di grado $\leq n$ in un'estensione di $\mathbb{Q}$, allora lo JPA di $a^{(0)}$ è periodico. A tal fine L. Bernstein dimostra quanto segue.

Teorema 4. *Sia $F(x) = x^n + k_1 x^{n-1} + k_2 x^{n-2} + \cdots + k_{n-1}x - d$ un polinomio con le seguenti condizioni sui coefficienti*

$$\begin{cases} (i) & d,\ k_j\ (j = 1, \ldots, n-1), \quad \textit{sono interi;} \\ (ii) & k_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, n-2); \quad k_{n-1},\ d \geq 1; \\ (iii) & d | k_j,\ (j = 1, \ldots, n-1); \\ (iv) & k_{n-1} \geq cd(n + k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-2}) \quad \exists\, c > 1 \ \textit{reale.} \end{cases} \tag{0.6}$$

$F(X)$ ha le seguenti proprietà:

1. *$F(x)$ ha una e soltanto una radice reale w appartenente all'intervallo aperto $\left(0, \dfrac{1}{n + k_1 + \cdots + k_{n-2}}\right)$;*

2. *L'algoritmo JPA con la T-funzione $f(a^{(k)}) = \left[a^{(k)}\right]$ per il vettore*

$$a^{(0)} = \big(w + k_1, w^2 + k_1 w + k_2, w^3 + k_1 w^2 + k_2 w + k_1, \ldots$$
$$\ldots, w^{n-1} + k_1 w^{n-2} + k_2 w^{n-3} + \cdots + k_{n-2} w + k_{n-1}\big)$$

è puramente periodico.
La lunghezza m del periodo è tale che

$$m = \begin{cases} n & se\ d > 1 \\ 1 & se\ d = 1 \end{cases}$$

Il periodo primitivo ha la seguente struttura

$$Se\ d > 1 \begin{cases} b^{(0)} = (k_1, \ldots, k_{n-1}) \\ b^{(i)} = \left(k_1, \ldots, k_{n-1-i}, k'_{n-i}, k'_{n-i+1}, \ldots, k'_{n-1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad per\ i = 0, \ldots, n-2 \\ b^{(n-1)} = \left(k'_1, \ldots, k'_{n-1}\right) \\ k'_j = d^{-1} k_j\ per\ j = 1, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{0.7}$$

Se $d = 1$, allora $m = 1$ e $b^{(0)} = (k_1, \ldots, k_{n-1})$;

3. *$F(x)$ è un polinomio irriducibile sui razionali.*

Assumendo poi dei particolari coefficienti k_i,

$$k_i = \binom{n}{i} D^i, \quad d|D, \quad D \in \mathbb{N},$$

e prendendo w radice del polinomio sopra descritto, si avrà

$$w = \alpha - D, \quad \alpha = \sqrt[n]{D^n + d},$$

per cui potremo esprimere $a^{(0)}$ in funzione di α:

$$a_s^{(0)} = \sum_{i=0}^{s} \binom{n-s+i-1}{i} D^i \alpha^{s-i} \quad 1 \leq s \leq n-1.$$

Sotto alcune condizioni su D, lo JPA per un vettore $a^{(0)}$ siffatto è periodico e tramite il suo sviluppo riusciremo a determinare anche la periodicità dello JPA del vettore $a^{(0)} = (\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$. L'analisi dello sviluppo di tale vettore risulta molto più significativa, in quanto le sue componenti costituiscono insieme ad 1, una base per l'ampliamento $\mathbb{Q}(\alpha)$.
Come generalizzazione del teorema di Lagrange, ci aspetteremmo di trovare la seguente situazione:
L'algoritmo di Jacobi-Perron del vettore $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ ha sviluppo periodico se e soltanto se $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ costituisce una base di un ampliamento di $\mathbb{Q}$.
Studiare quindi il vettore $a^{(0)} = (\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ e provarne la periodicità

per $\alpha = \sqrt[n]{D^n + d}$, fornisce ulteriore credito a questa congettura. Presenteremo e citeremo nel capitolo ulteriori classi di irrazionalità con JPA periodico, dovuti principalmente a L. Bernstein.

Nel quarto capitolo esamineremo la connessione tra l'algoritmo di Jacobi-Perron e gli elementi invertibili dell'anello degli interi di un'estensione algebrica di $\mathbb{Q}$, in analogia con quanto è stato già osservato per l'algoritmo euclideo nel primo capitolo. Calcoleremo l'equazione caratteristica associata ad un qualsiasi JPA periodico e vedremo come da essa sarà possibile ricavare degli elementi invertibili dell'anello degli interi di un ampliamento algebrico di grado n su $\mathbb{Q}$. Sempre tramite l'equazione caratteristica riusciremo a mostrare che la periodicità dell'algoritmo è condizione sufficiente affinchè le componenti del vettore $a^{(0)}$ siano tutte reali algebriche di grado $\leq n$. Mostreremo il seguente importante teorema, noto come **Formula di Hasse-Bernstein** che ci consentirà di ricavare degli elementi invertibili.

Teorema 5. *Sia $a^{(0)} = a^{(0)}(\alpha) \in E^{n-1}$ un vettore a componenti algebriche di grado $\leq n$.*
Se lo JPA di $a^{(0)}$ è periodico e la T-funzione associata ad esso è tale che le componenti dei vettori $b^{(v)}$ per $v \geq 0$ sono tutte intere, allora il prodotto delle ultime componenti dei vettori $a^{(l)}, a^{(l+1)}, \ldots, a^{(l+m-1)}$, cioè

$$e = \prod_{i=l}^{l+m-1} a_{n-1}^{(i)}, \tag{0.8}$$

è un elemento invertibile dell'anello degli interi del campo $\mathbb{Q}(\alpha)$, dove l indica la lunghezza del pre-periodo, mentre m quella del periodo.

Analizzeremo nei dettagli il caso già trattato in precedenza

$$a_s^{(0)} = \sum_{i=0}^{s} \binom{n-s+i-1}{i} D^i \alpha^{s-i} \quad 1 \leq s \leq n-1,$$

ne ricaveremo la relativa equazione caratteristica e applicando la formula di Hasse-Bernstein otterremo che $\epsilon = \dfrac{\alpha - D}{d}$ è un elemento invertibile di $\mathbb{Q}(\alpha)$. Infine esamineremo alcuni esempi.

Nel quinto capitolo rivisiteremo l'algoritmo di Jacobi-Perron all'interno di una qualsiasi estensione cubicha di $\mathbb{Q}$. Anche nel caso cubico non è possibile generalizzare il teorema di Lagrange, ma sono stati fatti molti progressi ad ulteriore conferma della congettura. Citeremo a proposito il seguente risultato dovuto a E. Dubois e R. Paysant-Le Roux, vedi [14]:

Teorema 6. *In tutte le estensioni cubiche reali K di $\mathbb{Q}$, esistono α_1, α_2, tali che $\{1, \alpha_1, \alpha_2\}$ sia una base di K, il cui sviluppo tramite lo JPA è periodico.*

Quindi, possiamo essere sicuri di trovare in ogni estensione cubica K, dei numeri α_1, α_2 con sviluppo periodico e tali che $\{1, \alpha_1, \alpha_2\}$ sia una base di K su $\mathbb{Q}$, ma non sappiamo se, considerato per esempio il vettore (α, α^2) con α tale che $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, esso abbia uno sviluppo periodico.
Mostreremo che non esiste alcun naturale m non nullo tale che lo sviluppo secondo l'algoritmo di Jacobi-Perron del vettore $a^{(0)} = (\sqrt[3]{m}, \sqrt[3]{m^2})$, con la T-funzione parte intera sia puramente periodico. Tale risultato è dovuto a M. Bouhamza, vedi [8]. Quest'ultimo inoltre ha provato il teorema sopra enunciato di E. Dubois e R. Paysant-Le Roux, per il caso $n = 4$, vedi [9].
Nel caso cubico L. Bernstein ha dimostrato che lo sviluppo dello JPA per il vettore (α, α^2) è periodico per i seguenti valori reali di α:

$$\begin{array}{llll}
(1) & \alpha^3 = D^3 + d; & d|D, & 1 \leq d \leq D; \\
(2) & \alpha^3 = D^3 + 3d; & d|D, & 3d \leq D; \\
(3) & \alpha^3 = D^3 - d; & d|D, & 4d \leq D; \\
(4) & \alpha^3 = D^3 - 3d; & d|D, & 12d \leq D; \\
(5) & \alpha^3 = D^3 + 3D; & & D \leq 2; \\
(6) & \alpha^3 = D^3 + 6D; & 2|D, & D \leq 4;
\end{array} \tag{0.9}$$

dove d e D sono interi positivi.
Alcuni dei casi sopra descritti sono stati ricavati nei dettagli all'interno di questa tesi, per gli altri basta consultare gli articoli di L. Bernstein [2], [3], [4], [5], citati in bibliografia.
Infine, tramite la formula di Hasse-Bernstein, ricaveremo gli elementi invertibili dell'anello degli interi $\mathbb{Q}(\alpha)$, per le irrazionalità sopra enunciate.

Bibliografia

[1] L. Bernstein - *The Jacobi-Perron Algorithm. It's theory and application.* - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics, 207*).

[2] L. Bernstein - *Periodical Continued Fraction of Degree n by Jacobi's Alghoritm* - J. reine angew. Math., 213, 1963, p.31-38.

[3] L. Bernstein - *Representation of* $(D^n - d)^{1/n}$ *as a Periodic Continued Fraction by Jacobi's Alghoritm* - Math. Nachrichten, 19, 1965, p.179-200.

[4] L. Bernstein - *Periodicity of Jacobi's Alghoritm for a Special Type of Cubic Irrationals* - J. reine angew. Math., 213, 1964, p.137-146.

[5] L. Bernstein - *A 3-dimensional Periodic Jacobi-Perron Alghoritm of period length 8* - Jour. Number Theory, 4,n.1, 1972, p.48-69.

[6] L. Bernstein - *New Infinite Classes of Periodic Jacobi-Perron Alghoritm* - Pacific Jour. Math., 16,n.3, 1965, p.439-469.

[7] L. Bernstein - *The Modified Alghoritm of Jacobi-Perron* - Memoirs Amer. Math. Soc., 67, 1966, p.1-44.

[8] M. Bouhamza - *Algorithme de Jacobi-Perron dans les corps de nombres de degré 3* - Bull. Sc. math., 108, 1984, série 2, p.101-111.

[9] M. Bouhamza - *Algorithme de Jacobi-Perron dans les corps de nombres de degré 4* - Acta Arith., 44, 1984, p.141-145.

[10] G. H. Hardy, E. M. Wright - *An introduction to the Theory of Numbers*- Oxford Science Publications.

[11] C.G.J. Jacobi - *Allgemeine Theorie der kettenbruchaehnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird* - J.f.d. reine angew. Math., 69, 1869, 29-64.

[12] S. Lang - *Introduction to Diophantine Approximations. New Expanded Edition* - Springer-Verlag, 1995.

[13] E. Dubois , R. Paysant Le Roux - *Développement périodique par l'algorithme de Jacobi-Perron et nombre de Pisot-Vijayraghvan* - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, 1971, série 1, p.649-652.

[14] E. Dubois , R. Paysant Le Roux - *Algorithme de Jacobi-Perron dans les extensions cubiques* - C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, série A, p.183-186.

[15] R. Paysant Le Roux , E. Dubois - - Comptes rendus, 279, série A, 1974, p.57.

[16] T. Nagell - *Solution complète de quelques équations cubiques à deux indéterminées* - J. Math. pures et appl., série 9, t.4, 1925, p.209-270.

[17] J. Stender - *Ueber die Grundeinheit fuer spezielle unendliche klassen reiner kubischer Zahlkoerper* Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, 33,1969, p.203-215.

[18] O. Perron - *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus* - Math. Annalen, 64, 1907, p.1-76.