UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di

Roberta Goio

Il teorema fondamentale di Zariski

Relatore

Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
FEBBRAIO 2003

Classificazione 14E0514J50.
Parole Chiave : Varietà algebriche, valutazioni, morfismi birazionali.

Roberta Goio è nata a Roma il 26 Settembre del 1976.
Ha conseguito il Diploma di Maturità Scientifica presso il
Liceo statale Convitto Nazionale " Vittorio Emanuele II "
di Roma nel 1995. Si è iscritta al Corso di Laurea
in Matematica presso l'Università Roma Tre nell'A.A. 1997-1998

TESINE ORALI PRESENTATE

1. Il teorema fondamentale dell'algebra (Geometria)
2. I polinomi irrudicibili in $\mathbb{Z}_p[x]$ (Algebra)

La seconda tesina è stata discussa il 05 Novembre 2001.

Indice

Capitolo 1

Preliminari algebrici

1.1 Introduzione

Lo scopo principale di questo lavoro è di dimostrare il teorema fondamentale di Zariski, dimostrato nel 1941 in [Foundations of a general theory of birational correspondences] da Oscar Zariski (1899,1986). Nella letteratura moderna, quello che si dice "Zariski Main Theorem" è oggetto di generalizzazioni rilevanti, soprattutto ad opera di A. Grothendieck che lo ha riformulato nel linguaggio degli schemi. In questa tesi abbiamo cercato di dare la dimostrazione originale del teorema di Zariski nel suo linguaggio, in cui i termini centrali sono quelli di campo di funzioni razionali e teoria delle valutazioni, che possono essere descritti con il linguaggio di base di un primo corso introduttivo alla geometria algebrica. Si consideri la corrispondenza birazionale tra due varietà algebriche V e V' (cfr.$definizione$ (2.17)). Quando Zariski inizia ad occuparsi della questione, non è ancora stata effettuata una trattazione generale della teoria delle corrispondenze birazionali, tanto che spesso si ricorre all'intuito o a motivazioni di continuità per estendere il luogo di definizione di un'applicazione razionale ed all'analogia con esempi noti. Tuttavia, nel caso di varietà non singolari V e V' era noto un teorema molto preciso, dovuto a Van der Waerden (cfr.$paragrafo$ (4.1)). E' facile vedere che in questi teoremi l'ipotesi di non singolarità è essenziale: basti pensare al morfismo di desingolarizzazione f : X → C, dove C è una curva nodata e tale che se $0 \in C$ è un nodo, allora $f^{-1}(0)$ consiste di due punti. Il

teorema fondamentale di Zariski risulta in questo senso una generalizzazione del caso (A) del teorema di Van der Waerden e la normalità una naturale generalizzazione della singolarità che si presta all'opera.
Nel momento in cui Zariski comincia le sue ricerche nel campo della geometria algebrica, negli anni '20 a Roma sotto la guida di Enriques e Severi, la teoria delle curve algebriche ha già trovato risposte soddisfacenti ad alcune questioni fondamentali e, con il contributo prezioso di molti matematici, tra cui spiccano Castelnuovo ed Enriques, si delinea una generalizzazione di molti di quei risultati al caso delle superfici algebriche.
I problemi fondamentali sono due: quello della desingolarizzazione e quello della classificazione. Il problema della desingolarizzazione consiste nel chiedersi se, data una varietà algebrica V singolare, esiste una varietà non singolare V' con un morfismo birazionale $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$. Nel caso delle curve la risposta è affermativa. Nel caso delle superfici la risposta è ancora affermativa, ma trova in quegli anni numerose dimostrazioni. Alcune di queste risultano incomplete o di difficile accettazione secondo canoni di rigore algebrico che Zariski porta con sé per educazione e che sono abbastanza trascurati dalla scuola puramente geometrica del tempo, la quale affida molti passaggi all'intuizione geometrica piuttosto che all'algebra, non sentendo neanche il bisogno di dare definizioni precise su certe questioni. Zariski, che ha studiato i testi della fiorente scuola tedesca di algebra, tra cui citiamo E. Noether e Dedekind, è affascinato dal problema di studiare algebricamente la desingolarizzazione. Più in generale si impegna per sostituire a molti argomenti geometrici una fondazione algebrica del problema, da cui scaturisce una dimostrazione del teorema di desingolarizzazione in linguaggio algebrico, dove i canoni di rigore sono all'epoca maggiormente sentiti.
Due varietà birazionali hanno lo stesso campo delle funzioni razionali Σ, e questo, essendo dato birazionale e puramente algebrico, è il punto di partenza di Zariski. Dal suo punto di vista, infatti, una varietà è un modello del suo campo di funzioni razionali ed il problema della desingolarizzazione è quello della ricerca di un modello non singolare di un campo di funzioni razionali Σ (cfr.$definizione$ (3.9)). Se Σ è il campo di funzioni razionali di una curva, esso ammette un modello non singolare, e più precisamente ne ammette uno solo, a meno di isomorfismi. Quest'ultima proprietà non potrà essere più vera nel caso di varietà di dimensione superiore. Ad esempio, nel caso delle superfici si possono produrre infiniti modelli non singolari del campo di funzioni più semplici, quello di $\Sigma = k(x, y)$ mediante successivi scoppiamenti di $\mathbb{P}^2$.

Per meglio definire la relazione tra modelli di uno stesso campo, Zariski sente l'esigenza di creare una teoria algebrica delle corrispondenze birazionali tra varietà. E questo è il contesto in cui si sviluppa il suo teorema fondamentale. Nel caso delle curve affini, dal punto di vista algebrico, il modello non singolare di un campo Σ di funzioni razionali con grado di trascendenza 1 è un dominio di Dedekind, cioè un dominio di dimensione 1 a ideali principali. Nell'interpretazione di Zariski, il modello non singolare di una curva algebrica è l'insieme delle valutazioni discrete di Σ (cfr. $definizione$ (1.24)).
Data, dunque, una corrispondenza birazionale $T : \mathrm{V} - -- > \mathrm{V}'$ tra varietà, che nel seguito intenderemo implicitamente fissata, Zariski dà definizione di corrispondenza tra due sottovarietà (cfr.$definizione$ (4.1)).
Zariski considera due varietà V e V' come modelli di uno stesso campo Σ. E', dunque, naturale per W e W' che si corrispondano considerare gli anelli quozienti $Q(W)$ e $Q(W') \subset \Sigma$ (cfr.$definizione$ (2.10)).
Nel lavoro di Zariski gioca un ruolo di grande rilievo una conseguenza del teorema fondamentale degli ordini principali (cfr. $paragrafo$(1.7)), che stabilisce una stretta connessione tra l'anello $Q(W)$ e gli anelli di valutazione. E' questo teorema che suggerisce l'ipotesi di normalità, essenziale nel teorema fondamentale di Zariski.
La tesi è nel dettaglio strutturata come segue. Nel primo capitolo forniamo i preliminari algebrici, tratti essenzialmente dall'Atiyah-MacDonald [AM], dallo Zariski Samuel [ZS2] e dal Matsumura [M]. Nel secondo capitolo ricordiamo le nozioni più comuni della geometria algebrica, seguendo il primo capitolo dell'Hartshorne [H2] e, dove possibile il linguaggio di Zariski (cfr. "Normal varietes and birational correspondences" [Z2] e "Some results in the arithmetic theory of algebraic surface" [Z4]). Nel terzo capitolo esponiamo il punto di vista di Zariski, studiando il caso delle curve con riferimento all' Hartshorne [H2]; inoltre, esponiamo il concetto di centro di una valutazione , fornendo i teoremi di esistenza di valutazioni con centri dati. Nel quarto capitolo, studiamo le corrispondenze birazionali e definiamo i principali concetti; infine, caratterizziamo il centro di una valutazione, distinguendo il caso generale da quello localmente normale (cfr. "Foundation of a general theory of birational correspondences" [Z3]). Nel quinto ed ultimo capitolo dimostriamo i teoremi fondamentali di Zariski.

1.2 Moduli, algebre ed anelli Noetheriani

Strumenti tecnici di grande importanza in algebra commutativa sono il *pro–cesso di localizzazione* ed una conseguente formazione di anelli di frazione. Nell'applicazione dell'algebra commutativa alla geometria algebrica si concentra l'attenzione sull'intorno di un punto o, più in generale, su un aperto. Il procedimento con cui si costruisce l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ a partire da quelli interi $\mathbb{Z}$, può essere facilmente esteso al caso di un dominio d'integrità introducendo una relazione di equivalenza tra coppie ordinate di suoi elementi.

Definizione 1.1. Un anello con un unico ideale massimale m si chiama **anello locale**, mentre un anello con un numero finito di ideali massimali si chiama **anello semilocale**.

Teorema 1.1. *Ogni anello $A \neq 0$ possiede almeno un ideale massimale.*

Dimostrazione. Il teorema rappresenta una conseguenza del lemma di Zorn. Sia Ω l'insieme di tutti gli ideali propri in A. Si ordina tale insieme. Ω non è vuoto, in quanto $0 \in \Omega$. Per poter applicare il lemma di Zorn, è necessario mostrare che ogni catena in Ω possiede un maggiorante in Ω. Si consideri, allora, una catena di ideali (I_α) in Ω, in modo tale che per ogni coppia di indici α, β risulti $I_\alpha \subseteq I_\beta$ oppure $I_\beta \subseteq I_\alpha$. Sia $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$. Allora I è un ideale e $1 \notin I$, in quanto $1 \notin I_\alpha$ per ogni α. Ne segue che $I \in \Omega$ ed I è un maggiorante della catena. A questo punto, per il lemma di Zorn, Ω possiede un elemento massimale.

Definizione 1.2. Se A è un anello, l'insieme degli elementi invertibili si denota con $U(A)$ e il suo complementare con $NU(A)$.
Se (A, m) è un anello locale allora gli elementi di A non contenuti in m sono elementi invertibili e $U(A) = A \setminus m$; viceversa, un anello in cui gli elementi non invertibili formano un ideale è un anello locale e $m = NU(A)$.

Definizione 1.3. Il **radicale** di un ideale I dell'anello A è l'insieme
$r(I) = \{x \in A / x^n \in I \textit{ per qualche } n > 0\}$. Se $p = r(I)$ è un ideale primo, allora I si dice $\mathbf{p-primario}$.

Proposizione 1.1. *Sia I un ideale primario in un anello A. Allora $r(I)$ è il più piccolo ideale contenente I.*

Dimostrazione. Poichè si dimostra che $r(I)$ l'intersezione degli ideali primi che contengono I, basta dimostrare che $r(I)$ è primo.
Se xy è un elemento di $r(I)$ allora lo è anche $(xy)^m$ per qualche $m > 0$. Conseguentemente x^m sta in I oppure y^{mn} sta in I per qualche $n > 0$, cioè o x è elemento di $r(I)$ o lo è y.

Lemma 1.1. *Se gli ideali I_j per $j = 1, .., n$ sono p-primari, allora $I = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$ è p-primario.*

Dimostrazione. $r(I) = r(\bigcap_{j=1}^{n}) = \bigcap r(I_j) = p$. Sia xy un elemento di I con y non appartenente a I. Allora per qualche j si ha che xy sta in I_j con y non appartenente a I_j, da cui x è elemento di p, dal momento che I_j è p-primario.

Definizione 1.4. Una **decomposizione primaria** di un ideale I in A è un'espressione di I come un'intersezione finita di ideali primari:

$$I = \bigcap_{j=1}^{n} I_j$$

Se, inoltre, i radicali $r(I_j)$ sono tutti distinti e $I_j \not\supseteq I_k$ per $k \neq j$, allora la decomposizione primaria si dice **minimale**.

La decomposizione di un ideale in ideali primari fornisce la base algebrica per la decomposizione di una varietà algebrica nelle sue componenti irriducibili (cfr. *teorema* (2.1)).

Definizione 1.5. Sia B un anello e A un suo sottoanello, un $\mathbf{A-modulo}$ in B è un sottoinsieme non vuoto I di A tale che:

(m_1) - se a_1 e a_2 sono elementi di I, allora $(a_1 - a_2)$ è un elemento di I

(m_2) - se a è un elemento I e b uno di A, allora ab è un elemento di I

Ogni ideale in B, quindi, è chiaramente un A-modulo. In particolare gli ideali di A sono precisamente sottoinsiemi di A che sono A-moduli.
A questo punto è bene definire in modo più generale ed astratto un modulo.

Definizione 1.6. Sia A un anello commutativo con unità, un $\mathbf{A-modulo}$ è un gruppo abeliano M su cui A agisce linearmente, dotato di un'operazione di prodotto per uno scalare $\mu : \mathrm{A} \times \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{M}$ tale che per ogni coppia di elementi a, b di A e per ogni coppia di elementi x, y di M valgono le seguenti proprietà:

(M_1) - $a(x+y) = ax + ay$

(M_2) - $(a+b)x = ax + by$

(M_3) - $(ab)x = a(bx)$

(M_4) - $1_A = x$

Un A-modulo si dice **finitamente generato** se possiede un sistema finito di generatori. Inoltre, M è un A-modulo finitamente generato se e soltanto se M è isomorfo ad un quoziente dell'A-modulo libero $\bigoplus_{i=1}^{n} A_i$.
Si introduce ora una importante classe di anelli:

Definizione 1.7. Un **anello** è **noetheriano** se soddisfa una delle seguenti condizioni equivalenti:

(N_1) - ogni suo ideale è finitamente generato

(N_2) - ogni insieme non vuoto di suoi ideali possiede un elemento massimale

(N_3) - ogni catena ascendente di ideali in esso è stazionaria.

Lemma 1.2. *In un anello noetheriano A ogni ideale è un'intersezione finita di ideali irriducibili.*

Dimostrazione. Un ideale I si dice *riducibile* se è intersezione di due ideali propri di A strettamente più grandi di I. Si suppone che la tesi sia falsa e si considera l'insieme degli ideali per i quali il lemma non è verificato. Tale insieme possiede un elemento massimale I. Essendo I riducibile, dalla $I = J_1 \cap J_2$ risulta $J_1 \supset I$ e $J_2 \supset I$. Quindi, ciascuno degli ideali J_1 e J_2 è un'intersezione finita di ideali irriducibili, e conseguentemente lo è anche I, arrivando così ad una contraddizione.

Lemma 1.3. *In un anello noetheriano A ogni ideale irriducibile è primario.*

Dimostrazione. Passando all'anello quoziente, basta dimostrare che se l'ideale zero è irriducibile, allora è primario. Sia $xy = 0$ un elemento dell'anello quoziente con $y \neq 0$. Si considera la catena di ideali annullatori $Ann(x) \subseteq Ann(x^2)$.... Essendo A noetheriano, tale catena è stazionaria, cioè si ha $Ann(x^n) = Ann(x^{n+1}) = ...$ per qualche n. Da ciò segue che $(x^n) \cap (y) = 0$: infatti, se $a \in (y) \cap (x^n)$, allora $a = bx^n$ e $ay = 0$; mentre $a = cy$ implica

$bx^{n+1} = 0$, da cui $b \in Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n)$, e quindi $bx^n = 0$, cioè $a = 0$. Dal momento che (0) è irriducibile e $(y) \neq 0$, si ottiene $x^n = 0$, e questo prova che (0) è primario.

I *lemmi* (1.2) e (1.3) mostrano che ogni ideale proprio di un anello noetheriano possiede una decomposizine primaria.

Definizione 1.8. Un modulo M si dice **noetheriano** se soddisfa una delle seguenti condizioni:

(N_1) - ogni catena ascendente di suoi elementi è stazionaria

(N_2) - ogni sottoinsieme non vuoto di M possiede un elemento massimale.

Proposizione 1.2. *Sia* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una successione esatta di* A*-moduli. Allora* M *è noetheriano se e soltanto se* M' *e* M'' *sono noetheriani.*

Dimostrazione. Una catena ascendente di sottomoduli di M' (o M'') dà origine ad una catena in M, che è noetheriano per ipotesi. Tale catena è stazionaria, per cui M' (analogamente M'') è noetheriano.
Viceversa, sia $(L_n)_{n\geq 1}$ una catena ascendente di sottomoduli di M; allora $(\alpha^{-1}(L_n))$ è una catena in M' e analogamente $(\beta(L_n))$ è una catena in M''. Per n abbastanza grande tali catene sono stazionarie, per cui (L_n) è stazionaria e M è noetheriano.

Corollario 1.1. *Se* M_i *sono* A*-moduli noetheriani per* $i = 1, .., n$*, anche* $\oplus_{i=1}^n M_i$ *risulta essere noetheriano.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su n, considerando la successione esatta $0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \oplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$. Ad essa si applica la proposizione precedente.

Le dimostrazioni dell'equivalenza delle condizioni di un anello noetheriano e le dimostrazioni dei seguenti risultati sono riportate sull'*Atiyah Macdonald* [A.M].

Proposizione 1.3. *Se* A *è un anello noetheriano e* M *un* A*-modulo finitamente generato, allora* M *è noetheriano.*

Proposizione 1.4. *Se A è un anello noetheriano ed I è un ideale, allora A/I è noetheriano.*

Proposizione 1.5. *Se A è noetheriano e $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ è un morfismo di anelli, allora B è noetheriano.*

Proposizione 1.6. *Se B è un anello noetheriano e se $A \supset B$ è un anello finitamente generato come B-modulo, allora A è noetheriano.*

Proposizione 1.7. *Se A è noetheriano e p è un ideale primo di A, allora l'anello locale A_p (cfr. $definizione$ (1.11)) è noetheriano.*

Definizione 1.9. Una $\mathbf{A-algebra}$ è un anello B dotato di una struttura di A-modulo, ossia avente un omomorfismo $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ tale che $ab = f(a)b$ se $a \in \mathrm{A}$ e $b \in \mathrm{B}$.

Una A-algebra si dice **finitamente generata** se esiste un insieme finito di elementi x_1,....x_n in B tale che ogni elemento di B è esprimibile come polinomio nelle x_i a coefficenti in f(A).

Proposizione 1.8. *Se B è una A-algebra finitamente generata, cioè $B = A[x_1,....,x_n]/I$, ed A è noetheriano allora B è noetheriano. In particolare, ogni anello finitamente generato ed ogni algebra finitamente generata su un campo è un anello noetheriano.*

Proposizione 1.9. *Siano $A \subseteq B \subseteq C$ anelli tale che A è noetheriano, C è A-algebra finitamente generata ed inoltre finitamente generato come B-modulo, allora B è una A-algebra finitamente generata.*

Teorema. ($della\ base\ di\ Hilbert$) *Se A è un anello noetheriano, lo è anche ogni anello di polinomi in un numero finito di indeterminate su A.*

Corollario 1.2. *Se A è noetheriano , lo è anche $A[x_1, .., x_n]$.*

1.3 Teorema del going-up e teorema del going-down

Definizione 1.10. Sia A un sottoanello di B (sicchè $1 \in A$); un elemento x di B si dice **intero** su A se x è radice di un polinomio monico a coefficenti in A, per cui x soddisfa un'equazione della forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \tag{1.1}$$

con gli a_i elementi di A.

Proposizione 1.10. *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) - $x \in B$ *è intero su* A

(2) - $A[x]$ *è un* A*-modulo finitamente generato*

(3) - $A[x]$ *è contenuto in un sottoanello* C *di* B *tale che* C *è un* A*-modulo finitamente generato*

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2) Dall' *equazione* (1.1) si ha :

$$x^{n+r} = -(a_1 x^{n+r-1} + ... + a_n x^r)$$

per ogni intero $r \geq 0$. Quindi, per induzione tutte le potenze di x appartengono all'A-modulo generato da $1, x, ..., x^{n-1}$. Conseguentemente $A[x]$ è generato da tali elementi come A-modulo.
(2) $\implies$ (3) E' sufficente prendere $C = A[x]$.
(3) $\implies$ (1) Siccome C è un A-modulo finitamente generato, i suoi elementi possono essere scritti come combinazione lineare dei generatori a coefficenti in A. A questo punto è sufficente prendere $C = B$, ottenendo così che ogni elemento di B è intero su A.

Corollario 1.3. *Siano* $x_1, ..., x_n$ *elementi di* B *interi su* A*, allora l'anello di polinomi* $A[x_1, ..., x_n]$ *è un* A*-modulo finitamente generato.*

Dimostrazione. Si procede per induzione su n. Il caso $n = 1$ è trattato nella proposizione precedente. Per $n > 1$, si pone $A_r = A[x_1, ..., x_r]$; per l'ipotesi induttiva, A_{n-1} è un A - modulo finitamente generato. D'altra parte, $A_n = A_{n-1}[x_n]$ è un A_{n-1} - modulo finitamente generato, essendo x_n intero su A_{n-1}. Dunque A_n è un A - modulo finitamente generato.

Corollario 1.4. *L'insieme C degli elementi di B che sono interi su A rappresenta un sottoanello di B contenente A.*

Dimostrazione. Se x, y appartengono a C, allora dal *corollario* (1.3) risulta che $A[x, y]$ è un A - modulo finitamente generato. Quindi, per la *condizione* (3) della *proposizione* (1.10), $x \pm y$ e xy sono interi su A, cioè C è subanello di B contenente l'anello A.

Definizione 1.11. L'insieme C degli elementi di B interi sul sottoanello A prende il nome di **chiusura integrale** di A in B. Se $C = A$ allora A si dice **integralmente chiuso in B**. Se $C = B$ allora l'anello B si dice **intero sopra** A.

Il seguente corollario definisce la proprietà transitiva della dipendenza integrale:

Corollario 1.5. *Se $A \subseteq B \subseteq C$ sono anelli, B è intero su A e C è intero su B, allora C è intero su A.*

Dimostrazione. Sia x un elemento di C, si ha:

$$x^n + b_1 x^{n-1} + ... + b_n = 0$$

con i b_i elementi di B. L'anello $B' = A[b_1, .., b_n]$ è un A - modulo finitamente generato per il *corollario* (1.3), e $B'[x]$ è un B' - modulo finitamente generato, essendo x intero su B'. Quindi, $B'[x]$ è un A - modulo finitamente generato e per cui x è intero su A per la *condizione* (3) della *proposizione* (1.10).

Corollario 1.6. *Siano $A \subseteq B$ anelli e sia C la chiusura integrale di A in B. Allora C è integralmente chiuso in B.*

Dimostrazione. Siccome C è un sottoanello di B contenente A (*corollario* (1.4)), se $x \in B$ è intero su C, in virtù della transitività della dipendenza integrale (*corollario* (1.5)), si ha che x è anche intero su A, pe cui $x \in C$. Da qui la tesi.

Il procedimento con cui si costruisce il campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ partendo dall'anello degli interi $\mathbb{Z}$ può essere esteso ad un domino d'integrità A, generando così il campo delle frazioni di A (o campo dei quozienti).

Definizione 1.12. Un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso di A o **parte moltiplicativa** di A è un sottoinsieme S di A tale che $1 \in S$ e S è chiuso rispetto alla moltiplicazione.

Per la costruzione del campo delle frazioni di A si considerano le coppie ordinate (a, s) di elementi di A, e si introduce una relazione tra di esse su $A \times S$:

$$(a, s) \equiv (b, t) \Longleftrightarrow (at - bs)u \equiv 0 \tag{1.2}$$

per qualche elemento u di S. La *relazione* (1.2) è una relazione di equivalenza: infatti, essa è riflessiva, simmetrica e transitiva. Per dimostrare quest'ultima proprietà, si supponga $(a, s) \equiv (b, t)$ e $(b, t) \equiv (c, p)$. Allora esistono elementi u, v di S tali che $(at - bs)u = 0$ e $(bp - ct) = 0$. Eliminando b dalle due relazioni appena scritte, si ottiene $(ap - cs)tuv = 0$. Essendo S chiuso rispetto la moltiplicazione, si ha che tuv è un suo elemento, da cui $(a, s) \equiv (c, p)$.
Il procedimento per dimostrare la transitività della *relazione* (1.2) è valido solo se A è un dominio d'integrità, in quanto si utilizza la legge di cancellazione, cioè il fatto che A non possiede divisori dello zero non nulli.
Si denota con a/s la classe di equivalenza della coppia (a, s).

Definizione 1.13. L'insieme delle classi di equivalenza rispetto alla *relazione* (1.2) è chiamato **anello delle frazioni** di A rispetto a S, e si denota con $S^{-1}A$. Se p è un ideale primo di A, allora $S = A - p$ è una parte moltiplicativa. In questo caso, l'anello delle frazioni $S^{-1}A$ è si denota con A_p.

A_p è un anello locale. Infatti, gli elementi a/s con a elemento di p formano un ideale m in A_p. Se b/t non è un elemento di m, allora b non è un elemento di p, per cui b sta in S e b/t è invertibile in A_p. Ne segue che, se I è un ideale in A_p non contenuto in m, allora I contiene un elemento invertibile e pertanto è l'anello intero. Dunque, m è l'unico ideale massimale in A_p, cioè A_p è un anello locale.
Si consideri ora un omomorfismo di anelli f : A $\longrightarrow$ B. In generale, se I è un ideale di A non necessariamente $f(I)$ è un ideale di B. Si pensi, ad esempio, al caso dell'immersione dell'anello degli interi $\mathbb{Z}$ nel campo dei razionali $\mathbb{Q}$. Si introducono allora i concetti di ideale esteso ed ideale contratto.

Definizione 1.14. Si definisce I^e l'**estensione** dell'ideale I di A come l'ideale generato da $f(I)$ in B; esplicitamente, I^e è l'insieme di tutte le somme del tipo $\sum y_i f(x_i)$, dove le x_i appartengono a I e le y_i appartengono a B ($I^e = Bf(I)$).

Definizione 1.15. Si definisce I^c la **contrazione** dell'ideale J di B come l'ideale $f^{-1}(J)$ di A.

Si osservi che se un ideale J di B è primo, anche la sua contrazione $f^{-1}(J)$ è primo, mentre se un ideale I di A è primo non *è* detto che I^e sia anch'esso primo.
Nel passaggio ai quozienti e agli anelli di frazioni la dipendenza integrale si conserva . Infatti:

Proposizione 1.11. *Siano $A \subseteq B$ anelli e B intero su A.Allora:*

(1) - *se I è un ideale di B e $J = I^c = A \cap I$, allora B/I è intero su A/J*

(2) - *se S è una parte moltiplicativa di A, allora $S^{-1}B$ è intero su $S^{-1}A$*

(3) - *se C è la chiusura integrale di A in B, allora $S^{-1}C$ è la chiusura integrale di $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.*

Dimostrazione. (1) - Se x è un elemento di B, essendo B intero su A, risulta

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0 \tag{1.3}$$

con gli a_i elementi di A. Riducendo tale equazione *mod* I, si ottiene la tesi.
(2) - Sia x/s un elemento di $S^{-1}B$ con $s \in S$, allora dall'*equazione* (1.2) risulta

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + ... + a_n/s^n = 0$$

verificando che x/s è intero su $S^{-1}A$.
(3) - Essendo C un sottoanello di B contenente A, per il *punto* (2) si ha $S^{-1}C$ intero su $S^{-1}A$. Rimane da dimostrare che un elemento di $S^{-1}B$ intero su $S^{-1}A$ sia un elemento di $S^{-1}C$. Infatti, b/s appartiene a $S^{-1}B$ ed è intero su $S^{-1}A$ soddisfa l'equazione

$$(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + ... + a_n/s_n = 0$$

con gli a_i e gli s_i elementi di A per $i = 1, ..., n$.
Si pone $t = s_1...s_n$ e si moltiplica i membri dell'equazione per $(st)^n$, ottenendo così un'equazione di dipendenza integrale per l'elemento bt su A:

$$(bt)^n + (a_1/s_1)(bt)^{n-1} + ... + a_n/s_n = 0$$

Quindi bt è un elemento di C, e perciò $b/s = bt/st$ appartiene a $S^{-1}C$.

Proposizione 1.12. *Siano $A \subseteq B$ domini d'integrità con B intero su A. Allora B è un campo se e soltanto se A è un campo.*

Dimostrazione. Sia A un campo e sia y un elemento non nullo di B. Si considera un'equazione di dipendenza integrale di grado minimo per y:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + ... + a_n = 0$$

con gli a_i elementi di A. Siccome B è un dominio d'integrità, si ha $a_n \neq 0$ e siccome A è un campo $y^{-1} = -a_n^{-1}(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + ... + a_{n-1})$ appartiene a B. Quindi, B è un campo.
Viceversa, sia B un campo e sia x un elemento non nullo di A. Allora x^{-1} appartiene a B ed è intero su A. Si ha così:

$$x^{-m} + a'_1 x^{-m+1} + ... + a'_m = 0$$

con gli a'_i elementi di A. Ne segue che $x^{-1} = -(a'_1 + a'_2 x + ... + a'_m x^{m-1})$ appartiene ad A, per cui A è un campo.

Corollario 1.7. *Siano $A \subseteq B$ anelli con B intero su A, sia q un ideale primo di B e sia $p = q^c = q \cap A$. Allora q è massimale se e soltanto se p è massimale.*

Dimostrazione. Dalla *proposizione* (1.11) risulta B/q intero su A/q, e tali anelli sono entrambi domini d'integrità. Per dimostrare la tesi, a questo punto basta utilizzare la *proposizione* (1.12).

Teorema 1.2. *Siano $A \subseteq B$ anelli con B intero su A e sia p un ideale primo di A. Allora esiste un ideale primo q di B tale che $q \cap A = p$.*

Dimostrazione. Dal momento che, per ipotesi, B è intero su A, dalla *proposizione* (1.11) risulta che B_p è intero su A_p e il diagramma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow_{\alpha} & & \downarrow_{\beta} \\ A_p & \longrightarrow & B_p \end{array}$$

è commutativo. Sia n un ideale massimale di B_p, allora dal *corollario* (1.7) $m = n \cap A_p$ è massimale, essendo così l'unico ideale massimale dell'anello locale A_p. Ponendo $q = \beta^{-1}(n)$, esso è primo e si ha $q \cap A = \alpha^{-1}(m) = p$.

Proposizione 1.13. *Se A è un dominio d'integrità sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(1) - *A è integralmente chiuso*

(2) - *A_p è integralmente chiuso per ogni ideale primo p*

(3) - *A_m è integralmente chiuso per ogni ideale massimale m*

Dimostrazione. Sia k il campo delle frazioni di A, sia C la chiusura integrale di A in k e sia $f : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ l'applicazione identica di A in C.
Allora A è integralmente chiuso se e solo se f è suriettiva e, dal *punto* (3) della *proposizione* (1.2), A_p (rispettivamente A_m)è integralmente chiuso se e solo se f_p (rispett. f_m) è suriettiva. E questo è verificato dalla seguente:

Proposizione 1.14. *Sia $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un omomorfismo di A - moduli. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(1) - *f è iniettiva (rispett. suriettiva)*

(2) - *$f : \mathrm{A_p} \to \mathrm{B_p}$ è iniettiva (rispett. suriettiva) per ogni p ideale primo*

(3) - *$f : \mathrm{A_m} \to \mathrm{B_m}$ è iniettiva (rispett. suriettiva) per ogni m ideale massimale*

Il seguente risultato rappresenta il **teorema del "going – up"**

Teorema 1.3. *Siano $A \subseteq B$ anelli con B intero su A; sia $p_1 \subseteq ..... \subseteq p_n$ una catena di ideali primi di A e $q_1 \subseteq ..... \subseteq q_m$ $(1 \leq m < n)$ una catena di ideali primi di B tali che $q_i \cap A = p_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Allora la catena degli ideali q_i può essere estesa ad una catena $q_1 \subseteq ..... \subseteq q_n$ tale che $q_i \cap A = p_i$ per $1 \leq i \leq n$.*

Dimostrazione. Si procede per induzione, riducendosi al caso più semplice in cui $m = 1$ e $n = 2$. Per cui si ha $p_1 \subseteq p_2$ e l'ideale q_2. Si considerano gli anelli quozienti A/p_1 e B/q_1; allora dall'invarianza della dipendenza integrale per anelli quozienti (*proposizione*; (1.11)) risulta $A/p_1 \subseteq B/q_1$ e B/q_1 è intero su A/p_1.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A/p_1 & \longrightarrow & B/q_1 \end{array}$$

Dal *teorema* (1.1) segue che esiste un ideale primo $\overline{q_2}$ di B/q_1 tale che $\overline{q_2} \cap A/p_1 = \overline{p_2}$, immagine di p_2 in A/p_1. Quindi sollevando $\overline{q_2}$ in B si ottiene un ideale primo q_2 t.c. $q_2 \cap B = p_2$. Ho così esteso la catena di ideali primi in B con le proprietà richieste.

Lemma 1.4. *Sia C la chiusura integrale di A in B e sia I^e l'estensione di I in C. Allora la chiusura integrale di I in B è il radicale di I^e.*

Dimostrazione. Sia x un elemento di B intero su I, si ha allora un'equazione della forma:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

con gli a_i elementi di I. Quindi, $x \in C$ e $x^n \in I^e$, cioè x è un elemento del radicale di I^e. Viceversa, se x è un elemento del radicale di I^e, allora $x^n = \Sigma_{i=1}^{k} a_i x_i$ per qualche $n > 0$, dove gli a_i sono elementi di I e gli x_i sono elementi di C. Siccome ogni x_i è intero su A, dal *corollario* (1.3) segue che $B' = A[x_1, ..., x_k]$ è un A - modulo finitamente generato, ed inoltre $x^n B' \subseteq IB'$. Allora si ha x^n intero su I, essendo x intero su I.

Proposizione 1.15. *Siano $A \subseteq B$ domini d'integrità con A integralmente chiuso, e sia $x \in B$ intero su un ideale I di A. Allora:*

(1) - *x è algebrico sul campo delle frazioni K di A*

(2) - *se il suo polinomio minimo è*

$$t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n \tag{1.4}$$

allora gli a_i sono elementi del radicale $r(I)$

Dimostrazione. La *condizione* (1) è chiara. Rimane da verificare la *condizione*(2). Sia L un'estensione di K contenente tutti i coniugati $x_1, ...x_n$ di x. Ogni elemento x_i soddisfa l'equazione di dipendenza integrale relativa a x, per cui ogni x_i è intero su I. I coefficenti del polinomio minimo di x su K sono polinomi negli x_i e, quindi, dalla *proposizione* (1.14) sono interi su I. Essendo A integralmente chiuso, sempre per *proposizione* (1.14) essi devono appartenere al radicale di I.

Il seguente risultato è il **teorema del "going – down"**

Teorema 1.4. *Siano $A \subseteq B$ domini d'integrità con A integralmente chiuso e B intero su A. Siano $p_1 \supseteq ..... \supseteq p_n$ una catena discendente di ideali primi di A e $q_1 \supseteq ..... \supseteq q_m$ $(m < n)$ una catena discendente di ideali pimi di B tali che $q_i \cap A = p_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Allora la catena dei q_i può essere estesa ad una catena $q_1 \supseteq ..... \supseteq q_n$ tale che $q_i \cap A = p_i$.*

Dimostrazione. Come nel caso del teorema del "going-up", ci si riduce al caso semplice $m = 1$ e $n = 2$. Per cui si ha $p_1 \supseteq p_2$ e l'ideale q_1. Bisogna dimostrare che p_1 è la contrazione di un ideale primo dell'anello B_{q_1}, cioè $p_2 \cap B_{q_1} = q_2$, o in modo equivalente che $B_{q_1}p_2 \cap A = p_2$.
Ogni elemento $x \in B_{q_1}p_2$ è della forma y/s con $y \in B_{p_2}$ e $s \in B\ q_1$. Dalla *proposizione* (1.15) risulta y intero su p_2 e dalla *proposizione* (1.16) la sua equazione di grado minimo su K campo delle frazioni di A è della forma

$$y^r + a_1 y^{r-1} + ... + a_r = 0$$

con gli a_i in p_2. Suppongo ora che $x \in B_{q_1}p_2 \cap A$. Allora $s = yx^{-1}$ con $x^{-1} \in k$ e, dividendo l'equazione di grado minimo per x^r, si ottiene

$$s^r + b_1 s^{r-1} + ... + b_r = 0$$

con i $b_i = a_i/x^i$, per cui gli $x^i b_i = a_i$ appartengono a p_2 per $i = 1, ..., r$. Ma s è intero su A, e quindi dalla *proposizione* (1.15), prendendo $I = (1)$, ciascun b_1 è un elemento di A. Si suppone che $x \notin p_2$. Allora, essendo $x^i b_i \in p_2$, si ha $b_i \in p_2$ e, quindi, $s^r \in B_{p_2} \subseteq B_{q_1} \subseteq q_1$. Conseguenetmente, $s \in q_1$ che è assurdo.
Ne segue che $x \in p_2$ e pertanto $B_{q_1}p_2 \cap A = p_1$, come richiesto.

1.4 I conduttori

Definizione 1.16. Sia A un dominio e A' la sua chiusura integrale nel suo campo dei quozienti. L'insieme di tutti gli elementi x di A tali che $xA' \subset A$ prende il nome di **conduttore** di A in A' o della chiusura integrale di A:

$$\mathcal{C} = \{x \in A \ / \ xA' \subset A\}$$

$\mathcal{C}$ è un ideale in A e anche un ideale in A'. Per cui, se I è un ideale di A e di A', si ha che $IA' \subset I \subset A$ implica $I \subset \mathcal{C}$. Quindi, $\mathcal{C}$ è il più grande ideale in A che è anche ideale in A'.
Si osservi che $A' = A$ se e soltanto se $\mathcal{C} = (1)$.

Lemma 1.5. *Sia S un sistema moltiplicativo in A, allora A'_S è la chiusura integrale di A_S, e A_S è integralmente chiuso se e soltanto se $\mathcal{C} \cap S \neq \emptyset$. Di conseguenza, se A' è un A-modulo finito, allora il conduttore di A_S in A'_S è $\mathcal{C}A_S$ e se, inoltre, A_S è integralmente chiuso $\mathcal{C} \cap S$ è non vuoto.*

Dimostrazione. Dalla *proposizione* (1.11), A'_S è la chiusura integrale di A_S: infatti, se A è un dominio integralmente chiuso e S è un insieme moltiplicativamente chiuso di elementi non nulli di A, allora A_S è integralmente chiuso.
Si deve dimostrare che :
(a) - A_S è integralmente chiuso se e soltanto se $C \cap S \neq \varnothing$
(b) - se A' è un A- modulo finito allora CA_S è conduttore di A_S in A'_S
(a) Se A_S è integralmente chiuso, il conduttore CA_S è l'ideale unità.
Viceversa se $C \cap S \neq \varnothing$ allora esiste un elemento s di $C \cap S$ tale che $A' \subset (1/s)A \subset A_S$. Quindi, $A_S = A'_S$ e A_S è integralemente chiuso.
(b) $(\subset)$ Se c è un elemento di C allora $cA' \subset A$, per cui $cA'_S \subset A_S$. Questo prova che CA_S è contenuto nel conduttore di A_S in A'_S.
(b) $(\supset)$ Se c/s è un elemento di A_S ($c \in A$, $s \in S$) tale che $(c/s)A'_S \subset A_S$, si ha che $cA' \subset A_S$. Siccome, per ipotesi, A' è un A- modulo finito e S un sistema moltiplicativo, esiste un denominatore comune s' in S tale che $cA' \subset (1/s')A$. Quindi, cS' è un elemento di C e $c/s = cs'/ss'$ è un elemento di CA_S. Quindi, il conduttore di A_S in A'_S è contenuto in CA_S.
Conseguentemente, CA_S è il conduttore di A_S in A'_S.

Corollario 1.8. *Gli ideali primi p in A tali che A_p non è integralmente chiuso sono quelli che contengono $\mathcal{C}$.*

Dimostrazione. Dal *lemma* (1.5) A_p è integralmente chiuso se e solo se $S \cap C \neq 0$, cioè se e solo se $C \cap (A \setminus p) \neq 0$.

1.5 Anelli locali regolari

Sia A un anello con unità e m un ideale proprio in A. Gli ideali m^n (con $m^0 = A$) formano una sequenza discendente di ideali in A.

Definizione 1.17. La somma diretta $G_m(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} m^n/m^{n+1}$ è chiamato **anello graduato** associato ad A rispetto a m.

Si supponga che m ammetta una base finita $\{m_1, ..., m_d\}$. Analogamente i monomi di grado n nelle m_i costituiscono una base di m^n e l'anello $G_m(A)$ è generato su A/m da una classe $\overline{m}_j$ degli m_i modulo m^2 (questo segue dalla definizione di moltiplicazione in $G(A)$ applicata agli elementi $\overline{m}_j$). Quindi, $G(A) = (A/m)[\overline{m}_1, .., \overline{m}_d]$. $G(A)$ è un anello noetheriano se A/m è noetheriano e m è finitamente generato.

Teorema 1.5. *Sia A un anello e m un ideale in A. Se l'anello graduato associato $G(A)$ è un dominio, allora $A' = A/\bigcap_{n=0}^{\infty} m^n$ è ancora un dominio.*

Definizione 1.18. Sia A un anello locale di dimensione d, m il suo ideale massimale. Si dice che A è un **anello locale regolare** se m può essere generato da d elementi. Ogni sistema di elementi di A che genera m è ovviamente un sistema di parametri detto **sistema regolare** di parametri di A.

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione di questa classe di anelli.

Teorema 1.6. *Sia A un anello locale (noetheriano) di dimensione d, m il suo ideale massimale e $k = A/m$. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(1) - *m può essere generato da d elementi, cioè A è un anello locale regolare*

(2) - *l'anello graduato associato $G_m(A)$ è un anello di polinomi in d variabili su k, cioè $G_m(A) \simeq k[x_1, .., x_d]$*

(3) - $\dim_k(m/m^2) = d$

Lemma 1.6. *Un anello locale regolare è un dominio d'integrità integralmente chiuso.*

1.6 Teoria delle valutazioni

In questa sessione introduciamo il concetto di valutazione, che sarà l'elemento principale su cui si incentrerà il nostro studio. In particolare, ci soffermeremo sulle valutazioni discrete.

Definizione 1.19. Un insieme S si dice **parzialmente ordinato** se in esso è definita per ogni coppia di suoi elementi a, b una relazione d'ordine $\leq$ tale che vengano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $a = a$
2. se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$
3. se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$

Un insieme S si dice **totalmente ordinato** se per ogni coppia a, b di suoi elementi vale una delle due relazioni $a \leq b$ o $b \leq a$.

Definizione 1.20. Sia K un campo e $K^\star$ il suo gruppo moltiplicativo, cioè l'insieme di tutti gli elementi di K privati dello 0; sia Γ un gruppo abeliano totalmente ordinato. Allora una **valutazione di K** è una mappa $v : \mathrm{K}^\star \to \Gamma$ tale che vengano soddisfatte le seguenti condizioni:

(V_1) - v è un omomorfismo, cioè $v(xy) = v(x) + v(y)$ per ogni $x, y \in K^\star$

(V_2) - $v(x + y) \geq \min\{v(x),v(y)\}$

Definizione 1.21. Sia k un sottocampo di K. Allora una valutazione di K è detta una **valutazione di K/k** se è soddisfatta la condizione seguente:

(V_3) - $v(x) = 0$ per ogni $x \in K$, $x \neq 0$, cioè se v è banale su k

Per ogni elemento $x \in K^\star$ il corrispondente $v(x) \in \Gamma$ si chiama *valore* di x. L'insieme di tutti i valori degli elementi $x \in K^\star$ forma un sottogruppo di Γ che prende il nome di **gruppo dei valori** di v.

Definizione 1.22. Una **valutazione discreta** su k è un'applicazione $v : \mathrm{K}^\star \to \mathbb{Z}$ (ossia con gruppo valore il gruppo additivo degli interi) tale che valgono le *condizioni* (V_1) e (V_2) della definizione di valutazione.

Siccome la valutazione è un omomorfismo, $v(1) = 0$ e, dal momento che Γ è totalmente ordinato, $v(-1) = 0$ da cui segue anche che v(-x)= v(x). Da ciò, riconsiderando la *condizione* (V_2) della definizione, si deduce un'ulteriore condizione:

- $v(x - y) \geq \min\{v(x),v(y)\}$

Sono valide, perciò, le relazioni seguenti:

- $v(y/x) = v(y)$ - $v(x)$ con $x \neq 0$
- $v(1/x) = -v(x)$
- $v(x) < v(y) \Longrightarrow v(x + y) = v(x)$

Definizione 1.23. Due valutazioni v e v' di K con gruppi dei valori rispettivamente Γ e Γ' si dicono **valutazioni equivalenti** se esiste un isomorfismo f tra Γ e Γ' che preserva l'ordine e tale che $v'(x) = [v(x)]f$ per ogni x elemento di $K^\star$. Nel seguito non verranno fatte distinzioni tra valutazioni equivalenti. Una valutazione si dice **non banale** se esiste un x tale che $v(x) \neq 0$ per ogni $x \in K^\star$, altrimenti si dice **banale**.

Definizione 1.24.
1. L'insieme di tutti gli elementi x di $K^\star$ per cui $v(x) \geq 0$ costituisce un anello chiamato **anello di valutazione di v** e denotato con $\mathbf{R}_v$. $k \subset R_v$ se v è una valutazione di K su k.
2. Sia A un dominio d'integrità e K il suo campo delle frazioni, allora A è chiamato **anello di valutazione di K** se per ogni x elemento di K risulta $x \in A$ oppure $1/x \in A$.

3. Un dominio d'integrità A prende il nome di **anello di valutazione discreta** se esiste una valutazione discreta v del suo campo delle frazioni tale che A è l'anello di valutazione di v.

Osservazione 1.1. Per ogni x risulta $v(x) \geq 0$ oppure $v(x) \leq 0$. Segue dal fatto che Γ è totalmente ordinato. Dal momento che R_v è un anello di valutazione, dal punto (2) segue che $x \in R_v$ oppure $1/x \in R_v$. Nel caso in cui $x \in R_v$ si ha $v(x) \geq 0$, mentre nel caso in cui $1/x \in R_v$ si ha $v(1/x) \geq 0$, che equivale a $v(x) \leq 0$, essendo $v(1/x) = -v(x)$.

Sia v una valutazione di K. Sia R_v l'anello di valutazione di v. Allora R_v gode delle proprietà espresse nelle seguenti proposizioni.

Proposizione 1.16. *R_v è un anello locale.*

Dimostrazione. Per ogni coppia di ideali I, J di R_v risulta che $I \subset J$ oppure $J \subset I$, dal momento che Γ è totalmente ordinato. Quindi, gli ideali di R_v formano un insieme totalmente ordinato. In particolare, ammettono un elemento massimale; dunque, R_v è un anello locale.

Proposizione 1.17. *Ogni anello A che contiene R_v ed è contenuto in K, $R_v \subseteq A \subseteq K$, è ancora un anello di valutazione.*

Dimostrazione. Segue chiaramente dalla definizione di anello di valutazione.

Proposizione 1.18. *R_v è integralmente chiuso (cioè è integralmente chiuso nel suo campo di frazioni K).*

Dimostrazione. Sia x un elemento di K intero su R_v, per cui si ha

$$x^n + r_1 x^{n-1} + ... + r_n = 0$$

con gli r_i elementi di R_v. Se x è un elemento di R_v, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, si ha che x^{-1} è un elemento di R_v, da cui
$x = -(r_1 + r_2 x^{-1} + ... + r_n x^{1-n})$, che è un elemento di R_v.

Inerente alla *proposizione* (1.17), si può dimostrare il seguente:

Teorema 1.7. *Sia A' un anello locale ed sia A un suo sottoanello, $A \subset A' \subset k$. Sia m l'ideale massimale di A e m' ideale massimale di A'. Sia $p = m' \cap A$. Allora:*

(1) - *$p \subset A$*

(2) - *p è ideale primo di A e $A' = A_p$*

(3) - *A/p è anello di valutazione del campo A'/m'*

Dimostrazione. (1) - Se $x \in m'$ allora $1/x \notin A'$ e anche $x \notin R$, per cui risulta $x \in A$. Siccome $1/x \notin A$ x è una non unità di A e $x \in m$. In più, siccome $A \neq A'$, si ha $m \neq m'$.

(2) - So che $p \subset A$ e che $p = p \cap A$ è ideale primo di A.
Siccome $A - p \subset A' - p = U(A')$, si ha $A_p \subset A'$ e per costruzione l'ideale massimale di A_p è contenuto nell'ideale massimale p di A'. Segue, quindi, dal punto precedente che $A_p = A'$.

(3) - Si consideri la mappa naturale $\varphi : \mathrm{A}' \to \mathrm{A}'/\mathrm{p}$, allora per ogni $x \in A' - p$ se $x \in A$ si ha $\varphi(x) \subset A/p$, invece se $x \notin A$ si ha $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1}) \in A/p$. Quindi, A/p è anello di valutazione di A'/p.

Teorema 1.8. *Sia R_v anello di valutazione, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(1) - *R_v è un anello di valutazione discreta*

(2) - *R_v un è dominio a ideali principali*

(3) - *R_v è noetheriano*

Dimostrazione. Sia K il campo delle frazioni di R_v e m il suo ideale massimale.
(1) $\Longrightarrow$ (2) Sia v_R la valutazione di R con gruppo valore $\mathbb{Z}$. Allora esiste un $s \in m$ tale che $v_R(s) = 1$. Preso un elemento x di m, $x \neq 0$, la valutazione $v_R(x) > 0$, cioè $v_R(x) = n$ con n intero positivo; allora $v_R(x/s^n) = 0$, e posso scivere anche $x = s^n u$ con u un'unità di R. In particolare, $m = sR$. Sia ora $I \neq 0$ un ideale di R; allora $\{v_R(a) : a \in I, a \neq 0\}$ è un insieme di interi non negativi di cui n è il più piccolo elemento. Se $n = 0$ allora I contiene un'unità di R, cioè $I = R$. Se $n > 0$ allora esiste una $x \in I$ tale che $v_R(x) = n$, per cui $I = xR = s^n R$. Quindi, R è un dominio a ideali principali ed ogni suo ideale non nullo è potenza di $m = sR$.
(2) $\Longrightarrow$ (3) discende dal fatto che un dominio a ideali principali è noetheriano.

(3) $\Longrightarrow$ (2) In generale, dati due ideali di un anello di valutazione, l'uno contiene l'altro, così ogni ideale finitamente generato $a_1R, ..., a_rR$ è uguale ad uno degli a_iR, e perciò è principale. Quindi, se R è noetheriano ogni ideale di R è principale.
(2) $\Longrightarrow$ (1) Siccome R_v è a ideali principali, si scrive $m = xR$ per qualche x. Sia l'insieme $I = \bigcap_{r=1}^{\infty} x^r R$ allora I è ancora un ideale principale e lo posso scrivere, quindi, come $I = yR$. Se $y = xz$ allora da y appartenente a $x^r R$ si ottiene z appartenente a $x^{r-1}R$, e, siccome questo vale per ogni r, si ha z sta in I, quindi lo posso scrivere come $z = yu$. Siccome $y = xz = xyu$, si ha $y(1 - xu) = 0$, ma allora essendo x un elemento di m devo avere $y = 0$, e perciò $I = (0)$. Per ogni elemento non nullo a di R è definito un intero $r \geq 0$ tale che a appartenga a $x^r R$, ma non a $x^{r+1}R$. E' facile verificare che se a, b, c, $d \in R$ $\{0\}$ soddisfano $a/b = c/d$ allora $v(a) - v(b) = v(c) - v(d)$; per cui per $v(\xi) = v(a) - v(b)$ per $\xi = a/b \in K^*$ ho la mappa $v : \mathrm{K}^* \to \mathbb{Z}$ il cui anello di valutazione è R. Il gruppo valore di v è chiaramente $\mathbb{Z}$, cioè R è anello di valutazione discreta.

Osservazione 1.2. Se A è un anello di valutazione discreta di K allora A è un dominio locale noetheriano di dimensione 1, in cui l'ideale massimale è principale e ogni ideale non nullo è una potenza dell'ideale massimale.

Definizione 1.25. Gli elementi non invertibili di R_v sono gli elementi di K con valore positivo ed esse costituiscono un ideale primo, detto **centro della valutazione** e denotato con M_v, $M_v = \{x \in R_v / v(x) > 0\}$.

Definizione 1.26. Sia v una valutazione di K su k, la **dimensione di v** su k è il grado di trascendenza del campo residuo di v su k, $[R_v/M_v : k]$. Una valutazione 0-dimensionale prende il nome di **posto**.

Si osservi che valutazioni equivalenti hanno lo stesso anello di valutazione e lo stesso campo residuo, avendo già osservato che tali valutazioni sono indistinguibili. Viceversa, se due valutazioni di K hanno lo stesso anello di valutazione allora sono equivalenti.

Lemma 1.7. *Sia A un anello locale e m il suo ideale massimale. Dato un anello di valutazione B del campo A/m, sia B' la sua immagine inversa in A allora B' è anello di valutazione con lo stesso campo di frazioni K di A. Tale* **anello** *si chiama* **composto** *di A e B.*

Dimostrazione. Si noti che $m \subset B$ e $B/m = \overline{B}$, dove B è chiamato il composto di A e $\overline{B}$. Se $x \in A$ e $x \notin S$ allora x è un'unità di A e $\varphi(x) \notin \overline{B}$. Allora $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1} \in \overline{B}$, e quindi $x^{-1} \in B$. D'altronde, se $x \in K - A$ allora $x^{-1} \in m \subset B$, provando così che $B \cup B^{-1} = K$.

Definizione 1.27. Una **valutazione** v si dice **composta** con un'altra valutazione v_1 se esiste una valutazione v_1 di R_{v_1}/M_{v_1} tale che R_v sia l'immagine inversa in R_{v_1} dell'anello di valutazione di v'.

Definizione 1.28. Il numero massimo di elementi razionalmente indipendenti di Γ *è* chiamato il **rango razionale di v**, che pu*ò* essere anche infinito.

Una valutazione di rango 1 risulta essere discreta se il suo gruppo valore *è* il gruppo additivo degli interi.

1.7 Teorema fondamentale degli ordini principali

Il teorema dimostrato in questo paragrafo, come si osserverà successivamente, riveste un ruolo fondamentale nel lavoro eseguito da Zariski.
Si ricordi che un dominio d'integrità è un anello di valutazione se per ogni elemento del campo delle frazioni di K risulta $x \in R$ o $x^{-1} \in R$. Un anello di valutazione R è, come già osservato, un anello locale e si indica con m_R il suo ideale massimale.

Definizione 1.29. Se R e S sono anelli locali tali che R contenga S e $m_R \cap S = m_S$, si dice che R domina S e si scrive $R \geq S$.

Teorema 1.9. *Sia K un campo, A un suo sottoanello e p un ideale primo di A. Allora esiste un anello di valutazione R di K tale che $R \supset A$ e $m_R \cap A = p$.*

Dimostrazione. Considerando A_p al posto di A, si può assumere che A sia un anello locale con $p = m_A$. Sia F l'insieme di tutti i sottoanelli B di K contenenti A e tali che l'elemento 1 non appartenga a pB. Ora $A \in F$ e, se G è un sottoinsieme di F totalmente ordinato rispetto all'inclusione, allora l'unione di tutti gli elementi di G è ancora un elemento di F. Quindi, dal *lemma di Zorn* F ha un elemento R che è massimale rispetto l'inclusione. Siccome $pR \neq R$, esiste un ideale massimale m di R contenente pR. Allora R è contenuto in $R_m \in F$, in modo tale che $R = R_m$ e, conseguentemente, R è locale. Anche p è contenuto in m ed è un ideale massimale di A, in modo tale che $m \cap A = p$. A questo punto rimane da dimostrare solo che R è un anello di valutazione di K. Se x è un elemento di K ma non di R, allora 1 appartiene a $pR[x]$, dal momento che $R[x]$ non si trova in F. Esiste allora una relazione della forma:

$$1 = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{1.5}$$

con gli a_i elementi di pR. Siccome $1 - a_0$ è invertibile in R, si inverte la *relazione* (1.5) nella seguente:

$$1 = b_1 x + ... + b_n x^n \tag{1.6}$$

con i b_i elementi di m. Il valore di n nelle due relazioni è quello più piccolo possibile. Analogamente per x^{-1} non appartenente a R si ha:

$$1 = c_1 x^{-1} + ... + c_l x^{-l} \tag{1.7}$$

con gli c_i elementi di m e il valore di l il più piccolo possibile. Se $n \geq l$, si moltiplica la *relazione* (1.7) per $b_n x^n$ e sottraendola alla relazione (1.6) si ottiene ancora una relazione della forma (1.6), ma con un grado minore di n, che contraddice la scelta stessa di n; se $n < l$, si arriva alla stessa contraddizione del caso precedente. Per cui se x non appartiene a R, x^{-1} deve essere un elemento di R. E questo dimostra che R è un anello di valutazione.

Teorema 1.10. *Sia K un campo, A un suo sottoanello e C la chiusura integrale di A in K. Allora C è l'intersezione di tutti gli anelli di valutazione di K contenenti A.*

Dimostrazione. Si considera C' l'intersezione di tutti gli anelli di valutazione di K contenenti A. La tesi si riduce, quindi, a verificare l'inclusione $C' \supset C$. Si prende un elemento x di K che non sia integrale su A e si dimostra che esiste un anello di valutazione di K contenente A ma non x. L'ideale $x^{-1}A[x^{-1}]$ di $A[x^{-1}]$ non deve contenere l'elemento 1, altrimenti verrebbe contraddetta l'ipotesi di non integralità di x su A. Quindi, esiste un ideale massimale p di $A[x^{-1}]$ contenente $x^{-1}A[x^{-1}]$, e dal *teorema* (1.8) esiste un anello di valutazione R di K contenente $A[x^{-1}]$ e $m_R \subset A[x^{-1}] = p$. In conclusione, x^{-1} è un elemento di m_R, e quindi x non appartiene a R.

Capitolo 2

Preliminari geometrici

2.1 Varietà affini e proiettive

Rimandando per esempio al capitolo 1 dell' $Hartshone$ [H2] perle definizioni moderne, abbiamo preferito, in questo capitolo, mantenere le definizioni originali di Zariski ([ZS]). Sia k un campo algebricamente chiuso.
Si ricordi che lo $spazio\ affine\ n-dimensionale$ $\mathbb{A}_K^n$ è l'insieme di tutti i punti $(\xi_1, ..., \xi_n)$, le cui coordinate non omogenee (cfr.$paragrafo$ (2.2)) sono elementi di K. Analogamente, lo $spazio\ proiettivo\ n-dimensionale$ $\mathbb{A}_K^n$ è l'insieme di tutti i punti $(\eta_0, ..., \eta_n)$, le cui coordinate omogenee (cfr.$paragrafo$ (2.2)) sono elementi di K. $A = k[\Xi_1, ...\Xi_n]$ si chiama l'*anello dei polinomi* in n variabili su k: un polinomio $f \in A$ è una funzione $f : \mathbb{A}_K^n \rightarrow \mathbb{A}$ che associa ad un punto $P = (\xi_1.....\xi_n)$ $f(\xi_1.....\xi_n)$.

Definizione 2.1. Una **varietà algebrica affine** (**proiettiva**) è un sottoinsieme irriducibile chiuso di $\mathbb{A}_K^n$ $(\mathbb{P}_K^n)$.

Definizione 2.2. L'**ideale di una varietà** affine $I(V)$è l'insieme di tutti i polinomi di A che si annullano nei punti della varietà. Ogni punto (ξ) di V è detto uno zero dell'ideale di V.

Definizione 2.3. 1. Una **curva affine** è una varietà affine ottenuta da un polinomio irriducibile in $A = k[\xi_1, \xi_2]$ e definita dall'equazione $f(\xi_1, \xi_2) = 0$, il cui grado è il grado della curva.

2. Un'**ipersuperficie affine** è una varietà affine ottenuta da un polinomio irriducibile in $A = k[\xi_1, ..., \xi_n]$ con $n \ \geq 2$.

L'insieme di punti di $\mathbb{A}_n^K$ che soddisfano l'insieme finito di equazioni $f_1 = 0, ..., f_q = 0$ (dove $f_i \ \in A$) è un insieme algebrico chiuso, chiamata varietà dell'ideale generata dagli f_i. Viceversa, ogni varietà può così essere definita da un sistema finito di equazioni polinomiali a coefficenti in k per ogni ideale avente una base finita.
Siano W e W' sottoinsiemi di V, a e b ideali di A.
Valgono allora le seguenti proprietà:

(1) - $a \in b$ se e soltanto se $V(a) \supset V(b)$

(2) - se $W \subset W'$ allora $I(W) \supset I(W')$ con W e W' sottoinsiemi di V

(3) - $V(\Sigma_i a_i) \ = \ \bigcap_i V(a_i)$

(4) - $I(\bigcup_i W_i) \ = \ \bigcap_i I(W_i)$

(5) - $V(a \cap b) = V(ab) = V(a) \cup V(b)$

Definizione 2.4. L'**anello delle coordinate affini** $A(V)$
è dato da $A(V) = A/I(V)$.

Definizione 2.5. Un insieme algebrico chiuso si dice **riducibile** su k se può essere decomposta nella somma di due varietà V_1 e V_2 definite su k e sottoinsiemi propri di V. Se tale decomposizione non esiste la varietà si dice **irriducibile**.

Teorema. *Una varietà V è irriducibile se e soltanto se il suo ideale $I(V)$ è un ideale primo.*

Dimostrazione. Sia V una varietà iiducibile. Siano f_1, f_2 due polinomi tali che $f_i \notin I(V)$, cioè non si annullano nei punti della varietà. Sia W_i l'insieme dei punti di V in cui le f_i si annullano. Allora W_i è una varietà ed è una sottovarietà propria di V, essendo $f_i \notin I(V)$. Siccome V è irriducibile, anche $W_1 \cup W_2$ è sottoinsieme proprio di V. Sia (x) un punto di V, ma non di $W_1 \cup W_2$. Allora $f_1 \neq o$, $f_2 \neq 0$, quindi $f_1 f_2 \notin I(V)$. Questo mostra che $I(V)$ è primo.
Viceversa, sia $I(V)$ un ideale primo. Sia $V = V_1 \cup V_2$, dove V_i sono varietà

(definite su k) e si assume $V_2 \neq V$. Si dimostra che $V_1 = V$, da cui V è irriducibile. Dalla *proprietà* (4) si ha:

$$I(V) = I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2) \supset I(V_1)I(V_2) \tag{2.1}$$

Siccome $I(V_2) \supset I(V)$ e $I(V)$ è primo, segue che $I(V) \supset I(V_1)$ e conseguentemente $V = V_1$.

Teorema 2.1. *Ogni insieme algebricamente chiuso di $\mathbb{A}^n$ essere rappresentata come somma finita di varietà irriducibili V_i e tale decomposizione è unica se essa è minima. Le varietà della decomposizione sono dette mathbfcomponenti irriducibili.*

Dimostrazione. L'esistenza della decomposizione si dimostra indirettamente, considerando una varietà V per cui il teorema sia falso. Allora V deve essere riducibile, cioè $V = W \cup W'$ con $W \subset V$ e $W' \subset V$. Quindi, l'affermazione del teorema deve essere falsa almeno per una delle due varietà W o W'. Questo mostra che se il teorema è falso per una varietà V, allora esiste una sottovarietà propria V_1 di V per cui il teorema è falso. In conclusione si ha una catena infinita di varietà $V \supset V_1 \supset V_2 \supset ...$ strettamente discendente, in contraddizione con il seguente risultato: se V_1 e V_2 sono distinte, e quindi $I(V_1) \neq I(V_2)$, la catena discendente di varietà $V_1 \supset V_2 \supset ...$ è necessariamente finita.
L'unicità si dimostra considerando un'altra decomposizione minima di V in varietà irriducibili e verificando che le due decomposizioni coincidono.

Nel passaggio dallo spazio affine al quello proiettivo tramite la trasformazione delle coordinate affine non omogenee a quelle proiettive omogenee, si introducono le analoghe nozioni generali di varietà e anello di coordinate di tale varietà.

Definizione 2.6. Sia V una varietà irriducibile non vuota in $\mathbb{P}_n^K$ e sia p un ideale primo omogeneo di V in $k[\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_n]$. L'anello delle classi residue $k[\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_n]/p = k[\eta_0, \eta_1, ..., \eta_n]$ è chiamato **anello delle coordinate omogenee** di V, dove gli η_i sono p - esidui di Θ_i.

Il campo quoziente dell'anello delle coordinate $k[\Theta]/p$ è un anello graduato e, quindi, si possono considerare i suoi elementi omogenei. Allora:

Definizione 2.7. Il **campo delle funzioni** di V è l'insieme di tutti i quozienti a/b denotato con $k(V)$, dove a e b sono elementi omogenei dello stesso grado di $k[\Theta]/p$ (con $b \neq 0$). Esso è ovviamente un sottocampo del campo quoziente di $k[\Theta]/p$.

Il campo $k(V)$ è generato su k dalle frazioni η_i/η_j, in cui il denominatore non *è* nullo; se s è un indice tale che $\eta_s \neq 0$, si ha $k(V) = (\eta_0/\eta_s, \ldots.., \eta_n/\eta_s)$.

Definizione 2.8. Il grado di trascendenza di $k(V)$ su k è chiamato la **dimensione** di V e anche la **dimensione proiettiva** dell'ideale primo omogeneo p.

La dimensione di V è rappresentata da un intero compreso tra 0 e n. Siccome le η_i sono coordinate omogenee, η_s è trascendente su $k(V)$. Quindi, il grado di trascendenza di $k(\eta_0, \eta_1, \ldots.., \eta_n)/k$ (che è uguale alla dimensione di p) è più grande della dimensione di V.
In accordo con le precedenti definizioni, $k(V)$ si identifica con $k(P)$, dove P è un generico punto di V, e $\dim V = \dim P/k$. Si definisce infine una topologia su $\mathbb{A}^n_K$.

Definizione 2.9. La **topologia di Zariski** su $\mathbb{A}^n_K$ è la topologia i cui insiemi chiusi sono gli insiemi algebrici, dove $Y \in \mathbb{A}^n_K$ è un insieme algebrico se $Y = Z(T) = \{P \in \mathbb{A}^n_K / f(P) = 0 \; \forall \; f \in T\}$ per qualche $T \subset k[\xi_1, ..., \xi_n]$.

Tale definizione ha senso in quanto sono soddisfatti gli assiomi dei chiusi:

(1) - $\emptyset = Z(1)$

(2) - $\mathbb{A}^n_K = Z(0)$

(3) - $Z(T_1) \cup Z(T_2) = Z(T_1 T_2)$, cioè l'unione di insiemi algebrici è ancora un insieme algebrico

(4) - $\bigcap_{i \in I} Z(T_i) = Z(\bigcup_{i \in I} T_i)$, cioè l'intersezioni di insiemi algebrici è ancora un insieme algebrico e se un punto P sta nell'intersezione vuol dire che annulla tutti i polinomi dei T_i.

2.2 Omogenizzazione e Deomogenizzazione, anelli locali

Gli spazi proiettivi sono definiti come un ampliamento di quelli affini, ottenuti con l'aggiunta di punti detti "impropri". Nel passaggio dallo spazio affine a quello proiettivo si ha una corrispondenza biunivoca definita dalla funzione $f : \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K \backslash H_0$, dove H_0 è l' *iperpiano improprio* ed i suoi punti sono chiamati *punti impropri* oppure, utilizzando il linguaggio di Zariski, $punti\ di\, distanza\ infinita$. Tale applicazione identifica, quindi, lo spazio affine con il complementare dell'iperpiano $H_0 = 0$ nello spazio proiettivo. La mappa f, infatti, associa ad ogni punto $P = [\eta_1, ..., \eta_n]$ dello spazio $\mathbb{A}^n_K$ un punto $f(P) = [1, \eta_1, ..., \eta_n]$ dello spazio $\mathbb{P}^n_K \backslash H_0$, descrivendo così il passaggio dalle coordinate non omogenee del punto P a quelle omogenee di $f(P)$. Tale processo prende il nome di *omogenizzazione*.
Viceversa, nel passaggio dallo spazio proiettivo a quello affine si ha una corrispondenza biunivoca definita dalla funzione $g : \mathbb{P}^n_K \backslash H_0 \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$. Tale applicazione associa ad ogni punto $Q = [\eta_0, ..., \eta_n]$ dello spazio $\mathbb{P}^n_K \backslash H_0$ un punto $g(Q) = [\eta_1/\eta_0, ..., \eta_n/\eta_0]$ dello spazio $\mathbb{A}^n_K$. La mappa f descrive, quindi, il passaggio dalle coordinate omogenee η_i $(i = 0, .., n,)$ del punto Q a quelle non omogenee $\xi_j = \eta_j/\eta_0$ $(j = 1, ..., n)$ del punto $g(Q =)$. Tale processo prende il nome di *deomogenizzazione*.
Il campo Σ delle funzioni razionali in V è il campo $K(\xi_1, ..., \xi_n)$ generato dalle coordinate non omogenee ξ_i. Esso consiste di tutti gli elementi del campo $K[\eta_0, ..., \eta_n]$ che sono omogenei di grado 0.
Si hanno, quindi, due anelli: $K[\eta_0, ..., \eta_n]$ e $A = K[\xi_1, ..., \xi_n]$.
Usando le coordinate omogenee η_i, si definisce l'anello quoziente di un punto di una varietà V.

Definizione 2.10. Sia Σ il campo delle funzioni razionali di V. Si definisce l'**anello quoziente** $Q(P)$di un punto P di V come l'anello di tutti i quozienti $f(\eta)/g(\eta)$, dove f e g sono polinomi in $\eta_0, ..., \eta_n$ dello stesso grado e tali che $g \neq 0$ in P.

In altre parole, $Q(P)$ consiste di tutte le funzioni (o polinomi) in Σ che hanno un valore definito e finito in P. Similmente si definisce l'anello quoziente $Q(W)$ di ogni sottovarietà irriducibile W di V, con la condizione $g(\eta) \neq 0$ in W.

2.3 Funzioni regolari, mappe razionali e birazionali, morfismi

Definizione 2.11. Sia V una varietà proiettiva e $P \in V$, una **funzione** f è **regolare in P** se esiste un intorno aperto $U(P)$ di P in V nella topologia di Zariski ed esistono polinomi g, h di $K[\xi_1, ..., \xi_n]$ con $g/_{U_P} \neq 0$ tale che $f(Q) = h(Q)/g(Q)$ per ogni Q di U_P. Una funzione $f : \mathrm{V}_K^n \to \mathrm{K}$ è **regolare** se lo è in ogni punto di K.

Si può a questo punto introdurre l'insieme delle funzioni regolari:

Definizione 2.12. Preso P un punto della varietà V, l'insieme $\theta_{V,P} = \{(f, U)/U$ aperto di P in V e f funzione regolare su $U\}$ / $\sim$ è detto **germe di funzioni regolari**, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è data dalla seguente condizione: $(f, U) \sim (g, V)$ se e soltanto se esiste un aperto non vuoto $W \subseteq U \cap V$ tale che $f \equiv g$ su di esso. Una classe di equivalenza $(f, U)_\star$ è un germe, chiamato **mappa razionale**.

Si osservi che $\theta_{V,P}$ è un anello. Infatti, si possono definire la somma ed il prodotto di germi rispettivamente in questo modo:

$$(f, U)_\star + (g, V)_\star = (f + g, W)_\star$$
$$(f, U)_\star * (g, v)_\star = (f * g, W)_\star$$

In particolare, $\theta_{V,P}$ è un anello locale: infatti, se $f(P) \neq 0$ allora $1/f$ è regolare in un intorno di P; il campo residuo $\theta_{V,P}/m \cong k$.

Definizione 2.13. $k(V) = \{(f, U)_\star/U$ aperto di P in V e f funzione regolare su $U\}$ / $\sim$ è detto il campo delle **funzioni razionali**, dove la $\sim$ è stata già definita sopra.

Si noti che $k(V)$ è un campo in quanto ogni elemento di tale insieme ha un inverso $(1/f, U)_\star$.
Quindi, ho definito per una varietà V l'anello delle funzioni globali θ_V, l'anello locale $\theta_{V,P}$ e il campo delle funzioni razionali. Dalla restrizione di funzioni si può ottenere la mappa naturale $\theta_V \longrightarrow \theta_{V,P} \longrightarrow k(V)$ iniettiva, e trattare

quindi $\theta_{V,P}$ e θ_V come sottoanelli di $k(V)$. $\theta_{V,P}$, θ_V e $k(V)$ sono invarianti di V per isomorfismi. E' opportuno enunciare un teorema che ritornerà utile inerente le funzioni regolari e razionali sopra introdotte .

Teorema 2.2. *Sia V una varietà affine con anello di coordinate affini $A(V)$, $V = Z(I)$ con I ideale primo, allora risulta:*

(1) - $\theta_V \cong A(V)$*: f è una funzione regolare su tutto V se e soltanto se f è un polinomio a coefficenti in k*

(2) - *esiste una corrispondenza biunivoca* $(1-1)$ *tra i punti di V e gli ideali massimali di $A(V)$*

(3) - *per ogni P in V $\theta_{V,P} \cong A(V)_{m_P}$, che rappresenta la localizzazione di A in m_P, ed inoltre $\theta_{V,P}$ e V hanno la stessa dimensione*

(4) - *$k(V) \cong k(A(V))$ che denota il campo dei quozienti di $A(V)$, e quindi $k(V)$ è un'estensione finitamente generata di K di grado uguale alla dimensione della varietà.*

Dalla condizione (3) si deduce in sostanza che f è un germe di funzioni regolari in P se e solo se f può essere scritto come rapporto di due polinomi dello stesso grado h/g con $g(P) \neq 0$. Dalla condizione (4) si deduce che f è razionale su V se e solo $f = h/g$ con $g \neq 0$.

Dimostrazione. (2) - Dalla corrispondenza esistente tra insiemi algebrici in $\mathbb{A}^n$ e gli ideali radicali in A, si ottiene una corrispondenza tra i punti della varietà (che sono sottoinsiemi algebrici minimali di V) e gli ideali massimali di A contenenti $I(V)$. Passando ai quozienti, si arriva ad una corrispondenza tra questi quozienti e gli ideali massimali di $A(V)$. Usando, infine, α : A(V) $\to \theta_V$ (che identifica gli elementi di $A(V)$ con funzioni regolari su V), l'ideale massimale corrispondente a P $\in V$ è proprio dato dall'ideale delle funzioni che si annullano in P, $m_P = \{f \in A(V)/f(P) = 0\}$. Quindi, c'è una corrispondenza $(1 : 1)$ tra i punti di V e gli ideali massimali del suo anello di coordinate.
(3) - Per ogni P si ha la mappa naturale $\mathrm{A(V)}_{\mathrm{m_P}} \to \theta_{V,P}$. Questa è iniettiva in quanto α è iniettiva, ed è suriettiva dalla definizione di funzione regolare. Per cui $\theta_{V,P} \cong A(V)_{m_P}$. La dim $\theta_{V,P} = hl\ m_P$. Siccome $A(V)/m_P \cong k$ segue che θ_P e V hanno la stessa dimensione.

(4) - Dalla (3) risulta $A(V) \cong \theta_{V,P}$ per ogni P ed *è* la stessa cosa con $k(V)$, in quanto ogni funzione razionale *è* ora in qualche $\theta_{V,P}$. Ora $A(V)$ è una k-algebra finitamente generata, e $k(V)$ è un campo di estensione finitamente generato di k, e quindi $k(V)/K = dimV$. Questo prova la *condizione* (4).
(1) - Definisco una mappa f : A(V) $\rightarrow \theta_V$. Ogni polinomio $f \in A = k[\xi_1, ..., \xi_n]$ definisce una funzione regolare su A_n e quindi su V, in quanto $V \subseteq \mathrm{A}_n$. Quindi, si ha un omomorfismo A $\rightarrow \theta_V$ il cui nucleo è $I(V)$, ottenendo cos*ì* un omomorfismo iniettivo A(V) $\rightarrow \theta_V$. Noto che $\theta_V \subseteq \cap_P$, tutti i suoi anelli sono considerati sottoanelli di k(V). Usando le *condizioni* (2) e (3), si ha $A(V) \subseteq \theta_V \subseteq A(V)_m$. Siccome B è un dominio d'integrità, B è uguale all'intersezione delle sue localizzazioni di tutti gli ideali massimali. Questo dimostra la *condizione* (1).

A questo punto introduco il concetto di morfismo:

Definizione 2.14. Date due varietà algebriche V e V' un **morfismo** di V in V' è un'applicazione continua f : V $\rightarrow$ V$'$ tale che la sua composizione con una funzione regolare dà ancora una funzione regolare: per ogni aperto U in V' e α appartenente a $\theta'_V(U)$ si ha $\alpha \circ f \in \theta_V(f^{-1})(U)$.

Definizione 2.15. Un **isomorfismo** è un morfismo che possiede un inverso, cioè una funzione g : V$'$ $\rightarrow$ V tale che $g \circ f = id_V$ e $f \circ g = id_{V'}$.

Si noti che per ogni punto v di V il morfismo f : V $\rightarrow$ V$'$ induce un omomorfismo di anelli locali $f_v : \theta_{\mathrm{V',f(v)}} \rightarrow \theta_{\mathrm{V,v}}$.

Si tenga presente, inoltre, che:

- la composizione di morfismi è ancora un morfismo
- se V è una sottovarietà di V', l'inclusione è un morfismo come, in particolare, l'identità nel caso di $V = V'$
- se V e V' sono due varietà, le proiezioni p_V : V $\times$ V$'$ $\rightarrow$ V e $p_{V'}$: V $\times$ V$'$ $\rightarrow$ V$'$ sono morfismi

Definizione 2.16. Un'**applicazione razionale** è un morfismo T : V $- --$ > V$'$ definito su un aperto U di V in V'.

Un criterio molto utile per riconoscere un morfismo è dettato dal seguente risultato:

Lemma 2.1. *Sia* $f : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{V}'$ *un'applicazione continua tra due varietà algebriche. Allora* f *è un morfismo se e soltanto se un ricoprimento aperto* W_j *di* V' *e per ogni* j *di* J *esiste un ricoprimento aperto* $U_{i,j}$ *di* $f^{-1}(V_j)$ *tale che l'applicazione* $f_{i,j} : \mathrm{U_i} \rightarrow \mathrm{V_j}$ *indotta da* f *sia un morfismo per ogni* j *di* J.

Con l'introduzione dei morfismi, è possibile ridefinire un'applicazione razionale come una classe di equivalenza di morfismi $f_U : \mathrm{U} \rightarrow \mathrm{V}'$ dove U è un aperto di V e con la relazione di equivalenza già prima considerata. Si indicherà un'applicazione razionale con $f : V - -- > V'$.

Definizione 2.17. Un'applicazione razionale che possiede un'inversa si dice un **isomorfismo birazionale**. Due varietà V e V' tra cui esiste un isomorfismo birazionale si dicono **birazionalmente equivalenti**. Tale relazione stabilisce nello specifico una corrispondenza tra i punti delle due varietà.

Definizione 2.18. Una varietà V si dice un **modello** di una classe di equivalenza birazionale. Dato un campo di funzioni razionali Σ, un **modello** è una varietà algebrica V proiettiva, il cui campo di funzioni razionali è Σ.

Sia V una varietà algebrica irriducibile r-dimensionale nello spazio proiettivo n-dimensionale e $\Sigma = K(\xi_1, ..., \xi_n)$ il campo delle funzioni razionali in V, generato dalle coordinate ξ_i dei suoi punti, che sono funzioni algebriche delle r variabili indipendenti. Analogamente si definisce una varietà algebrica irriducibile V' e $\Sigma' = K(\xi'_1, ..., \xi'_n)$. Le due varietà si dicono **birazionalmente equivalenti** se i due campi Σ e Σ' risultano isomorfi. Le due varietà possono essere, quindi, considerate come modelli proiettivi dello stesso campo di funzioni algebriche Σ.
Se l'applicazione è una mappa di V in sé stessa si parla allora di **trasforma−zione razionale** di V. Le trasfomazioni birazionali di una varietà costituiscono un gruppo rispetto alla composizione. Su queste trasformazioni si argomenter*à* nello specifico nel prossimo paragrafo.

Sia $f : \mathrm{V} - -- > \mathrm{V}'$ *è* un'applicazione birazionale e sia $f : \mathrm{U} - -- > \mathrm{U}'$ *è* un morfismo che lo rappresenta, sia $\Gamma \subset U \times U' \subset V \times V'$ il suo grafico; la variet*à* $V^\star = \Gamma^\star_f \subset V \times V'$, che è birazionale sia a V che a V' si dice

chiusura del grafico di f. Si ha, quindi, il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} & V^\star \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ V \arrow[rr, dashed] & & V' \end{tikzcd}$$

Infine, concludendo il paragrafo è bene introdurre la nozione di varietà non singolare, che è oggetto di studio particolare in geometria algebrica.

Definizione 2.19. Una varietà V è detta **non singolare in** un suo punto $\mathbf{P}$ se l'anello locale $\theta_{V,P}$ è un anello locale regolare. Una **varietà** V è **non singolare** se lo in ogni suo punto.

2.4 Un Esempio di scoppiamento

Nel precedente paragrafo è stato messa in risalto l'importanza del grafico di un morfismo tra due varietà birazionali. Adesso si osserverà con un esempio avviene nei punti in cui il morfismo non è definito.

Definizione 2.20. Sia V una varietà affine e W una sua sottovarietà sia $f : V --- > \mathbb{P}^n$ un'applicazione razionale definita da $f(\xi) = [x_0, ..., x_n]$, dove gli x_i sono un sistema di generatori per l'ideale di W in V. Lo **scoppiamento** di V lungo W è una mappa birazionale regolare $g : \Gamma_f \longrightarrow V$ e si denota con $Bl_W(X)$. L'immagine inversa $E = g^{-1}(W) \in \Gamma_f$ è chiamata il **divisore eccezionale**.

L'esempio più semplice di scoppiamento è rappresentato dall'applicazione $f : \mathbb{A}^2 - -- > \mathbb{P}^1$ data da $f(\xi_1, \xi_2) = [\eta_0 : \eta_1]$. La mappa f è definita in $\mathbb{A}^{\backslash}\{(0,0)\}$ e manda le rette passanti per l'origine di $\mathbb{A}^2$ in punti di $\mathbb{P}^1$. Sia Γ_f il grafico della f, lo *scoppiamento* di $\mathbb{A}^2$ rispetto all'origine si indica con $Bl_0\mathbb{A}^2$ ed è una sottovarietà di $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. Si consideri nello spazio affine 2-dimensionale la curva di equazione $f = \xi_1\xi_2 = 0$. Nell'origine tale curva presenta un punto di singolarità. Sia $g : \mathrm{Bl}_0\mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$. Per determinare lo scoppiamento rispetto l'origine il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_0 & \eta_1 \end{pmatrix}$$

deve essere nullo. Si possono presentare, quindi, due casi. Se $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$, allora $g^{-1}(\xi_1, \xi_2) = ((\xi_1, \xi_2), (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2))$. Invece, se $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$, allora $g^{-1}(0,0) = \mathbb{P}^1$, in quanto nel punto $(0,0)$ la codimensione deve essere 1. Questa è una conseguenza del *teorema A* enunciato nell' introduzione del capitolo 4. Sia U_0 un intorno dell'origine in cui $\eta_0 \neq 0$ e $\xi_2 = \xi_1\eta_1/\eta_0$, e sia U_1 un intorno dell'origine in cui $\eta_1 \neq 0$ e $\xi_1 = \xi_2\eta_0/\eta_1$. In U_0 l'equazione della curva diventa:

$$f = \xi_1\xi_2 = \xi_1^2 \cdot \eta_1/\eta_0 = 2E + (\eta_1/\eta_0) \tag{2.2}$$

Se ξ_1 è nullo, tale risulta anche ξ_2, per cui $\xi_1 = 0$ è l'equazione di E, che è il divisore eccezionale. In U_1 l'equazione della curva diventa:

$$f = \xi_1\xi_2 = \xi_2^2 \cdot \eta_0/\eta_1 = 2E + (\eta_0/\eta_1) \tag{2.3}$$

Se ξ_2 è nullo, tale risulta anche ξ_1, per cui $\xi_2 = 0$ è l'equazione di E.
Più in generale, si consideri la retta $f = \xi_2 - m\xi_1$ e si dimostra che lo scoppiamento è data da $f = E + (\eta_1 - m\eta_0)$, dove m è il coefficenete angolare della retta tangente alla curva. Infatti:

$$\begin{gathered} g^{-1}(\xi_2 - m\xi_1) = \xi_1\eta_1/\eta_0 - m\xi_1 = \xi_1(\eta_1/\eta_0 - m) \text{ in } U_0 \\ g^{-1}(\xi_2 - m\xi_1) = \xi_2 - m\eta_0/\eta_1 = \xi_2(1 - m\eta_0/\eta_1) \text{ in } U_1 \end{gathered}$$

da cui risulta che $g^{-1} = E + h$, dove h vale $\eta_1/\eta_0 - m$ in U_0 e $1 - \eta_0/\eta_1$ in U_1. Quindi, l'ntersezione degli assi cartesiani rappresentati da h con il divisore eccezionale E è data da $\eta_1 - m\eta_0$.

Capitolo 3

Il punto di vista di Zariski

Zariski concentra la sua attenzione sul campo delle funzioni razionali Σ e definisce un modello proiettivo (cfr. *definizione* (2.17)). Egli si pone essenzialmente due problemi. Il primo inerente l'esistenza di un modello con buone proprietà del campo Σ (problema della *desingolarizzazione*), mentre il secondo problema si incentra sulla ricerca di quanti modelli esistano.
Un'importante concetto su cui si basa tutta la teoria ideata da Zariski è quello di centro di una valutazione.

Definizione 3.1. Data una valutazione v del campo delle funzioni razionali Σ di un modello V, sia $\xi = f/g$ un elemento di Σ l'ideale

$$M_v = \{f/g : f, g \in A(V) \textit{ tale che } v(f) > 0\}$$

è il centro algebrico della valutazione v. L'insieme dei numeratori degli elementi di M_v definisce un ideale primo I_v in $A(V)$. Il luogo $V(I_V)$ è il **centro della valutazione** di v su V.

Si consideri ora la seguente valutazione di $K(\xi_1, \xi_2)$:
$v(f/g) = molt_{(0,0)}f - molt_{(0,0)}g$. Tale valutazione è discreta e si dimostra facilmente che $R_v = K(\xi_1, \xi_2)_{(\xi_1, \xi_2)}$, cosicchè il suo centro in $\mathbb{A}^2$ è dato da $(0,0)$. Se si considera $Bl_{(0,0)}\mathbb{A}^2$, birazionale ad $\mathbb{A}^2$, è facile vedere che il centro di v su tale modello è il divisore eccezionale.
I seguenti lemmi sono corollari del *teorema* (1.9).

Lemma 3.1. *Ogni sottovarietà è centro di una valutazione.*

Lemma 3.2. *Dato un anello di valutazione R_v e una varietà V esiste una sottovarietà W di V che è centro di R_v.*

Definizione 3.2. Dato un modello V di Σ, sia $i : \theta_{\mathrm{V,W}} \hookrightarrow \Sigma$ l'inclusione dell'anello $\theta_{V,W}$ nel campo delle funzioni razionali. Si definisce il **campo dei quozienti** $Q(W) := i(\theta_V, W) \subset \Sigma$, cioè $Q(W)$ è un sottoanello di Σ.

La nozione di normalità alla base della teoria ideata da Zariski è dettato da una conseguenza del *teorema fondamentale degli ordini principali* inerente $Q(W)$ è data dal seguente:

Corollario 3.1. *Sia V un modello di un campo K. Sia W una sottovarietà e sia $Q(W)'$ la chiusura integrale di $Q(W)$. Allora la chiusura dell'anello quoziente $Q(W)$ è l'intersezione di tutti gli anelli di valutazione aventi centro W:*

$$Q(W)' = \bigcap_{W \text{ centro di } v} R_v \tag{3.1}$$

In particolare, se $Q(W)' = Q(W)$ allora:

$$Q(W)' = \bigcap_{W \text{ centro di } v} R_v \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Per il *teorema fondamentale degli ordini principali*

$$Q(W) = \bigcap_{Q(W) \in R_v} R_v \tag{3.3}$$

cioè un dominio d'integrità integralmente chiuso, non un campo, è l'intersezione di anelli di valutazione che lo contengono. Sia R_{v_1} uno di questi anelli di valutazione, per cui $R_{v_1} \supseteq Q(W)$. Per il teorema di caratterizzazione del centro, quindi, si ottiene uno dei seguenti casi:
caso (a) - W è centro di v_1 in V
caso (b) - $W_1 \supset W$ è centro di v_1 in V.
Nel caso (b), per il *lemma* (3.5) esiste una valutazione v composta con v_1 ed avente centro W. Siccome $R_v \subset R_{v_1}$, si può omettere R_{v_1} dall'insieme delle valutazioni contenenti $Q(W)$ senza variarne la loro intersezione; quindi, si può considerare verificata la *relazione* (3.1), riconducendo così il caso (b) al precedente caso (a).

Quindi, il campo quoziente $Q(W) := i(\theta_{V,W})$. Se W è il centro di una valutazione v, $Q(W)$ è un sottoanello di R_v, che a sua volta è sottoanello di Σ, e quindi $Q(W)$ è un sottoanello di Σ. Per Zariski, $Q(W) = Q(W')$ equivale al fatto che $\theta_{V,W}$ e $\theta_{V',W'}$ hanno la stessa immagine in Σ (e quindi le stesse frazioni), cioè esiste l'inclusione:

$$\begin{array}{ccc} \theta_{V,W} & \simeq & \theta_{V',W'} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \Sigma & \end{array}$$

Nelle notazioni di Zariski, quindi, $\theta_{V_P} = Q(W)$.
Per Zariski, una curva è un campo funzioni razionali di grado di trascendenza 1 ed una curva non singolare è un modello di questo campo di funzioni, che è l'insieme degli anelli di valutazione. Nel prossimo paragrafo, si dimostra l'isomorfismo tra curve lisce e curve non singolari astratte.

3.1 Curve non singolari astratte

Si considerano un campo K di grado di trascendenza 1. Si ricordi che una *curva liscia* è un sottoinsieme irriducibile chiuso dello spazio affine $\mathbb{A}^n$ di dimensione 1 (cfr. *definizione* (2.3)).

Definizione 3.3. Sia v una valutazione del campo K. Si definisce $\mathbb{C}_K$ l'insieme di tutti i suoi anelli di valutazione discreta R_v.

Faremo vedere che si ha un isomorfismo tra una curva liscia ed una curva non singolare astratta dello spazio $\mathbb{C}_K$. Considero il caso di campi di funzioni K di dimensione 1 sul campo base fissato k chiuso algebricamente. E'possibile stabilire una connessione tra curve non singolari e l'insieme di anelli di valutazione discreta di K/k. Se P è un punto di una curva non singolare V, allora l'anello locale $Q(P)$ è un anello locale regolare di dimensione 1 ed è anche un anello di valutazione discreta. Il suo campo quoziente è il campo di funzioni$f$: V $\rightarrow$ K, e siccome $k \subsetneqq Q(P)$, esso è un anello di valutazione di K/k. Quindi l'anello locale di V definisce un sottoinsieme di $\mathbb{C}_K$. Questo motiva la definizione di una curva astratta non singolare.
Prima però è bene soffermasi su pochi altri preliminari:

Lemma 3.3. *Sia V una varietà quasi proiettiva, siano P, T due punti di V e si suppone $Q(T) \subseteq Q(P)$ sottoanelli del campo delle funzioni razionali Σ. Allora $P = T$.*

Dimostrazione. Si immerge V in $\mathbb{P}^n$ per qualche n, e sostituendo V con la sua chiusura lo si può assumere proiettivo. Dopo un appropriato cambio di coordinate in $\mathbb{P}^n$, si può assumere che nè P nè Q stiano nell'iperpiano H_0 definito da $\xi_0 = 0$. Quindi P e T sono punti di $V \cap \mathbb{P}^n \setminus H_0$ che è affine. Dopo tali considerazioni si può dunque assumere che V è una varietà affine. Sia A un anello affine di V e m, n ideali massimali di A tale che $Q(P) = A_m$ e $Q(T) = A_n$. Se $Q(T) \subseteq Q(P)$ allora $m \subseteq n$. Ma m è ideale massimale, per cui $m = n$, da cui segue che $P = T$ in quanto esiste una corrispondenza tra punti di V ed ideali massimali di $A(V)$.

Lemma 3.4. *Sia K un campo di funzioni di dimensione 1 sul campo base k, sia ξ un elemento di K allora l'insieme $\{R \in \mathbb{C}_K \ / \ \xi \notin R_v\}$ è finito.*

Dimostrazione. Se R_v è un anello di valutazione , $\xi \notin R_v$ implica che $1/\xi \in m_{R_v}$. Scrivendo $\omega = 1/\xi$, si deve dimostrare che se $\omega \in K$, $\omega \neq 0$ allora $\{R \in \mathbb{C}_K / \omega \notin R_v\}$ è un insieme finito. Da questo poi segue la tesi. Nel caso in cui $\omega \in K$ non ci sono tali R_v, perciò si assume $\omega \nsubseteq K$. Si consideri il sottoanello $K[\omega]$ di K generato da ω. Siccome k è algebricamente chiuso, ω è trascendente su k e $K[\omega]$ è un anello di polinomi. In più, dal momento che K è finitamente generato e di grado di trascendenza 1 su k, K è un campo di estensione finita di $k(\omega)$. Si osservi che la chiusura integrale C di un dominio d'integrità A in un'estensione finita del campo quoziente è un A-modulo finitamente generato ed una k-algebra finitamente generata. Ora se V è contenuto in un anello di valutazione discreta R di K/k, allora $k[\omega] \subseteq R_v$, e, siccome R_v è integralmente chiuso in K si ha $C \subseteq R_v$. Sia $n = m_{R_v} \cap C$. Allora n è un ideale massimale di C e C è dominato da R_v. Ma C_n è anche un anello di valutazione discreta di K/k, quindi $C_n = R_v$ dalla massimalità di anelli di valutazione, per il seguente teorema:

Teorema. Sia K un campo, un anello locale R_v contenuto in K è un anello di valutazione di K se e solo se esso è un elemento massimale dell'insieme di anelli locali contenuti in K rispetto alla relazione di dominazione (ossia è denso in K). Ogni anello locale contenuto in K è dominato ancora dall'anello di valutazione di K.

Se in più $\omega \in m_{R_v}$ allora $\omega \in n$. Ora C è un anello di coordinate affini di una varietà affine V. Siccome C ha le proprietà precedentemente enunciate, V ha dimensione 1 ed è non singolare. Dire $\omega \in n$ significa che ω è una funzione regolare in V, e si annulla nel punto di ω corrispondente a n. Ma, essendo $\omega \neq 0$, si annulla solo in un insieme finito di punti, che si trovano in corrispondenza (1:1) con gli ideali massimali di C, e $R_v = C_n$ è determinato dall'ideale massimale n. Quindi, si conclude che $\omega \in m_{R_v}$ per un certo numero finito R_v di $\mathbb{C}_K$, come appunto si voleva dimostrare.

Il seguente corollario stabilisce una corrispondenza biunivoca tra anelli di valutazione discreta ed anelli locali di un punto su curve affini non singolari.

Corollario 3.2. *Ogni anello di valutazione discreta di K/k è isomorfo ad un anello locale di un punto di una curva affine non singolare.*

Dimostrazione. Dato un anello di valutazione R_v, sia ω un elemento di $R_v \setminus k$ e, quindi, $\omega \in K$. Considero il sottoanello $k[\omega]$ di K generato da ω, ossia l'anello dei polinomi in ω a coefficenti in k. Siccome k è algebricamente chiuso, ω è trascendente su k. Dalla dimostrazione del lemma risulta K un'estensione finita di $k(\omega)$. Sia C la chiusura integrale di $k[\omega]$ in K (cioè l'insieme di tutti gli elementi di K radici di polinomi monici a coefficenti interi), C è finitamente generata come k-algebra. $k[\omega] \subseteq R_v$ in quanto $\omega \in R_v$ di K/k, e, siccome R_v è integralmente chiuso in K, $C \subseteq R_v$. Sia $m_C = m_{R_v} \cap B$ l'ideale massimale di C, che è dominato da R_v. Ma anche C_m è un anello di valutazione discreta di K/k, per cui $C_m = R_v$ per la massimalità di anelli di valutazione rispetto alla relazione di dominazione. Se in più $\omega \in m_{R_v}$ allora $\omega = m_C$. C è anello di coordinate affini di una varietà affine V. Siccome C è un modulo finitamente generato , ω ha dimensione 1, per cui è una curva, ed è non singolare.

A questo punto vado a definire una curva non singolare astratta. Ricordo che $\mathbb{C}_K$ è l'insieme di tutti gli anelli di valutazione di K/k e gli elementi di tale insieme si chiamano *punti*. Quindi, si scriverà P $\in \mathbb{C}_K$ quando P sta nell'anello di valutazione R_P. Si noti che $\mathbb{C}_K$ è infinito, in quanto tutti gli anelli locali contengono alcune curve non singolari con campo di funzioni K; questi anelli locali, secondo il *lemma* (3.3), sono tutti distinti e ce ne sono infiniti. A questo punto si costruisce $\mathbb{C}_K$ in uno spazio topologico, prendendo come insiemi chiusi i sottoinsiemi finiti e tutto lo spazio. Si definisce una *funzione regolare* su un aperto U di $\mathbb{C}_K$ come una funzione f : U $\rightarrow$ K tale che se P è un punto in U, $f(P)$ è residuo di f modulo m (dove m è l'ideale massimale di R_P), ossia f sta in R_P/m_P. Dopo di chè, si definisce l'anello delle funzioni regolari su U come l'intersezione degli anelli di valutazione R_P.

Definizione 3.4. Una **curva non singolare astratta** *è* un sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{C}_K$ con la topologia indotta e la nozione indotta di funzioni regolari sui loro sottoinsiemi aperti.

3.2 Isomorfismo tra curve lisce e curve non singolari astratte

Ora che si possiedono tutti gli elementi necessari, è possibile dimostrare che ogni curva non singolare quasi-proiettiva è isomorfa ad una curva non singolare astratta e viceversa. In particolare, si dimostrerà che $\mathbb{C}_K$ stesso è isomorfo ad una curva non singolare proiettiva.

Proposizione 3.1. *Ogni curva non singolare quasi-proiettiva V è isomorfa ad una curva non singolare astratta V'.*

Dimostrazione. Sia K il campo di funzioni di V. Allora ogni anello locale $Q(P)$ dei punti $P \in V$ è un anello di valutazione discreta di K/k. Inoltre, a punti distinti corrispondono sottoinsiemi distinti di K. Sia $U \subseteq \mathbb{C}_K$ l'insieme degli anelli locali di V, e sia f : V $\rightarrow$ U la mappa biettiva definita da $f(P) = Q(P)$. Per prima cosa si nota che U è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}_K$. Poichè gli insieme aperti sono complementari di insiemi chiusi, è sufficente dimostrare che U contiene un insieme aperto non vuoto.
Si assume V affine con anello affine A. Allora A è una k-algebra finitamente generata, e dal *teorema* (2.2) K è campo quoziente di A mentre U è l'insieme di localizzazione di A rispetto ai suoi ideali massimali. Quindi, questi anelli locali sono anelli di valutazione discreta, ed U consiste in effetti di tutti gli anelli di valutazione discreta contenenti A.
Ora sia $\xi_1 .....\xi_n$ un insieme di generatori di A su k. Allora $A \subseteq R_P$ se e solo se $\xi_1 .....\xi_n \in R_P$. Pertanto $U = \cap U_i$ dove $U_i = \{P \in \mathbb{C}_K/\xi_i \in R_P\}$. Ma, dal *lemma* (3.4), $\{P \in \mathbb{C}_K/\xi_i \notin R_P\}$ è un insieme finito. Perciò ogni U_i, e conseguentemente U, è aperto. Così rimane dimostrato che U sopra

definito è una curva non singolare astratta. Infine, per verificare che f è un isomorfismo bisogna controllare che le funzioni regolari su un aperto sono le stesse. Ma ciò segue proprio dalla definizione di funzione regolare su U e dal fatto che per ogni aperto $W \subseteq V$ l'anello delle funzioni regolari su U è l'intersezione $\bigcap_P Q(P)$.

Adesso è opportuno trarre dei risultati riguardo le estensioni di morfismi da curve a varietà proiettive.

Proposizione 3.2. *Sia V una curva non singolare astratta e V' una varietà proiettiva, sia $P \in V$ e $f : \mathrm{V} \setminus P \rightarrow \mathrm{V}'$ un morfismo. Allora esiste un'unica mappa $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}'$ estensione di f.*

Dimostrazione. Si immerge V' in qualche sottoinsieme chiuso di $\mathbb{P}^n$ per qualche n. Allora è sufficente dimostrare che f si estende al morfismo $f : \mathrm{V} \rightarrow \mathbb{P}^n$, in quanto se ciò è verificato l'immagine è necessariamente contenuta in V'. Allora ci si riduce al caso $V' = \mathbb{P}^n$. Si hanno in $\mathbb{P}^n$ le coordinate omogenee $\xi_0, ..., \xi_n$ e sia U un insieme aperto dove le ξ_i siano tutte nulle. Per induzione su n, si assume $f(\mathrm{V} \smallsetminus P) \bigcap U \neq 0$, da cui $f(\mathrm{V} \smallsetminus P) \subseteq \mathbb{P}^n \backslash U$. Ma $\mathbb{P}^n \backslash U$ è l'unione degli iperpiani H_i definiti da $\xi_i = 0$. Quindi,$f(\mathrm{V} \smallsetminus P)$ è irriducibile, e in più è contenuto in H_i per qualche i. Ora $H_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$, così risulta dall'induzione. Si può, dunque, assumere $f(\mathrm{V} \smallsetminus P) \bigcap U \neq 0$. Per ogni i,j, ξ_i/ξ_j è funzione regolare su U. Portando questo all'inverso di f, si ottiene una funzione regolare $f_{i,j}$ su un sottoinsieme aperto di V; quindi si ha una funzione razionale su V, cioè $f_{i,j} \in K$, dove K è il campo delle funzioni di V. Sia v la valutazione di K associata all'anello di valutazione R_P, sia $r_i = v(f_{i,j})$ per $i = 0, 1, ..., n$ e $r_i \in Z$.
Allora, siccome $\xi_i/\xi_j = (\xi_i/\xi_0)/(\xi_j/\xi_0)$, da cui $v(f_{i,j}) = r_i - r_j$ per $i, j = 0, ...n$. Scelto k tale che r_k sia minimale tra r_0,....,r_n, allora $v(f_{ik}) \geq 0$ per ogni i. Da questo segue che $f_{0k}, ..., f_{nk} \in R_P$. A questo punto definisco $g(P) = (f_{0k}, ..., f_{nk})$ e $g(T) = f(T)$ per $T \neq P$. Dico che g è morfismo $\mathrm{V} \rightarrow \mathbb{P}^n$ che estende f e inoltre g è unico. L'unicità è chiara dalla costruzione. Quindi, devo solo verificare che g è un morfismo, dimostrando che funzioni regolari in vicini $g(P)$ portano alle inverse di funzioni regolari su V.
Sia $U_k \subseteq \mathbb{P}^n$ un insieme aperto con $\xi_k \neq 0$, allora $g(P) \in U_k$, visto che $f_{kk}(P) = 1$. Ora U_k è affine con anello di coordinate affini $k[\xi_0/\xi_k, ..., \xi_n/\xi_k]$. Queste funzioni portano alle inverse di $f_{0k}, ..., f_{nk}$ che sono regolari in P per costruzione. Si vede subito che i più vicini $g(P)$ in un sottoinsieme $W \subseteq U_k$ portano alle inverse di funzioni regolari su V. Quindi, g è un morfismo.

Teorema 3.1. *Sia K un campo di funzioni di dimensione 1 su k. Allora la curva non singolare astratta $\mathbb{C}_K$ definita precedentemente è isomorfa ad una curva non singolare proiettiva.*

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è la seguente: per prima cosa si ricopre $C = C_k$ con sottoinsiemi aperti U_i isomorfi a curve non singolari affini V_i e siano $\overline{V_i}$ le chiusure proiettive di tali curve affini; allora utilizzo la proposizione precedente per definire un morfismo $f_i : \mathbb{C} \to \overline{\mathrm{V}}_i$, dopo di che considero la mappa prodotto $f : \mathrm{C} \to \amalg\overline{\mathrm{V}}_\mathrm{i}$ e sia $\overline{C}$ la chiusura dell'immagine di C. Allora: (1) $\overline{C}$ è una curva proiettiva e (2) f è un isomorfismo di C su tutto $\overline{C}$.
(1) Sia P un punto di C, allora dal *corollario* (3.1) il punto definisce una curva non singolare affine V e un punto T un elemento di V con $R_P \cong Q(T)$. Il campo di funzioni di V è K e si ha che V è isomorfo ad un sottoinsieme aperto di C. Quindi, ho dimostrato che ogni punto P sta in C ha un aperto associato isomorfo ad una varietà affine. Quindi, C è quasi compatto, bisogna allora ricoprirlo con un numero finito di sottoinsiemi aperti U_i tale che ognuno di essi sia isomorfo ad una varietà affine V_i. Si immergono i V_i in $\mathbb{P}^{n_i}$. Allora le $\overline{V}_i$ sono varietà proiettive, e si ha un morfismo $f_i : \mathrm{U}_i \to \overline{\mathrm{V}}_i$ che è isomorfismo degli U_i su tutte le immagini. Applicando la proposizione precedente all'insieme finito di punti $C \setminus U_i$, si ha l'estensione di f_i, $g_i : \mathbb{C} \to \overline{\mathrm{V}}_i$. Sia $\amalg\overline{V}_i$ il prodotto delle varietà proiettive $\overline{V}_i$ allora è anch'esso proiettivo. Sia $f : \mathrm{C} \to \amalg\mathrm{V}$ la mappa diagonale definita da $f(P) = \amalg g_i(P)$, e sia $\overline{V_i}$ la chiusura dell'immagine di f.
Allora $\overline{V_i}$ è una varietà proiettiva e $f : \mathrm{C} \to \mathrm{V}$ è un morfismo con immagine densa in V, da cui V è una curva .
(2) Ora si dimostra che f è isomorfismo.
Per ogni P in C si ha $P \in U_i$ per qualche i. Si hanno allora le inclusioni di anelli locali: $Q(f_i(P)) \hookrightarrow Q(f(P)) \hookrightarrow Q(P)$ che sono tra loro isomorfe.
Quindi, per ogni P in C la mappa $f_P^\star : \mathrm{Q(f(P))} \to \amalg\mathrm{Q(P)}$ è un isomorfismo. Infine, sia $T \in \overline{V_i}$. Allora $Q(T)$ è dominato da un certo anello di valutazione R_v di K/k. Ma $R_v = R_P$ per qualche P in C, e $Q(f(P)) \cong R_v$, per cui dal *lemma* (3.1) anche $T = f(P)$. Questo dimostra che f è suriettiva. Ma f è chiaramente iniettiva, in quanto punti distinti di C corrispondono a sottoanelli distinti di K. Dunque, f è un morfismo biettivo $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathrm{V}}_\mathrm{i}$, e per ogni P in C $f_P^\star$ è un isomorfismo $\Longrightarrow f$ è un isomorfismo.

Corollario 3.3. *Ogni curva non singolare astratta è isomorfa ad una curva* *quasi proiettiva. Ogni curva quasi proiettiva è isomorfa ad un sottoinsieme aperto di una curva non singolare proiettiva.*

Corollario 3.4. *Ogni curva è birazionalmente equivalente ad una curva non singolare proiettiva.*

3.3 Teoremi di esistenza per valutazioni con centro assegnato

Dopo aver definito precedentemente il centro di una valutazione, si affrontano in questo paragrafo importanti risultati inerenti valutazioni con centro noto. Sia K un campo e siano $\eta_0, ..., \eta_n$ coordinate omogenee di un generico punto di una varietà algebrica V r-dimensionale immersa nello spazio proiettivo n-dimensionale. Il campo Σ delle funzioni razionali in V è il campo $K(\xi_1, ..., \xi_n)$ generato dalle coordinate non omogenee ξ_i.
Sia, infine, v una valutazione del campo Σ e R_v il suo anello di valutazione. Si denota con $U(R_v)$ l'insieme degli elementi invertibili di R_v e con $NU(R_v)$ l'insieme degli elementi non invertibili di R_v. Il seguente risultato rappresenta una *caratterizzazione del centro di una valutazione*:

Teorema 3.2. *Una sottovarietà irriducibile W di V è il centro di una valutazione v se e soltanto se almeno una delle due seguenti condizioni è soddisfatta:*

(1) - $Q(W) \subseteq R_v$ *e* $NU(Q(W)) \subset NU(R_v)$

(2) - $Q(W) \subseteq R_v$ *e* W *è la sottovarietà massimale con tale proprietà*

Dimostrazione. Si dimostra innanzitutto che se W è centro di v, allora $Q(W)$ è un sottoanello di R_v. Se f/g è un elemento di $Q(W)$, si dimostra che f/g è un elemento di R_v, dove f e g sono polinomi di grado m (altrimenti f/g non sarebbe una funzione razionale). Essendo f/g elemento di $Q(W)$ allora $g \neq 0$ in W, cioè g non appartiene all'ideale m_W (m_W definisce W, rappresentando gli elementi che si annullano in esso). Considero l_0 una forma lineare nelle coordinate $\eta_0, ..., \eta_n$ a coefficenti in K tale che $v(\eta_i/l_0) \geq 0$ per $i = 0, ..., n$, ossia l_0 non si annulla in W. Considero l'ideale omogeneo B generato dalle

forme f con grado m, allora $v(f/l_0^m) \geq 0$. Si noti che B è indipendente dalla scelta di l_0. Tale ideale è quello che definisce il centro W di v. Quindi, $v(f/g) = v(f/l_0^m) - v(g/l_0^m) \geq 0$, in quanto $v(g/l_0^m) = 0$ e $v(f/l_0^m) \geq 0$, da cui $f/g \in R_v$. Ho così mostrato che $Q(W) \subseteq R_v$. Concludo la dimostrazione della prima parte del teorema, verificando che $NU(Q(W))$ è contenuto in $NU(R_v)$. Se f/g è un elemento invertibile in $Q(W)$, allora $f = 0$ in W. Dunque, si ha $v(f/l_0^m) > 0$ e conseguentemente $v(f/g) > 0$, cioè f/g è ancora un elemento invertibile in R_v.
Rimane da verificare la condizione (2) del teorema, secondo cui $Q(W) \subseteq R_v$ e W è massimale rispetto tale proprietà.
Sia W_1 un'altra sottovarietà irriducibile di V tale che $Q(W_1) \subseteq R_v$. Devo mostrare che $W_1 \subset W$. Sia l_0 una forma lineare che non si annulla in W_1, allora $\eta_i/l_0 \in Q(W_1) \subseteq R_v$, da cui $v(\eta_i/l_0) \geq 0$ per $i = 0, ..., n$.
Questo mostra che $l_0 \neq 0$ in W. Sia ora f una forma di grado m che si annulla in W, allora $v(f/l_0^m) > 0$ e conseguentemente l_0^m/f non appartiene a R_v. Siccome $Q(W_1) \subseteq R_v$ per ipotesi, si ha a priori che l_o^m/f non appartiene a $Q(W_1)$, per cui $f = 0$ in W_1. Questo implica che $W_1 \subset W$.
Viceversa, supponendo vera una delle due condizioni (1) o (2), si dimostra che W è centro di V. Si è visto che se W_1 è centro di v, allora $Q(W_1) \subseteq R_v$ e W_1 è massimale. Poiché W è massimale con le stesse proprietà di W_1 risulta $W = W_1$, cioè W è centro di v come richiesto. Così è verificata la seconda condizione. Se W non è il centro di v, ma lo è una sua sottovarietà propria W_1, allora $Q(W) \subseteq Q(W_1) \subseteq R_v$; in particolare ci sono elementi non invertibili in W che diventano invertibili in R_v. Così è verificata la prima condizione.

Lemma 3.5. *Se W e W_1 sono due sottovarietà irriducibili di V, allora $W_1 \subseteq W$ se e soltanto se $Q(W_1) \subseteq Q(W)$ e $W_1 \subset W$ se e soltanto se $Q(W_1) \subset Q(W)$.*

Dimostrazione. Se $W_1 \subseteq W$ e se W_1 ha distanza finita rispetto alle coordinate non omogenee ξ_i, allora anche W ha distanza finita, e i corrispondenti ideali primi p_1 e p sono tali da risultare $p_1 \supseteq p$. Quindi, gli anelli localizzati rispetto tali ideali risultano essere $A_{p_1} \subseteq A_p$, cioè $Q(W_1) \subseteq Q(W)$. Se $p_1 \supset p$, e se α è un elemento di p_1 ma non di p, allora $1/\alpha$ è un elemento di A_p ma non di A_{p_1}, per cui A_{p_1} sta in A_p.
Viceversa, si assuma che $Q(W_1) \subseteq Q(W)$. Se B e B_1 sono gli ideali omogenei associati rispettivamente alle due sottovarietà W e W_1, sia $g(\eta)$ una forma

arbitraria tale che $g \neq 0$ in W_1 e sia $f(\eta)$ una forma dello stesso grado di g tale che $f \neq 0$ in W. Allora f/g appartiene a $Q(W_1)$, da cui f/g appartiene a $Q(W)$. Da questo segue che anche $g \neq 0$ in W, avendo assunto $f \neq 0$ in W. Concludendo se $g \neq 0$ in W_1 deve essere anche $g \neq 0$ in W. Questo mostra che $B_1 \supseteq B$ e quindi $W_1 \subseteq W$.

Lemma 3.6. *Se v e v_1 sono due valutazioni di Σ/K aventi centro rispettivamente W e W_1 e se v è composta con v_1, allora $W \subseteq W_1$.*

Dimostrazione. Per definizione esiste una valutazione v' di R_{v_1}/M_{v_1} tale che R_v sia immagine inversa di $R_{v'}$ in R_v. Dunque, $R_v \subset R_{v_1}$. Per il *teorema* (1.7), si ha $M_{v_1} \subset M_v \subset R_v \subset R_{v_1}$ e, quindi, per definizione di centro si ha $W \subset W_1$. Ora sia $f(\eta)$ una forma che si annulla in W_1 e $g(\eta)$ una forma dello stesso grado di $f(\eta)$ tale che $g \neq 0$ in W e in W_1. Si dimostra che f si annulla anche in W, verificando così che $W \subseteq W_1$. $\xi = f/g$ è un elemento non invertibile di $Q(W_1)$. Quindi, per il *teorema di caratterizzazione del centro*, è anche un elemento non invertibile in R_{v_1}. Conseguentemente, $\tau_1(\xi) = 0$ e anche $\tau(\xi) = 0$. Quindi, ξ è un elemento non invertibile in R_v e, siccome $g \neq 0$ in W, questo è possibile solo se $f = 0$ in W.

Teorema 3.3. *Data una sottovarietà s-dimensionale irriducibile W di V, allora esiste una valutazione di centro W per ogni dimensione ρ,*
con $s \leq \rho \leq r - 1$.

Dimostrazione. Considero tre possibili casi, i primi due particolari ed il terzo generale:
caso (a) $s = r - 1$
caso (b) $s < r - 1$ e $\rho = r - 1$
caso (c) $s \leq \rho < r - 1$
Caso (a) - Sia $Q(W)^*$ la chiusura integrale dell'anello quoziente $Q(W)$ in Σ. L'ideale primo $(r-1)$-dimensionale m di $Q(W)$ può essere fattorizzato in $Q(W)^*$ tramite ideali primi $m_1^*, ..., m_h^*$, tutti di dimensione $r - 1$. So che gli anelli quozienti $Q(W)^*_{m_i^*}$ sono anelli di valutazione di divisori $v_1, ..., v_h$. Il centro di ogni divisore v_i è proprio W, e in questo modo si ottengono tutti i divisori del centro W.
Caso (b) - Assumendo che W ha distanza finita rispetto le coordinate non omogenee ξ_i, sia A l'anello delle sue coordinate e p l'ideale primo di W in A. Siano $\omega_1, ..., \omega_m$ una base dell'ideale p. Scelgo un elemento tra questi ω_i e

lo indico con ω. A questo punto passo all'anello $A' = A[\omega_1/\omega, ..., \omega_m/\omega]$ e sfrutto il seguente:

Lemma 3.7. *Siano gli ω_i gli elementi definiti nella dimostrazione. Per almeno un ω tra gli elementi $\omega_1, ..., \omega_n$ sarà soddisfatta la relazione*

$$A' \cdot p \cap A = p \tag{3.4}$$

Quindi, posso assumere che $A' \cdot p \cap A = p$. Questo implica che l'ideale $A' \cdot \omega$ non è l'ideale unità, quindi i suoi ideali primi minimali sono tutti $(r-1)$-dimensionali; in più, implica che almeno un ideale primo minimale di $A' \cdot \omega$ può essere contratto a p. Chiamo p' tale ideale minimale.
Sia ora $\overline{V'}$ un modello proiettivo dove un generico punto è dato in coordinate non omogenee da $(\xi_1, ..., \xi_n, \omega_1/\omega, ..., \omega_m/\omega)$, così che A' è l'anello di coordinate non omogenee di un generico punto di V'. Sia $\overline{W'}$ una sottovarietà $(r-1)$-dimensionale di $\overline{V'}$ definita dall'ideale primo p'. Per il caso (a) esiste una valutazione $(r-1)$-dimensionale il cui centro in $\overline{V'}$ è $\overline{W'}$. Siccome $A' \cap A = p$ segue che il centro di v in V è W.
Caso (c) - Fissati s e ρ si procede per induzione su r, visto che dal caso (b) il teorema è vero se $r = \rho + 1$. Si considera una sottovarietà irriducibile $(r-1)$-dimensionale W_1 di V contenente W e si denota con v_1 un divisore di centro W_1. Il campo residuo Σ_1^* di v_1 è un'estensone algebrica finita del campo Σ_1 delle funzioni razionali in W_1. Per induzione esiste una valutazione v' di Σ_1 di dimensione ρ, il cui centro in W_1 è W. Questa valutazione v' ha almeno un'estensione v^* in Σ_1^*. Componendo v_1 con v^* si ottiene la valutazione composta v di Σ di dimensone ρ il cui centro è W.
Questo completa la dimostrazione del teorema.

La precedente dimostrazione non fornisce purtroppo un'idea generale delle valutazioni con centro assegnato. Infatti, le valutazioni ottenute nel corso di tale dimostrazione sono casi particolari nel senso che, se la loro dimensione è ρ, allora il rango del gruppo dei valori è $r - \rho$.
Il teorema seguente, invece, fornisce maggiori informazioni riguardo elementi arbitrari che possono essere assegnati nella costruzione di valutazioni con centro assegnato.

Teorema 3.4. *Data una catena discendente arbitraria $W_0 \supseteq W_1 \supseteq ..... \supseteq W_{\sigma-1}$ di sottovarietà irriducibili di V e dato un insieme di interi $\rho_0, ..., \rho_{\sigma-1}$ tali che $r-1 \geq \rho_0 > \rho_1 > ..... > \rho_{\sigma-1}$, con i $\rho_i \geq \dim W_i$, esiste una sequenza di valutazioni $v_0, ..., v_{\rho-1}$ tale che:*

1. *v_i è di dimensione ρ_i, di rango $i+1$ e il suo centro è W_i*

2. *v_i è composta con v_{i+1}*

Dimostrazione. Considero due possibili casi particolari:
caso (a) $\sigma = 1$ e $\rho_0 = s = \dim W_0$
caso (b) $\sigma = 1$ e $\rho_0 > s$
Caso (a) - In questo caso si dimostra l'esistenza di una valutazione di rango 1 e dimensione s, il cui centro è una sottovarietà irriducibile s-dimensionale W_0 di V. Si considerano le coordinate non omogenee $\xi_1, ..., \xi_n$ rispetto alle quali W_0 abbia distanza finita, così che W_0 sia ottenuto dall'ideale primo p nell'anello A di tali coordinate. Si aggiunge al campo base un elemento s algebricamente indipendente modulo p in W. In questo modo mi sono ricondotta al caso $s = 0$, potendo così assumere W_0 come un punto, detto A. Si può anche assumere che $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}..., \xi_n$ siano integralmente indipendenti in $K[\xi_1, ..., \xi_r]$. Si osservi che nel caso di campi base infiniti o aventi un numero sufficentemente grande di elementi tale assunzione è sempre realizzabile, in virtù del teorema di normalizzazione di Noether.
Sia A' la proiezione del punto A nello spazio lineare delle r variabili indipendenti $\xi_1, ..., \xi_r$: A' è, in sostanza, il punto definito dalla contrazione dell'ideale primo p nell'anello dei polinomi $K[\xi_1, ..., \xi_r]$.
Sia v' una valutazione 0-dimensionale e di rango 1 del campo $K(\xi_1, ..., \xi_r)$, il cui centro nello spazio lineare è il punto A'. Si denota con $R_{v'}$ l'anello di valutazione di v' e con $A_1, ..., A_h$ altri punti di V, di distanza finita e diversi da A, e si proiettano in A'. Si può trovare un elemento ω in A tale che $\omega = 0$ in A e $\omega \neq 0$ negli A_i per $i = 1, ..., h$. Sia

$$\omega^m + a_1(\xi_1, ..., \xi_r)\omega^{m-1} + ... + a_m(\xi_1, ..., \xi_r) = 0 \tag{3.5}$$

l'equazione irriducibile di dipendenza integrale per ω sull'anello $K[\xi_1, ..., \xi_r]$. Siccome $\omega = 0$ su A, devo avere $a_m = 0$ su A'. Quindi, a_m è un elemento non invertibile in $R_{v'}$. Affermo allora che $R_{v'}[\omega]$ *è un anello proprio* (cioè non è un campo). Per verificare questo dimostro che ω è un elemento non

invertibile in tale anello.
Suppongo, per assurdo, che ω sia un'unità in $R_{v'}[\omega]$. Si avrebbe, allora, $1 = \omega \cdot g(\omega)$, dove $g(\omega)$ è un polinomio a coefficenti in $R_{v'}$. Usando l'*equazione* (3.4) ed osservando che i coefficenti a_i sono polinomi e quindi elementi di $R_{v'}$, si può dedurre il grado di $g(\omega)$. Trovo, dunque, una nuova relazione nella forma

$$1 = \omega(b_0\omega^{m-1} + b_1\omega^{m-2} + ... + b_{m-1}) \tag{3.6}$$

dove i b_i sono elementi di $R_{v'}$. Uguagliando la (3.4) e la (3.5) si ottiene $b_0 = -1/a_m$, che è assurdo essendo a_m un non invertibile in $R_{v'}$.
Siccome ω è un elemento non invertibile in $R_{v'}[\omega]$, allora esiste almeno una valutazione v di Σ tale che $R_v \supset R_{v'}[\omega]$ e tale che ω è un elemento non invertibile in R_v. Siccome v' è di rango 1, $R_{v'}$ è sottoanello massimale di $K(\xi_1, ..., \xi_r)$. Quindi, $R_v \cap K(\xi_1, ..., \xi_r) = R_{v'}$. Segue che la valutazione v è un'estensione di v' con lo stesso rango e la stessa dimensione, cioè rispettivamente 1 e 0. Il centro di v in V deve essere un punto di distanza finita (siccome $\xi_1, ..., \xi_r \in R_{v'} \subseteq R_v$ e quindi $A \subseteq R_v$, essendo R_v integralmente chiuso), e questo punto deve essere proiettato nel punto A'. Il centro può essere uno dei punti $A_1, ..., A_h$, siccome $\omega \neq 0$ negli A_i. Questo implica che ω è un'unità nell'anello quoziente $Q(A_i)$, che è un assurdo in quanto, come appena verificato, ω è un elemento non invertibile in R_v.
Dunque, il centro di v è il punto A.
Caso (b) - Faccio riferimento al caso (b) della dimostrazione del *teorema* (3.4), identificando la varietà W con l'attuale W_0. Avendo osservato che esiste un ideale primo p' $(r-1)$-dimensionale in A' tale che $p' \cap A = p$, segue l'esistenza di ideali primi in A' di dimensione ρ, $r - 1 \geq \rho \geq s$, contratti a p. Sia p'' uno di tali ideali e sia W'' la corrispondente sottovarietà irriducibile ρ-dimensionale di V'. Per il caso (a), esiste una valutazione v di rango 1 e dimensione ρ, il cui centro in V' è W''. Siccome $p'' \cap A = p$, il centro di v in V è W.
Nel caso generale del teorema, dal momento che dai casi particolari (a) e (b) deduco la validità del teorema per $\sigma = 1$, procedo per induzione assumendo ancora vero il teorema per $\sigma = h - 1$ e dimostandolo per $\sigma = h$. Si utilizza per la dimostrazione il seguente:

Lemma 3.8. *Se W e W_1 sono due sottovarietà di V tali che $W \subset W_1 \subset V$ e se v_1 è una valutazione di centro W_1, allora esiste una valutazione v di centro W, che è composta con v_1.*

Dimostrazione. Si vuole dimostrare l'esistenza di una valutazione v composta con v_1 e avente centro in W. Sia $\Sigma = R_{v_1}/M_{v_1}$ il campo residuo di v_1 e $\tau_1 : \mathrm{R_{v_1}} \longrightarrow \Sigma_1$ definita da v_1. Siccome $W \subset W_1$ segue dal *lemma* (3.5) che $Q(W) \subset Q(W_1)$. Inoltre, per ipotesi, $Q(W_1) \subseteq R_{v_1}$. Da tutto ciò segue che $\tau_1 \cdot Q(W) \subseteq \Sigma_1$. Gli elementi di $Q(W)$ che vanno nello 0 sotto l'azione di τ_1 sono non unità di $Q(W_1)$. Siccome W è una sottovarietà propria di W_1, allora ci sono elementi non invertibili in $Q(W)$ che sono invertibili in $Q(W_1)$. Quindi, $\tau_1 \cdot Q(W) \subset \Sigma_1$, cioè un sottoanello proprio. Allora esiste almeno una valutazione v' di Σ_1 tale che $\tau_1 \cdot Q(W) \subseteq R_{v'}$. Si chiama v_2 questa valutazione ottenuta componendo v con v', e sia W_2 il centro di tale v_2. Dal *lemma* (3.6) risulta $W_2 \subseteq W_1$. Siccome $\tau_1 \cdot Q(W) \subseteq R_{v'}$, si ha $Q(W) \subseteq R_{v_2}$ e, quindi, per il *teorema di caratterizzazione del centro* $W \subseteq W_2$. Se $W_2 = W$ allora la tesi è dimostrata, essendo $v = v_2$. Se, inoltre, W è sottovarietà propria di W_2, si sostituiscono v_1 e W_1 con v_2 e W_2, e si ripete il procedimento di prima. Siccome v_2 ha dimensione più piccola di v_1, questo procedimento può essere applicato ripetutamente.

3.4 Sistemi lineari

In questo paragrafo si introduce il concetto di sistema lineare (definito da una famiglia di forme lineari $\phi_{(\lambda)}$) che gioca un ruolo molto importante nello studio della corrispondenza lineare tra due varietà $T : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}'$ ad esso associata.

Definizione 3.5. Un **divisore** è una sottovarietà di V di codimensione 1.

Definizione 3.6. Sia D un divisore, un **sistema lineare** è un sottospazio vettoriale dell'insieme dei divisori linearmente equivalenti a D. La sua rappresentazione *è* data da :

$$\lambda_0\phi_0(\eta_0, ..., \eta_r) + \lambda_1\phi_1(\eta_0, .., \eta_r) + ... + \lambda_m\phi_m(\eta_0, ..., \eta_r)$$

dove m è la dimensione dello spazio proiettivo e r quella della superfice $V_r(\eta_0, ..., \eta_r)$.

Un sistema lineare, infatti, rappresenta una mappa nello spazio proiettivo V $\longrightarrow \mathbb{P}^m$, che associa ad un punto P $(\phi_0(P), ..., \phi_r(P))$.
Viceversa, data una mappa nello spazio proiettivo $\Phi : V \subset \mathbb{P}^r \longrightarrow \mathbb{P}^m$, allora $\phi_\lambda := \phi^{-1}(\phi(V) \cap x_\lambda)$ è un' ipersuperfice di grado fisso, λ_i ha coordinate $(a_0, .., a_n)$. Quindi, in sostanza, considerare un morfismo nallo spazio proiettivo è la stessa cosa di considerare un sistema lineare omogeneo senza punti base, cioè senza punti in cui le ϕ_i si annullino (che chiaramente corrispondono a punti in cui non è definito il morfismo). Inoltre, si osservi che un morfismo è un'applicazione razionale se e soltanto se esistono punti base. Quindi, un'applicazione razionale corrisponde ad un sistema lineare con luogo base, cioè l'insieme di punti in cui le ϕ_i si annullano. Sotto l'assunzione che V e V' siano localmente normali, si può identificare K con la sua chiusura integrale, dal momento che l'anello di coordinate omogenee di un generico punto di una varietà localmente normale è integralmente chiuso e, conseguentemente, contiene la sua chiusura integrale. Quindi, si assume K integralmente chiuso in Σ. L'ideale principale (ϕ_λ) nell'anello $K[\eta_0, ..., \eta_m]$ è $(r-1)$ - dimensionale. Siccome V è localmente normale, il conduttore di tale anello rispetto la sua chiusura integrale è un ideale primario irrilevante (o l'ideale unità), che può essere scritto come prodotto di potenze di ideali primi omogenei minimali $\phi_\lambda = IU_{(\lambda)}$. L'ideale $U_{(\lambda)}$ definisce una sottovarietà $C_{(\lambda)}$ di V, che può essere riducibile e in cui ogni componente irriducibile è contenuta in una molteplicità definita, equivalente a fattori primi corrispondenti di $U_{(\lambda)}$. Come i λ variano in K, la varietà $C_{(\lambda)}$ varia e descrive un sistema lineare $|C|$ di varietà $(r-1)$ - dimensionali in V. E, in particolare, gli C_i di $|C|$ corrispondono agli ideali U_i per $i = 0, .., m$. La base F del sistema lineare $|C|$ è una sottovarietà algebrica di V definita dall'ideale $(U_0, ..., U_m)$.

3.5 Varietà normali e modelli derivati normali

Sia V/k una varietà affine, definita sul campo base k sottocampo di K, nello spazio affine $\mathbb{A}_K^n$.

Definizione 3.7.
1. Sia V una varietà e W una sua sottovarietà. Allora si dice che V è **localmente normale lungo W** se l'anello quoziente $Q(W)$ è integralmente chiuso nel suo campo quoziente Σ.
2. V si dice **localmente normale** se lo è in ogni suo punto (e conseguentemente per ogni sottovarietà W).
3. Una varietà V si dice **normale** se l'anello $K[\xi_1, ..., \xi_n]$ è integralmente chiuso nel suo campo quoziente.

In altri termini, una varietà è normale se A_p è integralmente chiuso nell'anello di coordinate $A(V)$ per ogni ideale primo di V.
Analogamente si definisce la normalità di un generico modello su k, introdotto nel $paragrafo$ (2.3).

Definizione 3.8. Un modello M è detto **normale** se il suo anello delle coordinate è integralemente chiuso.

Definizione 3.9. Se V non è normale e, quindi, $K[\xi_1, .., \xi_n]$ non è integralmente chiuso, il passaggio alla chiusura integrale del campo quoziente definisce una trasformazione birazionale di V nella varietà normale $V^\star$ definita dalla chiusura del campo $\overline{K}[\xi_1, ..\xi_n]$. $\overline{V}$ è chiamato **modello derivato normale**.

Capitolo 4

Corrispondenze birazionali tra varietà algebriche

4.1 Un problema da risolvere

Zariski fu il primo geometra a sviluppare una teoria generale sulle corrispondenze birazionali. Il suo interesse fu dovuto anche al fatto che egli riteneva che la soluzione del problema dell'esistenza di un modello non singolare per campi di funzioni di dimensione $\geq$ 3, all'epoca in cui iniziò i suoi lavori insoluto, presupponeva la formalizzazione di una teoria generale sulle corrispondenze birazionali.
La difficoltà principale che si presenta è quella di passare dal dato di un isomorfismo di Σ in s è ad una corrispondenza tra i punti delle due varietà. Dalle equazioni della trasformazione, in cui le ξ_i e le ξ_i' sono funzioni le une delle altre si riesce ad individuare una corrispondenza tra punti "non speciali" delle due varietà. I punti per cui le equazioni della trasformazione non riescono a definire punti corrispondenti nell'altra varietà sono "speciali" nel senso che si trovano in certe sottovarietà algebriche di dimensione inferiore a r. Nel caso classico si completa la definizione di corrispondenza anche per questi punti facendo delle opportune considerazioni sulla continuità. Nel caso astratto si utilizza la teoria della valutazione. Sia T : V $---$ > V$'$ un'applicazione birazionale. Si ricordi che T induce un automorfismo di Σ. Siano W è una sottovarietà di V e W' è una sottovarietà di V'; siano p e p' ideali primi

rispettivamente di A e A', e siano A_p e A'_p gli anelli localizzati rispetto a p e p'. Si considerano $Q(W)$ e $Q(W')$ come sottoanelli di Σ mediante i morfismi naturali:

$$\begin{array}{ccc} A_p & \longrightarrow & A'_{p'} \\ \downarrow_i & \swarrow_{i'} & \\ \Sigma & & \end{array}$$

definiti per opportune applicazioni affini $V \longrightarrow A$ e $V' \longrightarrow A'$, p e p', A_p e $A'_{p'}$. Ha allora senso confrontare $Q(W)$ e $Q(W')$.

Definizione 4.1. Due sottovarietà irriducibili W e W' di V e V' rispettivamente corrispondono l'una all'altra (e si scrive $W' = T(W)$ e $W = T^{-1}(W')$) se esiste una valutazione v del campo Σ che abbia centro W in V e W' in V'.

Definizione 4.2. Il luogo dei punti F di V in cui non è definito il morfismo tra V e V' è detto il **luogo fondamentale** della corrispondenza birazionale ed è, quindi, costituito da tutti i punti di V che corrispondono a più di un punto di V'.

Definizione 4.3. Sia $T :$ V $---> $ V$'$, siano $W \subset V$ e $W' \subset V'$ corrispondenti l'una all'altra. Si dice che T è **regolare** lungo W se $Q(W) = Q(W')$. Si dice che T è **irregolare** lungo W se $Q(W) \supset Q(W')$. Si dice che T è **fondamentale** lungo W se $Q(W) \not\supseteq Q(W')$. In particolare, se per ogni $W \subset V$ vale la relazione $Q(W) = Q(W')$ la corrispondenza si dice **regolare**.

In prima analisi, l'irregolarità della corrispondenza equivale ad un qualcosa che si contrae nel passaggio da una varietà all'altra, mentre "fondamentale" indica qualcosa che si scoppia in tale passaggio.

Dalla caratterizzazione del centro di una valutazione (*teorema* (3.2)) si deducono due importanti proprietà di una corrispondenza birazionale:

1. data una sottovarietà W di V esiste almeno una sottovarietà W' di V' tale che $W' = T(W)$
2. se $W \subseteq W_1 \subset V$ e $W'_1 = T(W_1)$ allora esiste un W' tale che $W' = T(W)$ e W' sottovarietà W'_1; in particolare, se a W_1 corrisponde un punto $P' \in V'$ allora P' corrisponde ad ogni punto di W_1

In generale, data una sottovarietà W' di V' esiste un'unica sottovarietà W che le corrisponde, ma, come appena osservato, il viceversa non è sempre vero. Ogni sottovarietà W di V a cui corrispondono pi$\grave{u}$ sottovarietà W' di V' sta in F e prende il nome di *varietà fondamentale*. Infatti, soltanto in caso di corrispondenze birazionali regolari a W corrisponde un unico W'. In caso contrario si definisce una nuova varietà.

Definizione 4.4. Se a W corrispondono più W_i' si definisce la **trasformata di W** la sottovarietò algebrica $T[W] = W_1' + ... + W_h'$, dove le W_i' sono componenti irriducibili e che gode delle seguenti proprietà (cfr.$teorema|; (4.5)$):

1. ogni componente irriducibile di $T(W)$ corrisponde a W (cfr.)
2. ogni sottovarietà irriducibile W' di V' corrispondente a W sta in $T[W]$ (cfr.)

In aggiunta alla trasformata $T[W]$ si avrà occasione di considerare anche la varietà algebrica detta **trasformata totale** $T\{W\}$, che è il luogo dei punti di V' corrispondenti ai punti di W.
Dopo tali considerazioni, che cosa corrisponde in generale ad una varietà fondamentale W di V in V'?
Purtroppo a questa domanda si può dare una risposta esauriente solo nel caso di non singolarità di V. Infatti, per varietà non singolari valgono i due teoremi fondamentali di Van Der Waerden:

A - Se W è una varietà irriducibile fondamentale s-dimensionale di V allora la trasformata stretta di W è una varietà algebrica di V', le cui componenti irriducibili sono tutte di dimensione maggiore di s.

B - La trasformata del luogo fondamentale F è una sottovarietà $(r-1)$ - dimensionale di V', cioè rappresenta un divisore (cfr. *corollario* (4.3)).

Come già osservato questi teoremi valgono solo per varietà non singolari, perdendo di significato nel caso in cui una delle due varietà sia singolare. I seguenti esempi mostrano che entrambi i teoremi falliscono nel caso di modelli singolari.

Esempio 1 - Sia P' un punto di una varietà V' nel quale V è localmente riducibile, cioè se f cade in un intorno di P', V' consiste di n ($n > 1$)) rami analitici r-dimensionali, allora nel caso speciale risulta che V' è la proiezione di un'altra varietà V, in cui questi rami sono separati. Allora il punto P' può essere la proiezione di n punti distinti di V, contraddicendo il teorema (A).
Esempio 2 - Sia Q una superfice quadrica in $\mathbb{P}^3$ e sia V un cono tridimensionale che proietta Q dal punto 0 fuori $\mathbb{P}^3$. Si consideri un'immersione di V in $\mathbb{P}^5$. Sia l una curva in $\mathbb{P}^5$ che non deve incontrare $\mathbb{P}^3$ contenente la quadrica. Si fissi una corrispondenza tra i punti P' di l e le rette di una fibrazione di Q. Sia V' la varietà tridimensionale irriducibile generata dai piani (P', p), dove P' e p sono elementi corrispondenti nella proiettività. Si ha una corrispondenza birazionale tra V e V', in cui a piani $(0, p)$ corrispondono piani (P', p). Questa corrispondenza non ha punti fondamentali in V', mentre 0 sarà il solo punto fondamentale in V. Al punto 0 corrispondono in V' la retta r, in contraddizione con il la parte (B) del teorema di Van der Waerden.
Zariski cercò di risolvere questo problema, modificando ovviamente alcune ipotesi e tentando di raggiungere valide considerazioni anche nel caso di singolarità, arrivando così alla formulazione del suo teorema principale.
Si parte, innanzitutto, dalle curve. Per Zariski, come già osservato nel *capitolo* 3, una curva è un campo di funzioni razionali Σ di grado di trascendenza 1 e una curva non singolare un modello di questo campo. Nel caso delle curve si affrontano due problemi. Il primo problema riguarda l'esistenza di una curva non singolare in una data classe di curve, e quindi l'esistenza di un modello non singolare. Il secondo problema si incentra sulla ricerca di una relazione tra due modelli dello stesso campo, cioè due varietà algebriche birazionali tra loro. Per le curve due modelli non singolari sono isomorfi. In altri termini, ogni morfismo birazionale tra curve non singolari è un isomorfismo (corollario del teorema A). Invece, nel caso di superfici, possono esistere superfici singolari che soddisfano le due condizioni appena enunciate per le curve algebriche non singolari. Per esempio, in $\mathbb{P}^3$ esistono superfici che soddisfanno i teoremi di van der Waerden e che hanno solo singolarità isolate. Quindi, esistono più modelli non singolari dello stesso campo delle funzioni azionali Σ. Da un punto di vista algebrico, si introduco le varietà normali e localmente normali.
Si può provare che le singolarità di una varietà localmente normale
r - dimensionale sono di dimensione minore o tutt'al più uguale a $(r - 2)$

(*corollario* (4.1)). In particolare, quindi, una curva localmente normale è non singolare. Il viceversa, però, non è in generale vero, tranne nel caso $r = 1$, visto che una curva non singolare è sempre localmente normale.
Tuttavia, è vero per le ipersuperfici V^r in $\mathbb{P}^{r+1}$. Quindi, risulta che ogni superfice in $\mathbb{P}^3$ è localmente normale se e soltanto se ha un numero finito di singolarità. Si sottolinei che varietà non singolari sono sempre localmente normali.

4.2 Proprietà generali delle corrispondenze birazionali

In questo paragrafo si analizzano le proprietà fondamentali di cui gode una corrispondenza birazionale tra due variet*à* T : V $- --$ $>$ V$'$. Nel caso generale, non vale più la definizione di varietà non fondamentale, cioè non è detto che esiste un W' unico corrispondente a W tale che $Q(W) \supseteq Q(W')$ quando W è regolare o irregolare.

Teorema 4.1. *Se esiste un'unica sottovarietà W' di V' tale che $W' = T(W)$, allora W è regolare o irregolare.*

Corollario 4.1. *La dimensione di una varietà fondamentale W non può superare $(r-2)$.*

Dimostrazione. Se W avesse dimensione $(r-1)$, allora $Q(W)$ stesso sarebbe un anello di valutazione. Quindi, W sarebbe il centro di una sola valutazione v, detta "divisore".

Teorema 4.2. *Se W è non fondamentale, allora, per un'opportuna scelta di coordinate non omogenee $\xi'_1, .., \xi'_m$ di un generico punto di V', si ha $A' = K(\xi'_1, ..., \xi'_m) \subset Q(W)$.*

Le dimostrazioni dei teoremi (4.1) e (4.2) sono riportate nel paragrafo successivo.

Teorema 4.3. *Se W è fondamentale allora esiste un numero infinito di W' corrispondenti a W.*

Dimostrazione. Si dimostra che se esiste un numero finito W' corrispondenti a W, allora W è non fondamentale.
Si suppongono $W'_1, ..., W'_h$ sottovarietà irriducibili corrispondenti a W, cioè $W'_i = T(W)$. Sia v una valutazione di centro W in V, allora $Q(W) \subseteq R_v$ e R_v deve contenere almeno uno degli h $Q(W'_i)$. Per cui R_v contiene l'intersezione di questi anelli quozienti. Inoltre,

$$Q(W) = \bigcap_{W\ centro\ di\ v} R_v \quad \text{e} \quad Q(W'_i) = \bigcap_{W'_i\ centro\ di\ v} R_v$$

Conseguentemente, $Q(W) \supset (\bigcap Q(W'_i))$. A questo punto si costruiscono funzioni razionali, passando dall'anello di coordinate omogenee $A = K[\eta_0, ..., \eta_m]$ all'anello di coordinate non omogenee $A' = K[\xi'_1, ..., \xi'_m]$: si trova un polinomio nelle coordinate omogenee $\phi(\eta'_0, ..., \eta'_m)$ di grado α sufficentemente alto e tale che $\phi \neq 0$ in W'_i; si passa da V' a V'_1 modello proiettivo ausiliare, in cui un punto è definito da una base K-lineare di polinomi di grado α nelle η'_i. Dal *lemma* (4.1), la corrispondenza birazionale tra V' e V'_1 è regolare, per cui è possibile sostituire V' con V'_1. Si suppone $\phi = \eta'_0$, per cui $\eta'_0 \neq 0$ in W'_i. Quindi si passa da $A = K[\eta_0, ..., \eta_m]$ a $A' = K[\xi'_1, ..., \xi'_m]$ dove $\xi'_i = \eta'_i/\eta'_0$. Si ha, allora, $A' \subset Q(W'_i)$, da cui $A' \subset \bigcap Q(W'_i)$. Allora risulta che $A' \subset Q(W)$ e conseguentemente W non fondamentale per la *teorema* (4.9).

Teorema 4.4. *Siano V, V' varietà irriducibili e $V^\star$ il loro grafico, siano W e $W^\star$ sottovarietà irriducibili rispettivamente di V e $V^\star$.*
In $T^\star : \mathrm{V}^\star \rightarrow \mathrm{V}$ esiste un'unica sottovarietà $W : W = T^\star(W^\star)$.
W è non fondamentale per T se e soltanto se W è regolare per $T^\star$ (analogamente per V' e $V^\star$).

Dimostrazione. Si assume che $W^\star$ abbia distanza finita rispetto le coordinate non omogenee $\xi_i j$. Sia v una valutazione di centro $W^\star$, per cui $Q(W^\star) \subseteq R_v$. Per definizione di grafico, $A^\star = A \oplus A'$ è ovvio che $A^\star$ contenga sia A che A'. Quindi, $A = K[\xi_1, ..., \xi_n] \subseteq A^\star = K[\xi_{10}, ..., \xi_{nm}] \subset Q(W^\star) \subseteq R_v$
dove $\xi_{i0} = \eta_{ij}/\eta_{00}$ ($\eta_{00} \neq 0$ in $Q(W^\star)$). Per cui W centro di v in V ha distanza finita rispetto alle coordinate non omogenee ξ_i. Analogamente per V', W' e le ξ'_j. Ma, allora, prendendo $p^\star$ un ideale primo di $V^\star$ in A^{star}, p e p' ideali rispettivamente di V e V', risulta che $p^\star \cap A = p$ e $p^\star \cap A' = p'$ cioè p e p' sono contrazioni di $p^\star$ rispetto a A e A' e conseguentemente W e W' sono univocamente determinate da $W^\star$, cioè esiste un'unica W tale che $W = T^\star(W^\star)$. A questo punto per completare il teorema manca da dimostrare che W è non

fondamentale per $T \iff W$ è regolare per $T^\star$.
Sia W non fondamentale per T. Si osservi che $Q(W^\star) \supseteq Q(W)$ (e $Q(W^\star) \supseteq Q(W')$), per cui dimostrando che $Q(W^\star) \subseteq Q(W)$, si otterrebbe $Q(W) = Q(W^\star)$. Si assume, come prima, che W e W' abbiano distanza finita rispetto alle ξ_i e ξ_j. Sia v una valutazione di centro W in V e W' in V', per cui $A \subset Q(W) \subseteq R_v$ e $A' \subset Q(W') \subseteq R_v$, da cui $A^\star = A \oplus A' \subseteq R_v$ e conseguentemente $W^\star$ è il centro di v in $V^\star$ e ha distanza finita rispetto alle $\xi_i\xi_{j'}$. Si possono presentare due casi a seconda delle condizioni su V.
caso a - V localmente normale : W non fondamentale implica che $Q(W) \supseteq Q(W') \supseteq A'$, da cui $Q(W) \supset A^\star$, cioè $A_p \supset A^\star$. Dal momento che $p = p^\star \cap A$, allora $A_p \supset A^\star_{p^\star}$, che equivale a $Q(W) \supseteq Q(W^\star)$.
caso b - caso generale in cui V non è localmente normale:
ci si riconduce al caso precedente, introducendo le varietà derivate normali. Siano $\overline{V}$ e $\overline{V'}$ tali varietà rispettivamente di V e V', allora $\overline{V^\star}$ è quella del grafico di $\overline{V}$ e $\overline{V'}$. Si utilizzano le varietà normali in modo tale che gli anelli di coordinate omogenee sono integralmente chiusi nei loro campi quozienti. Le corrispondenze tra $\overline{V^\star}$ e le $\overline{V}$ e $\overline{V'}$ sono regolari. Dalla definizione di regolarità per T, quando V non è localmente normale, per dimostrare che W è regolare per $T^\star$ è sufficente dimostrare che $\overline{W}$ è regolare per $\overline{T} : \overline{\mathrm{V}} \to \overline{\mathrm{V}}'$. Sempre per tale definizione, W non fondamentale per T se e solo se $\overline{W}$ non fondamentale per $\overline{T}$. Ma $\overline{W}$ è non fondamentale per $\overline{T}$, in quanto essendo $\overline{V}$ localmente normale si ritorna al *caso*(a).
Viceversa se W è regolare per $T^\star$ la dimostrazione è banale, in quanto $Q(W) = Q(W^\star) \supseteq Q(W')$.

In altri termini, il *teorema* (4.4) sottolinea il fatto che W è fondamentale per T se e soltanto se W è fondamentale per $T^\star$.

Corollario 4.2. *Se P e P' sono punti corrispondenti rispettivamente di V e V', allora esiste solo un numero finito di punti $P^\star$ in $V^\star$ che corrispondono sia a V che a V'. Se V (o V') è localmente normale, allora il numero di tali $P^\star$ può essere maggiore di 1 se e soltanto se P (o P') è un punto fondamentale di T (o di T^{-1}).*

Dimostrazione. Si sfrutta il *teorema* (4.4), identificando W, W' e $W^\star$ della dimostrazione del teorema rispettivamente con i punti P, P' e $P^\star$. Si osserva che $p^\star$ deve essere un divisore primo 0-dimensionale dell'ideale $A^\star \cdot (p, p')$. Conseguentemente il numero di possibili ideali $p^\star$ è finito. La seconda parte del corollario discende dalla seconda parte della dimostrazione del teorema.

Lemma 4.1. *La corrispondenza birazionale tra una varietà V e il suo modello proiettivo $\overline{V}$ è una corrispondenza $(1:1)$. Ogni coppia di sottovarietà irriducibili corrispondenti di V e V' ha la stessa dimensione e lo stesso anello quoziente. Si tratta, quindi, di una corrispondenza birazionale regolare.*

Dimostrazione. Siano W e W' due sottovarietà irriducibili corrispondenti rispettivamente di V e V'. Si assume $\eta_0 \neq 0$ in W. Siccome le $\overline{\eta}$ costituiscono una base lineare per le forme di grado h nelle η, si suppone che η_0^h sia una delle $\overline{\eta}$, per cui $\eta_0^h = \overline{\eta}_0$. Se v è una valutazione di centro W in V e $\overline{W}$ in $\overline{V}$, allora $v(\eta_i/\eta_0) \geq 0$, dal momento che $\eta_0 \neq 0$ in W. Da questo segue che $v(\overline{\eta}_j/\overline{\eta}_0) \geq 0$ per $j = 0, .., s$, e quindi $\overline{\eta}_0 \neq 0$ in $\overline{W}$. Ora sia $\xi = \phi(\eta)/\psi(\eta)$ un elemento di $Q(W)$, dove al solito ϕ e ψ sono forme dello stesso grado con $\psi \neq 0$ in W. Per completare la dimostrazione del lemma è sufficente verificare che $\xi \in Q(\overline{W})$. Si considera ρh il grado comune di ϕ e ψ, multiplo di h, visto che è possibile moltiplicare entrambe le forme per una potenza di η_0 senza invalidare l'ineguaglianza $\psi \neq 0$ in W. Ma se ϕ e ψ hanno grado ρh, possono essere espresse come forme di grado ρ nelle $\overline{\eta}$: $\phi(\eta) = \overline{\phi}(\overline{\eta})$ e $\psi(\eta) = \overline{\psi}(\overline{\eta})$. Dal momento che $\psi(\eta) \neq 0$ in W, si ha $v(\psi(\eta)/\eta_0^{\rho h}) = 0$. Quindi, $v(\overline{\psi}(\overline{\eta})/\overline{\eta}_0^{\rho}) = 0$, e questo mostra che $\overline{\psi}(\overline{\eta}) \neq 0$ in $W^\star$. Siccome $\xi = \overline{\phi}(\overline{\eta})/\overline{\psi}(\overline{\eta})$, si conclude che ξ sta in $Q(\overline{W})$. Analogamente si dimostra che se ξ è un elemento di $Q(\overline{W})$ allora $\xi \in Q(W)$. Perciò gli anelli quozienti coincidono.

Questo lemma mostra come spesso nello studio delle corrispondenze birazionali tra V e V' è possibile sostituire una delle due varietà con il loro modello proiettivo $\overline{V}$.

Teorema 4.5. *Data W fondamentale sottovarietà irriducibile di V, allora esiste $T[W]$ sottovarietà algebrica di V' tale che:*
A. ogni componente di $T[W]$ corrisponde a W
B. ogni altra sottovarietà irriducibile W' di V' tale che $W' = T(W)$ sta nella trasformata stretta $T[W]$.

Dimostrazione. Si dimostra innanzitutto l'esistenza di un'unica $T[W]$.
Si suppone che il teorema sia vero per V e $V^\star$ e, quindi, si dimostra la sua validità per V e V'. Data $W \subset V$, dalla validità per V e $V^\star$ risulta:

$$T^{\star^{-1}}[W] = W_1^\star + ... + W_h^\star$$

con i $W_i^\star$ tale che $W = T^\star(W_i^\star)$.
W fondamentale per equivale a W' irregolare per T^{-1}, cioè W' non fondamentale per T^{-1} che equivale a W' regolare per $T^{'^\star}$, cioè $Q(W^\star) = Q(W')$.
Quindi, ad ogni $W_i^\star$ corrisponde un unico W_i' di V'. Siccome ogni $W_i^\star$ tale che $W = T^\star(W_i^\star)$ sta in $T^{\star^{-1}}[W]$ (dalla *proprietà* (B) del teorema per V e $V^\star$), ogni varietà $W_i' \subset T[W]$ corrisponde a W.
Ho così mostrato l'esistenza di un'unica $T[W]$.
A questo punto rimane da dimostrare che ogni altra sottovarietà corrispondente a W stia in $T[W]$. Sia $W' \subset V'$ tale che $W' = T(W)$ e sia $W^\star \subset V^\star$ tale che $W = T^\star(W^\star)$ e $W' = T'^\star(W^\star)$. Dalla ipotesi di validità per V e $W^\star$, $W^\star \subseteq T^{\star^{-1}}[W]$ e si prende, per esempio, $W^\star \subseteq W_1^\star$.
Passando alle sottovarietà W' e W_1' di V', per quanto dimostrato sopra, risultano le uniche corrispondenti a $W^\star$ e $W_1^\star$, per cui $W' \subseteq W_1'$, cioè $W' \subseteq W_1' + ... + W_h' = T[W]$, dove le W_i' sono univocamente associate alle $W_i^\star$. Si deve dimostrare che W' sta in $T[W]$, cioè W' è una delle W_i'.
Ma $T^{\star^{-1}}[W] = W_1^\star + ... + W_h^\star = W_1' + ... + W_h' = T[W]$ e conseguentemente $W' \subseteq T[W]$ per qualche h, essendo $W' \subseteq W_1' + ... + W_h'$.
E questo garantisce che il numero delle componenti irriducibili di $T[W]$ non può superare h, discendendo così la tesi.
Rimane da verificare la validità del teorema per V e $V^\star$, utilizzando le coordinate non omogenee; per $V^\star$ si hanno le ξ_{ij}. Provare l'esistenza di $T^{\star^{-1}}[W]$ equivale a dimostrare che la parte $L^\star = W_1^\star + ... + W_h^\star$ di $T^{\star^{-1}}[W]$ ha distanza finita rispetto le ξ_{ij}.
1^o*caso* - W non ha distanza finita:
se già W non ha distanza finita rispetto alle ξ_i, neanche i $W_i^\star$ corrispondenti hanno distanza finita rispetto le ξ_{ij}, essendo $A \subseteq A^\star$. Per cui $L^\star$ è vuoto.
2^o*caso* - W ha distanza finita:
proprietà (A) - Sia p ideale primo di A e siano $p_1^\star, ..., p_h^\star$ ideali minimali primi di $A^\star p$ tale che $p_i^\star \cap A = p$; siano le $W_i^\star$ sottovarietà definite dai $p_i^\star$.
Innanzitutto i $W_i^\star$ corrispondono a W, in quanto definiti da ideali contratti a p in A, da cui discende l'esistenza di $T[W]$.
Inoltre, se $W^\star$ corrispondente a W ha distanza finita rispetto le $\xi_i j$, allora $W^\star$ è definita da un ideale $p^\star$ contratto a p (come appena osservato). Si dimostra, quindi, che $W^\star \subseteq T^{\star^{-1}}[W]$.
Siccome $p \subseteq p^\star$, si ha $A^\star p \subseteq p^\star$, per cui $p^\star$ deve dividere qualche ideale minimale $p'^\star$ di $A^\star p$. Siccome $p \subseteq p'^\star \subseteq p^\star$, risulta $p \subseteq p'^\star \cap A \subseteq p$, da cui $p'^\star \cap A = p$.

Quindi, $p'^{\star}$ ristretto a A è proprio p, da cui $p'^{\star}$ è uno dei $p_i^{\star}$, che definisce un $W_i^{\star}$ corrispondente a W. Siccome $p'^{\star} = p_i^{\star} \subseteq p^{\star}$ e $p^{\star}$ definisce $W^{\star}$, risulta $W^{\star} \subseteq W_1^{\star} + ... + W_h^{\star} = L^{\star}$. Quindi, ogni sottovarietà $W^{\star}$ corrispondente a W sta in $T^{\star^{-1}}[W]$. Per il *teorema* (4.9) si ha $A' \subset Q(W_0) \subset Q(W)$. Dunque, ogni sottovarietà $W^{\star}$ corrispondente a W sta in $T^{\star^{-1}}[W]$.

4.3 Proprietà delle corrispondenze birazionali tra varietà normali

Sotto la condizione che V e V' siano variet*à* localmente normali, la corrispondenza birazionale $T : \mathrm{V} - -- > \mathrm{V}'$ gode di ulteriori propriet*à* enunciate nei teoremi di questo paragrafo. La condizione necessaria del *teorema* (4.1) diventa anche condizione sufficente, mentre la condizione sufficente del *teorema* (4.2) diventa anche condizione necessaria.
Si denoti con $NU(R_v)$ e $NU(Q(W))$ l'insieme degli elementi non invertibili rispettivamente di R_v e di $Q(W)$.

Teorema 4.6. *sia W una sottovarietà di V. W è regolare o irregolare per T se e soltanto se esiste un'unica sottovarietà W' di V' tale che $W' = T(W)$.*

Dimostrazione. Dall'ipotesi di corrispondenza le valutazioni di centro W in V hanno centro W' in V'. Sia v_1 una di queste valutazioni. Per dimostrare la tesi *è* sufficente verificare che W' è il centro di questa nuova valutazione.
Dal *teorema di caratterizzazione del centro* risulta che $Q(W) \subseteq R_v$ e gli elementi non invertibili di $Q(W)$ sono gli elementi non invertibili di R_v, cioè $NU(Q(W)) = NU(R_v)$. Dalla condizione $Q(W) \subseteq R_v$ discende $Q(W') \subseteq R_v$, dal momento che per ipotesi $Q(W') \subseteq Q(W)$. Quindi, quello che rimane da verificare è che gli elementi non invertibili di $Q(W')$ siano gli elementi non invertibili di R_v. Sempre per ipotesi $NU(Q(W')) = NU(R_{v_1}) = NU(Q(W))$. D'altro canto, $NU(Q(W)) = NU(R_v)$, da cui $NU(Q(W)) = NU(R_v)$. Quindi, W', centro in V' della valutazione v avente centro W in V, è l'unica sottovarietà corrispondente a W.
Viceversa, se esiste un'unica sottovarietà W' corrispondente a W, allora W è non fondamentale. V localmente normale equivale a $Q(W)$ integralmente chiuso. Dal corollario del *teorema degli ordini principali* si ha che:

$$Q(W) = \bigcap_{W \; centro \; di \; v} R_v.$$

Dall'unicità di W' segue che tutte le valutazioni di centro W in V hanno centro W' in V' e, quindi, $R_v \supseteq Q(W')$.
Per cui risulta che $Q(W') = \bigcap_{W' \; centro \; di \; v} R_v$.
Quindi, $Q(W) \supseteq Q(W')$, cioè W è regolare o irregolare.

Teorema 4.7. *Se W è regolare per T e $W' = T(W)$ allora W' e W hanno la stessa dimensione e W' è regolare per T^{-1}.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $Q(W) = Q(W')$. Dal *lemma* (4.1) segue che W e W' hanno la stessa dimensione e gli stessi campi quozienti. Quindi, è dimostrata la tesi e W è regolare per T se e soltanto se W' è regolare per T^{-1}.

Teorema 4.8. *Se W è irregolare e $W' = T(W)$ allora W' è fondamentale per T^{-1} e $\dim W' \leq \dim W$.*

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che $Q(W) \supset Q(W')$ e si vuole dimostrare che la dimensione di W' è maggiore o uguale a quella di W. W irregolare per T se e soltanto se W' fondamentale per T^{-1} in quanto $Q(W) \supset Q(W')$ che equivale a $Q(W) \nsubseteq Q(W')$. Quindi, $\dim W' \leq \dim W$.

Teorema 4.9. *W è non fondamentale se e soltanto se per un'opportuna scelta di coordinate non omogenee $\xi'_1, .., \xi'_m$ di un generico punto di V', $A' = K(\xi'_1, ..., \xi'_m) \subset Q(W)$.*

Dimostrazione. Si assume che $A \subseteq Q(W)$ e sia p' un ideale primo in A' contratto all'ideale degli elementi non invertibili $NU(Q(W))$. Allora se W' è una sottovarietà irriducibile di V' definita da p', alloa $Q(W') \subseteq Q(W)$ e dal *teorema di caratterizzazione* ogni valutazione di centro W in V, ha centro W' in V'.

Teorema 4.10. *Ogni componente irriducibile della trasformata totale $T\{W\}$ che non sia componente di quella stretta $T[W]$ deve corrispondere ad una sottovarietà W_1 di W. Inoltre, se V è localmente normale, allora W_1 deve essere fondamentale.*

Dimostrazione. 1^a *parte* - Dalla dimostrazione del *teorema* (4.5) si è visto che ad ogni $W_i^\star$ della trasformata $T^{\star^{-1}}[W]$ corrisponde un unico W'_i, per cui

$T[W] = W'_1 + ... + W'_h$ e analogamente $T\{W\} = W'_1 + ... + W'_h + W'_{h+1} + ...$
Sia W'_0 corrispondente a $W^\star_0 \subset T^{\star^{-1}}\{W\}$, ma $W^\star_0 \not\subseteq T^{\star^{-1}}[W]$.
Dalla definizione di trasformata totale, ogni punto di $W^\star_0$ deve corrispondere a qualche punto di W. Siccome ad ogni punto di $V^\star$ corrisponde un unico punto di V (per la corrispondenza birazionale tra V e $V^\star$), segue che W_0 corrispondente a $W^\star_0$ deve stare in W. E questo W deve essere una sottovarietà propria di W, in quanto $W^\star \subset T^{\star^{-1}}[W]$, cioè $W^\star_0 \not\supseteq T^{\star^{-1}}[W]$.
Sia $W^\star_0$ corrispondente a W_0 e a W'_0, per cui W_0 e W'_0 corrispondono l'una all'altra e conseguentemente $W'_0 \subset W$.
2^a *parte* - Sostituisco W_1 dell'enunciato come il W_0 della prima parte della dimostrazione. V localmente normale equivale a $Q(W_0)$ integralmente chiuso, W_0 fondamentale per T se e soltanto se W_0 fondamentale per $T^{\star^{-1}}$ (dal *teorema* (4.4)).
Per assurdo si dimostra che se W_0 fosse non fondamentale per T allora $Q(W_0) \supseteq Q(W'_0)$. Essendo $W_0 \subset W$, a maggior ragione W è non fondamentale per T. Per la *teorema* (4.9) si ha $A' \subset Q(W_0) \subset Q(W)$. Ma siccome W_0 non fondamentale per T se e solo se W_0 regolare per $T^\star$, si ha $Q(W_0) = Q(W^\star_0)$ e analogamente $Q(W) = Q(W^\star)$. Inoltre $Q(W^\star_0) \subseteq Q(W'_0)$, per cui $Q(W_0) \subseteq Q(W'_0)$. Per quanto scritto e per l'ipotesi su W_0 risulta $Q(W_0) = Q(W'_0)$, cioè W_0 regolare per T. Questo vuol dire che W_0 ha la stessa dimensione di W'_0, che a sua volta è strettamente minore della dimensione di W, essendo $W_0 \subset W$. Quindi, $W'_0 \subseteq T[W]$, contraddicendo le ipotesi del teorema.

Corollario 4.3. *Se W non è fondamentale per T e se V è localmente normale, allora $T\{W\} = T[W]$, cioè la trasformata totale e quella stretta coincidono.*

Capitolo 5

Il teorema principale

Dopo un approfondito studio, Zariski arrivò alla risoluzione del problema delle singolarità anche per le varietà di dimensione superiore a 2 con l'ipotesi di normalità. Infatti, la condizione di normalità su una delle due varietà della corrispondenza birazionale T permette di applicare le proprietà enunciate nel paragrafo (4.3).

Teorema 5.1. *Sia* $T : \mathrm{V} - -- > \mathrm{V}'$ *una corrispondenza birazionale tra due varietà e sia* W *una sottovarietà di* V*. Sotto la condizione che* V *sia localmente normale, se* W *è fondamentale per* T *e se* T *non ha elementi fondamentali in* V'*, allora le componenti* W_i' *della trasformata stretta di* W *hanno tutte dimensione strettamente maggiore di* W*.*

Da un punto di vista algebrico il teorema è enunciato come segue:

Teorema 5.2. *Siano* A *e* $A^\star$ *domini d'integrità con lo stesso campo quozien-te, dove* A *è integralmente chiuso e* $A \subseteq A^\star$*; siano* p *e* $p^\star$ *ideali primi rispet-tivamente di* A *e* $\nu^\star$ *tale che* $p^\star \cap A = p$*. Se* $\dim p = \dim p^\star$ *allora è verificata una delle seguenti condizioni:*
(1) - $A_p \equiv A_{p^\star}$ *e* $p^\star$ *è il solo* $A^\star$ *- ideale primo in* p
(2) - $p^\star$ *non è l'ideale minimale che ha la proprietà di essere contratto a* p*, ma esiste un altro primo* p' *in* $A^\star$ *multiplo proprio di* $p^\star$*tale che* $p' \subset p^\star \subset p$ *e* $p' \cap A = p$*.*

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in due parti: nella prima parte si analizza il caso più semplice in cui anche $A^\star$ è integralmente chiuso, nella

seconda si dimostra un lemma.
1^a *parte* - Ci si riconduce al caso in cui anche $A^\star$ è integralmente chiuso. Infatti, sia $A'^\star$ la chiusura integrale di $A^\star$ in Σ: ad ogni ideale primo $p^\star$ corrisponde un ideale primo $p'^\star$ in $A'^\star$, e il numero di tali $p'^\star$ è finito.
Inoltre, $\dim p^\star = \dim p'^\star$, e se $p^\star \cap A = p$ allora $A_p \subseteq A^\star_{p^\star} \subseteq A'^\star_{p'^\star}$.
Quindi, se il teorema è valido per A e $A'^\star$ segue, da quanto scritto sopra, che il teorema risulta valido anche per A e $A^\star$. Per cui tramite la normalizzazione è lecito assumere $A^\star$ integralmente chiuso, riconducendosi così al caso più semplice. Dopo questa semplificazione, si dimostra la validità di una delle due condizioni dell'enunciato.
Siccome A e $A^\star$ sono domini d'integrità finiti, $A^\star$ è un'estensione finita di A, che per comodità considero ottenuto da un numero finito di estensioni semplici di anelli; ogni estensione, infatti, si ottiene tramite un'operazione di chiusura integrale :

$A_1 = A[\alpha_1]$ con A'_1 chiusura integrale di A_1
$A_2 = A'_1[\alpha_2]$ con A'_2 chiusura integrale di A_2
.....
$A_m = A'_{m-1}[\alpha_m]$ con A'_m chiusura integrale di A_m

Per induzione, si dimostra che se il teorema è vero per $m = 1$ allora lo *è* anche per per ogni m.
Sia $p^\star \cap A'_{m-1} = p'_{m-1}$, cioè i p'_{m-1} sono contrazioni di $p^\star$ sugli anelli A'_{m-1}.
Siccome $p'_{m-1} \cap A = p$, si ha $\dim p^\star \geq \dim p'_{m-1} \geq \dim p$.
Se p e $p^\star$ hanno la stessa dimensione allora anche $p'_m - 1$ ha la stessa dimensione di p.
Quindi, continuano a valere le ipotesi; manca solo da verificare una delle due condizioni.
Ora si assuma che non esistano ideali propri primi multipli di $p^\star$ e contratti a p; di conseguenza, non esistono ideali propri primi multipli di $p^\star$ e contratti a p'_{m-1}. Quindi, dal caso $m = 1$ si ha che $A^\star_{p^\star}$ coincide con anelli quozienti di p'_{m-1} in A'_{m-1}. Perciò c'è una corrispondenza biunivoca $(1:1)$ tra
$\{$ multipli di $p^\star$ in $A^\star$ $\}$ e $\{$ multipli di p'_{m-1} in A'_{m-1} $\}$. Da questo si deduce che nessun ideale primo proprio multiplo di p'_{m-1} può essere contratto a p.
Per induzione, si conclude che A_p coincide con $A^\star_{p^\star}$.
2^a *parte* - è rappresentata dal seguente:

Lemma 5.1. *Ogni primo $p^\star$ ideale in $A^\star$ del conduttore $\mathcal{C}$ è contratto in A ad un ideale primo p di dimensione minore.*

Dimostrazione. Si vuole dimostrare che $\dim p^\star > \dim p$
Si ricordi che $\mathcal{C} = \{p^\star \subset A^\star \ / \ p^\star A \subset A^\star\}$.
Sia $p^\star$ tale che $p^\star \cap A = p$. Si assume $\dim p = \dim p^\star = s$ e si dimostra che $p^\star$ non può essere un ideale primo di $\mathcal{C}$.
Scelti in A un insieme $\xi_1, ..., \xi_s$ di elementi algebrici indipendenti modulo p, vengono aggiunti al campo base k, ottenendo così un nuovo campo base $K_1 = k(\xi_1, ..., \xi_s)$ e nuovi anelli $A_1 = K_1 A$, $A_1' = K_1 A'$ e $A_1^\star = K_1 A^\star$. In particolare, $A_1^\star$ è anello quoziente di $A^\star$, e sia $A_1^\star = A_s^\star$, dove S è l'insieme dei polinomi nelle ξ_i a coefficenti in k. Analogamente si ha $A_1 = A_s$. Dalle propriet*à* di corrispondenza tra gli ideali di un dato anello A e quelli del suo campo quoziente, si trova che $p_1 = A_1 p$ (cioè p_1 è l'estensione dell'ideale p) e $p_1^\star = A_1^\star p^\star$ sono ideali primi e $\mathcal{C}_1 = K_1\mathcal{C} = \{x \in A_1' \ / \ xA_1^\star \subset A_1'\}$ è il conduttore di A_1' in $A_1^\star$. Si ha $A_1' = A_1[\alpha]$ ed è evidente che $A_1^\star$ rappresenta la sua chiusura integrale. Siccome $p_1^\star$ è 0- dimensionale su K_1, segue dall'ipotesi che $C_1 : p_1^\star = C_1$. D'altra parte, $C_1 : p_1^\star = K_1(C_1 : p^\star)$. Conseguentemente, i due ideali C e $C : p^\star$ hanno gli stessi ideali estesi in $A_1^\star$. Segue così che questi due ideali possono differire solo di componenti primarie, i cui ideali primi associati contengano polinomi nelle ξ_i. Siccome le ξ_i sono algebricamente indipendenti modulo p, si conclude che $p^\star$ non si trova tra gli ideali primi del conduttore C.
Quindi, la dimostrazione del lemma si riduce a verificare che il conduttore "C non ha ideali primi 0 - dimensionali".
Sia $p^\star$ un ideale 0 - dimensionale in $A^\star$. Si dimostra che $p^\star$ non appartiene a C. Si è dimostrato precedentemente che $C : p^\star = C$. Se $\xi^\star$ è un elemento di $C : p^\star$. Si denota con $f(x)$ un polinomio irriducibile in $k[x]$ divisibile per $p^\star$, cioè $f(\alpha) \equiv 0(p^\star)$.
Segue che $\xi^\star f(\alpha) \equiv 0(C)$, da cui $\xi^\star f(\alpha)\,\eta^\star \in A'$ per ogni $\eta^\star \in A^\star$. Quindi, si può scrivere:

$$\xi^\star \eta^\star f(\alpha) = G(\alpha) = \omega_0 \alpha^m + \omega_1 \alpha^{m-1} + ... + \omega_A \tag{5.1}$$

con gli $\omega_i \in A$. Si divide $G(x)$ per $f(x)$, ottenendo:

$$G(x) = Q(x) f(x) + R(x) \tag{5.2}$$

dove tutti i polinomi sono in $A[x]$ e chiaramente, se m è il grado di $f(x)$,

$m-1$ è quello di $R(x)$. L'*equazione* (5.1) può essere riscritta:

$$\xi^\star \eta^\star = Q(x) + R(x)/f(\alpha) \tag{5.3}$$

Sia v una valutazione arbitraria di Σ con anello quoziente R_v contenente A. Allora si possono presentare due casi:

1^o *caso* - $v(\alpha) \geq 0$

In questo caso si ha $A[\alpha]$ è un elemento di R_v e $A^\star \subset R_v$. Dall'*equazione* (5.1) segue che $R(\alpha)/f(\alpha)$ è un elemento di R_v. 2^o *caso* - $v(\alpha) < 0$

In questo caso si ha $v(f(\alpha)) = mv(\alpha)$, essendo il grado di R minore di quello di f. Quindi, $R(\alpha)/f(\alpha)$ sta in R_v. Siccome queste considerazioni valgono per ogni v tale che $A \subset R_v$ e siccome A è integralemente chiuso, $(\alpha)/f(\alpha) \in A$. Quindi, dall' *equazione* (5.3) $\xi^\star \eta^\star \in A'$ per ogni $\eta^\star$ in $A^\star$. Conseguentemente $\xi^\star \in C$. Siccome $\xi^\star$ è un elemento arbitrario di $C : p^\star$, si ha $C : p^\star = C$. Questo vuol dire che $p^\star$ non è 0-dimensionale.

Per dimostrare il teorema da un punto di vista geometrico si utilizzano le proprietà studiate nel capitolo precedente riguardanti le corrispondenze tra varietà localmente normali.

Dimostrazione.

$$\begin{array}{ccc} & V^\star & \\ \swarrow & & \searrow \\ V & ---> & V' \end{array}$$

Sotto le ipotesi che V sia localmente normale, sia W una sottovarietà fondamentale per T e sia $T[W] = W'_1 + ... + W'_h$, se non esistono elementi fondamentali in V', allora dimostreremo che $\dim W'_i > \dim W$.
Sia $T^\star :$ W$^\star \longrightarrow$ W il morfismo tra W e il suo grafico. Siano $T^\star :$ V$^\star \longrightarrow$ V e $T'^\star :$ V$^\star \longrightarrow$ V$'$. Sia $T^{\star^{-1}}[W] = W_1^\star + ... + W_h^\star$ la trasformata stretta di W, dove i $W_i^\star$ corrispondono a W. Siccome V è localmente normale, W fondamentale per T equivale a W' irregolare per T^{-1} (*teorema* (4.8)). In altri termini W' è non fondamentale per T^{-1}. Questo implica che W' è regolare per $T'^\star$ e conseguentemente, ad ogni $W_i^\star$ corrisponde un unico W'_i di V' (come dimostrato nel *teorema* (4.5)). Quindi, nel passaggio da $V^\star$ a V' non ci sono contrazioni. D'altra parte, $W_i^\star$ è irregolare per $T^\star$, perché lo è W' per T^{-1} (da cui $\dim W_i^\star \geq \dim W$) e non è regolare per $T^\star$, peché altrimenti tale sarebbe W per T. Dunque vale la diseguaglianza stretta $\dim W_i^\star = \dim W'_i > \dim W$

Nel teorema principale si è supposto che la corrispondenza birazionale non presenta punti fondamentali in V'. Nel caso più generale di una coppia di varietà V eV' birazionalmente equivalenti il teorema può essere applicato alle singole corrispondenze di V eV' con il loro grafico $V^\star$. Facendo riferimento al *teorema* (4.5), si può esprimere il carattere locale del teorema tramite il seguente:

Corollario 5.1. *Sotto l'ipotesi che V sia localmente normale, se W è fondamentale rispetto a T, allora ogni componente irriducibile di $T[W]$ non fondamentale per T^{-1} è di dimensione maggiore della dimensione di W.*

5.1 Il luogo fondamentale di corrispondenze birazionali

Come già osservato nel paragrafo 3.4, il sistema lineare gioca un ruolo di fondamentale importanza nell'ambito dello studio delle corrispondenze birazionali. Il seguente risultato rappresenta nello specifico la connessione geometrica tra una trasformazione birazionale T e un sistema lineare $|C|$. Sia K un campo algebricamente chiuso nel campo Σ. Siano ϕ_i forme proporzionali alle coordinate omogenee η_i', $\phi_\lambda = \lambda_0\phi_0 + ... + \lambda_m\phi_m$. L'ideale principale (ϕ_λ) nell'anello delle coordinate omogenee è $(r-1)$-dimensionale. Siccome V è localmente normale il conduttore di questo anello rispetto la chiusura è un ideale primario irriducibile (o l'ideale unità). Quindi, l'ideale (ϕ_λ) può essere espresso come $(\phi_\lambda) = IU_i$, dove gli U_i non hanno fattori in comune. L'ideale U_λ definisce una sottovarietà C_λ $(r-1)$-dimensionale di V. Al variare di λ nel campo K, le varietà descrivono un sistema lineare $|C|$ di varietà $(r-1)$-dimensionali in V. Sia F una sottovarietà di V definita dall'ideale $(U_0, .., U_m)$. F ha dimensione al più $(r-2)$ ed è la base del sistema lineare $|C|$, cioè F sta in ogni C_λ. A questo punto si dimostra il seguente:

Teorema 5.3. *La base di un sistema lineare $|C|$ è il luogo fondamentale della trasformazione birazionale T.*

Dimostrazione. Sia p un ideale primo omogeneo nell'anello $K[\eta]$ corrispondente a W. Si dimostra che se $W \nsubseteq F$ allora W è non fondamentale.
Essendo $W \nsubseteq F$, almeno una delle $m+1$ varietà C_i non deve contenere F. Chiamo C_0 tale varietà, e quindi $U_0 \neq 0(p)$. Come al solito, si introduce l'anello di coordinate omogenee $K[\xi_1', .., \xi_m'] = A'$. Si ha $(\xi_i') = U_i/U_0$, quindi

$\xi'_i \in Q(W)$. Allora l'anello A' è contenuto nell'anello quoziente $Q(W)$, e questo implica che W è non fondamentale.
Viceversa, si dimostra che se W è non fondamentale allora sta in F. Non essendo fondamentale, W corrisponde ad un'unica W' in V' e si ha $Q(W') \subseteq Q(W)$. Sia $\eta'_0 \neq 0$ in W', risulta allora $A' \subset Q(W')$, e dunque a priori $A' \subset Q(W)$. Dal fatto che i quozienti ϕ_i/ϕ_0 appartengano tutti a $Q(W)$ segue subito che $U_0 \neq 0(p)$. E, quindi, W non sta in F.

Mentre il teorema precedente fornisce informazioni inerenti la localizzazione di elementi fondamentali di una corrispondenza birazionale, il seguente teorema fornisce infomazione inerenti la localizzazione di varietà irregolari.

Teorema 5.4. *Se una sottovarietà W' di V' è irregolare per T^{-1}, allora W' sta nella trasformata totale $T\{F\}$ del luogo fondamentale F di T. Viceversa, se W' sta in $T\{W\}$, allora essa è irregolare o fondamentale per T^{-1}.*

Dimostrazione. Se W' è irregolare e se $W = T^{-1}(W')$, allora dalla *teorema* (4.8) delle corrispondenze birazionali segue che W è fondamentale, e quindi $W \subseteq F$. Conseguentemente, $W' = T(W) \subseteq T\{F\}$.
Viceversa, se $W' \subseteq T\{F\}$ allora W' deve corrispondere a qualche sottovarietà irriducibile W di F. Siccome W è fondamentale, W' non può essere regolare.

5.2 Varietà fondamentali isolate

Sia $T : \mathrm{V} - -- > \mathrm{V}'$ una corrispondenza birazionale tra due varietà e sia $T^\star : \mathrm{V}^\star \longrightarrow \mathrm{V}$. Sia V localmente normale e F il luogo fondamentale per T, cioè l'insieme delle varietà fondamentali W in V.

Definizione 5.1. Si definisce la **trasformata totale del luogo fondamentale** di $T^\star$ come l'insieme delle varietà corrispondenti a W fondamentale. Si denota con $T^{\star^{-1}}\{F\}$.

Tale trasformata è anche la trasformata del luogo fondamentale F di T, in quanto W fondamentale per T equivale a W fondamentale per $T^\star$ (*teorema* (4.4)).

Definizione 5.2. Siano F_i le componenti irriducibili di F di T. Le sottovarietà di V $F_i = T^\star(W_i^\star)$ sono chiamate **varietà fondamentali isolate** di T, e ovviamente sono anche sottovarietà di $T^\star$.

E' chiaro che $F_i \subset F$, e quindi le componenti irriducibili di F sono tra le varietà fondamentali isolate. Infatti, se W è una componente irriducibile di F e $W^\star$ è componente irriducibile di ${T^\star}^{-1}[W]$, si ha $W^\star \subseteq {T^\star}^{-1}\{F\}$, dal momento che $T^\star(W^\star) = W \subseteq F$. Conseguentemente, $W^\star$ sta in una delle varietà $W_i^\star$. Considero $W^\star \subseteq W_1^\star$. Si ha $T^\star(W^\star) \subseteq T^\star(W_1^\star) = F_1$, cioè $W \subseteq F_1$. Siccome W è componente di F, si conclude che $W = F_1$.
Si osservi che, oltre alle componenti irriducibili del luogo fondamentale F, esistono altre varietà fondamentali isolate, che sono sottovarietà proprie delle componenti irriducibili di F. Nel caso tridimensionale si possono avere curve fondamentali in V corrispondenti a superfici in $V^\star$, e su queste curve possono esistere punti P "speciali" a cui corrisponde una superfice di $V^\star$. Questi punti devono essere considerati punti fondamentali isolati, purché appartengano alla curva fondamentale. Il termine "isolato" non si riferisce alla posizione del punto rispetto al luogo fondamentale F, ma al suo ruolo nella corrispondenza birazionale T. Dal *teorema principale* risulta che ogni componente irriducibile $W_i^\star$ di ${T^\star}^{-1}\{F\}$ ha dimensione maggiore della corrispondente varietà fondamentale isolata F_i. Sotto certe condizioni è possibile affermare che $W_i^\star$ è di dimensione $r-1$.

Teorema 5.5. *Se T è una corrispondenza birazionale tra due varietà r-dimensionali localmente normali V e V' e V' non ha elementi fondamentali in V', e se F denota il luogo fondamentale di T in V, allora una componente irriducibile di $T\{F\}$ è di dimensione $r-1$, purché la corrispondente varietà fondamentale isolata F_i sia tale che i membri del sistema lineare $|C|$ associato a T (o dei loro multipli) siano intersezioni locali complete.*

Corollario 5.2. *Per una varietà fondamentale isolata non singolare esiste sempre una varietà corrispondente $(r-1)$ - dimensionale in V'*
(teorema (B) di $v.derWaerden$).

La dimostrazione del *teorema* (5.5) si sviluppa su più passi. Un 1^o passo consiste nel dimostrare il seguente:

Lemma 5.2. *Se N è una sottovarietà di V definita dall'ideale omogeneo $(g_0, ..., g_h)$ nell'anello $K[\eta_0, .., \eta_n]$ e se $N^\star$ è la sottovarietà di $V^\star$ definita* *dall'ideale* $(g_{00}, .., g_{hm})$*, allora* $N^\star = T^{\star^{-1}}\{N\}$*, cioè* $N^\star$ *è la trasformata totale di* N*.*

Dimostrazione. Siano W e $W^\star$ sottovarietà corrispondenti di V e $V^\star$. Si dimostra che $W^\star \subseteq N^\star$ se e soltanto se $W \subseteq N$.
Si assume che $W \subseteq N$. Senza perdere di generalità, si assume $\eta_0 \neq 0$ in W. Si denota con v la valutazione di centro W in V e $W^\star$ in $V^\star$, si ha allora

$$v(\eta_i/\eta_0) \geq 0 \text{ e } v(g_i/\eta_0^{\nu_i}) > 0 \tag{5.4}$$

dove ν_i è il grado delle forme g_i. Ancora si assume che $v(\phi_i/\phi_0) \geq 0$ per $i = 1, .., m$, tenendo presente che $\eta_{ij} = \eta_i\phi_j$.
Allora si ha $v(\eta_{ij}/\eta_{00}) = v(\eta_i/\eta_0) + v(\phi_i/\phi_0) \geq 0$.
Da $g_{ij} = g_i(\eta_{0j}, \eta_{1j}, ..., \eta_{nj})$ per $i = 0, .., h$ e $j = 0, ..., m$, risulta

$$g_{ij} = g_i\phi_j^{\nu_i} \tag{5.5}$$

e, quindi, $g_{ij}/\eta_{00}^{\nu_i} = g_i/\eta_0^{\nu_i}(\phi_j/\phi_0)^{\nu_i}$. Conseguentemente, dalla *relazione* (5.4) $v(q_{ij}/\eta_{00}^{\nu_i}) > 0$, e questo mostra che $W^\star \subseteq N^\star$.
Viceversa, si assume che $W^\star \subseteq N^\star$. Se $\eta_{00} \neq 0$ in $W^\star$, allora $\eta_0 \neq 0$ in W (essendo $\eta_i/\eta_0 = \eta_{i0}/\eta_{00}$). D'altro canto $g_{i0}/\eta_{00}^{\nu_i} = g_i/\eta_0^{\nu_i}$, quindi $v(g_i/\eta_0^{\nu_i}) > 0$, cioè $W \subseteq N$.

Si continua la dimostrazione del teorema:

Dimostrazione. Si procede attraverso altri passaggi.
2^o *passo* - Si dimostra che $N^\star$ è $(r-1)$ -dimensionale.
Si applica il lemma precedente al caso in cui N è generato dall'ideale $(\phi_0, .., \phi_m)$ e $N^\star$ da $(\phi_{00}, \phi_{10} ..., \phi_{mm})$, dove i $\phi_{ij} = \phi_i(\eta_{0j}, .., \eta_{nj})$. La *relazione* (5.2) diventa $\phi_{ij} = \phi_i/\phi_j^\nu$, dove ν è il grado comune alle forme ϕ_i. Da questa relazione si deduce che $\phi_{ij}^{\nu+1} = \phi_{ii}\phi_{jj}^\nu$ e, conseguenetemente, gli ideali $(\phi_{00}, \phi_{10}, ..., \phi_{m0})$ e $(\phi_{00}, \phi_{11}, .., \phi_{mm})$ hanno lo stesso radicale. Quindi, $N^\star$ è definito da $(\phi_{00}, \phi_{11}, .., \phi_{mm})$. Ora si ha

$$\phi_{ii}/\phi_{jj} = (\phi_i/\phi_j)^{\nu+1} = \eta_{ki}^{\nu+1}/\eta_{kj}^{\nu+1} \text{ per ogni } i, j = 0, ..., m \text{ e } k = 0, .., n$$

Quindi, ogni componente irriducibile di $N^\star$ per cui $\eta_{kj} \neq 0$ è componente dell'ideale principale (ϕ_{jj}) ed è, quindi, $(r-1)$ - dimensionale.
Ora, tenendo presente che $(\phi_i) = IU_i$ (*paragrafo* (5.4)), la varietà definita

dall'ideale $(\phi_0, ..., \phi_m)$ consiste di varietà $(r-1)$ - dimensionali dell'ideale I e del luogo fondamentale F. Quindi:
3^o *passo* - Si dimostra che $T^{\star^{-1}}$ è $(r-1)$ - dimensionale se e solo se I è l'ideale unità. L'ipotesi $I = (1)$ implica che ogni membro $C_{(\lambda)}$ del sistema lineare $|C|$ associato alla corrispondenza birazionale *è* l'intersezione completa di V con l'ipersuperfice dello spazio ambiente proiettivo, rappresentata da:

$$\lambda_0\phi_0(x_0, .., x_n) + \lambda_1\phi_1(x_0, .., x_n) + ... + \lambda_m\phi_m(x_0, .., x_n) = 0$$

Viceversa, sia $C_{(\lambda)}$ un'intersezione completa. In particolare, C_0 è intersezione completa, per cui U_0 è un ideale principale, $U_0 = (\psi_0)$. Si ha $\phi_i\psi_0/\phi_0 = IU_i \cdot U_0/IU_0 = U_i$, cioè $\phi_i\psi_0/\phi_0$ è un ideale integrale. Conseguentemente, i quozienti $\phi_i\psi_0/\phi_0$ sono forme nelle η_i, cioè $\phi_i\psi_0/\phi_0 = \psi_i$. Le forme ψ_i sono, quindi, proporzionali alle forme ϕ_i e il sistema lineare $|C|$ è definito da una famiglia lineare di forme $\lambda_0\psi_0 + .. + \lambda_m\psi_m$. Se si usano le ψ_i invece delle ϕ_i, si ha $I = (1)$, da cui $T^\star\{F\}$ *è* $(r-1)$ - dimensionale.
4^o *passo* - A questo punto si introduce il modello proiettivo V'_ρ, i cui punti sono date da coordinate omogenee costituenti una base lineare delle forme $\eta'_0, .., \eta'_m$ di grado ρ. La corrispondenza tra V e V'_ρ è regolare (*lemma* (4.1)). Passare da V' aV'_ρ equivale a passare da un sistema lineare $|C|$ ad un altro che contenga come membri tutte le C di grado ρ. Quindi, dal precedente risultato, si conclude che se un multiplo sufficentemente alto di una C è un'intersezione completa, allora $T^{\star^{-1}}\{F\}$ è $(r-1)$ - dimensionale.
5^o *passo* - Si conclude con un risultato di carattere locale.
Sia F_1 una varietà fondamentale isolata di T e si assume che C sia un'intersezione completa locale rispetto a F_1. Con questo si vuole intendere che qualche ipersuperfice interseca V lungo C e lungo una variet*à* residuo non contenente F_1. Se le forme ϕ vengono sostituite con un appropriato insieme di forme ad esse proporzionali, si può anche affermare che la varietà dell'ideale I non deve contenere F_1. Siccome in generale una sottovarietà N pu*ò* essere scritta come $N = M + F$, è chiaro che $T^\star\{N\} = T^\star\{M\} + T^\star\{F\}$, dove è possibile scrivere $T^\star[M]$ al posto di $T^\star\{M\}$, dal momento che $T^\star\{M\} - T^\star[M]$ sta in $T^\star\{F\}$ (*teorema* (5.4)). Siccome $F_1 \nsubseteq M$, nessuna componente di $T^\star[F_1]$ può stare in $T^\star[M]$. Da questo segue che le componenti irriducibili di $T^\star\{F\}$ corrispondenti a varietà fondamentali isolate sono ancora componenti di $T^\star\{N\}$, e quindi sono $(r-1)$ - dimensionali. Si arriva alla stessa conclusione se si assume che qualche multiplo sufficentemente alto di C sia

un'intersezione completa localmente rispetto a F_1.
Si osservi, infine, che tutti risultati ottenuti nel corso della dimostrazione sono stati riferiti alla varietà V e al grafico di V e V'. In particolare, nel caso in cui T sia priva di elementi fondamentali in V', come già rilevato nel corso delle dimostrazione del proprietà sulle corrispondenze birazionali, V' gioca il ruolo di $V^\star$, dal momento che la corrispondenza tra queste due varietà è regolare.

Bibliografia

[ZS1] O. Zariski e P. Samuel, *Commutative Algebra*, Springer **28** (1958) vol.I

[ZS2] O. Zariski e P. Samuel, *Commutative Algebra*, Springer **29** (1960) vol.II

[Z1] O. Zariski, *Algebraic surfaces*, Springer **29** (1960)

[AM] M.F.Atiyah e I.G. MacDonald, *Introduzione all'algebra commutativa*, Feltrinelli **112** (1981)

[H1] J. Harris, *Algebraic geometry*, Springer - Verlag, New York **29** (1995), 72-85

[H2] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate text in Mathematics, Springer - Verlag, New York 1977, 31-46

[M] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Univesity 1930, 71-115

[Z2] O. Zariski, *Normal varietes and birational correspondences* **48** (1942)

[Z3] O. Zariski, *Foundation of a general theory of birational correspondences* Trans. Am. Math. Soc. **53** (1943)

[Z4] O. Zariski, *Some results in the arithmetic theory of algebraic surface* Amer. J. Math. **61** (1939)

[Z5] O. Zariski, *The reduction of the singularities of an algebraic surface* Ann. of Math. **61** (1939)

[Z6] O. Zariski, *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface* Ann. of Math. **43** (1942)

[MZ] H. T Muhly O. Zariski, *The resolution of singularities of an algebraic curve* American Journal of Math. **61** (1939)

Ringraziamenti

I miei ringraziamenti vanno al professore relatore Andrea Bruno, che mi ha costantemente seguito e guidato nell'elaborazione di questa tesi fino all'esito finale.
Ai miei genitori che non hanno mai ostacolato le mie scelte e che mi hanno guidato, incoraggiandomi soprattutto nei momenti difficili.
A mia sorella Valentina e a Daniele, compagni di vita e miei più cari sostenitori durante questo cammino.
A Bob ed Anna, e a tutti coloro che hanno sempre creduto in me.