Introduzione

Gli anelli di serie formali sono stati oggetto di molti studi negli anni passati; ma negli anni '60 i risultati ottenuti su questi anelli hanno fatto fare un grande passo in avanti nell'ambito della ricerca.
In questa tesi si è data particolare attenzione al confronto di alcune proprietà di un anello commutativo unitario con quelle dell'anello delle serie formali a coefficienti nell'anello preso in considerazione; alla verifica che tali proprietà passino o meno all'anello di serie formali e infine al confronto dei risultati, noti per i polinomi, con quelli ottenuti per le serie formali.
Le problematiche che ci si è posti, infatti, hanno già una risposta nota per l'anello dei polinomi; quindi si sono cercate delle analogie tra i risultati conosciuti per l'anello dei polinomi e quelli relativi all'anello delle serie formali. Andiamo a vedere nel dettaglio la struttura di questo lavoro che è suddiviso in quattro capitoli.

Nel primo capitolo iniziamo con l'introdurre gli anelli di serie formali in r indeterminate a coefficienti in un anello commutativo unitario A.

Sia A un anello commutativo con unità. Sia

$$A^{\mathbb{N}^r} := \{ f : \mathbb{N}^r \longrightarrow A \mid f \text{ è } un'applicazione \}.$$

Se $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ e se $f \in A^{\mathbb{N}^r}$, poniamo $f(\underline{k}) = a_{\underline{k}} = a_{k_1,\ldots,k_r}$. Dunque $f = (a_{\underline{k}})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r}$ e $\underline{k}$ è detto multiindice.

È facile verificare che $A^{\mathbb{N}^r}$ con le operazioni di somma termine a termine e di prodotto di convoluzione risulta essere un anello commutativo con unità detto *anello delle serie formali a coefficienti in A*.

Quindi si passa a definire l'anello dei polinomi in r indeterminate sempre a coefficienti in A.

Il sottoinsieme di $A^{\mathbb{N}^r}$ formato dalle applicazioni da $\mathbb{N}^r$ ad A *quasi ovunque nulle* denotato nel seguente modo:

$$A^{(\mathbb{N}^r)} := \{ g : \mathbb{N}^r \longrightarrow A \mid g \text{ è un'applicazione quasi ovunque nulla} \}$$

è un sottoanello dell'anello delle serie formali $A^{\mathbb{N}^r}$ sopra definito i cui elementi sono detti *polinomi a coefficienti in A*.

Cerchiamo una giustificazione dei nomi attribuiti agli anelli $A^{\mathbb{N}^r}$ e $A^{(\mathbb{N}^r)}$. Per $i = 1, 2, \ldots, r$ poniamo $\underline{i} = (\delta_{ih})_{1 \leq h \leq r}$ con δ_{ih} simbolo di Kronecker, e

$$X_i = (a_{\underline{k}})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \qquad \text{con} \begin{cases} a_{\underline{k}} = 0 & \text{se } \underline{k} \neq \underline{i} \\ a_{\underline{i}} = 1 \end{cases} .$$

Inoltre, se $a \in A$ consideriamo il polinomio definito nel seguente modo:

$$f_a = (a_{\underline{k}})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \qquad \text{con} \begin{cases} a_{\underline{k}} = 0 & \text{se } \underline{k} \neq \underline{0} \\ a_{\underline{0}} = a \end{cases} ;$$

allora l'applicazione da A *ad* $A^{(\mathbb{N}^r)}$ definita da:

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow A^{(\mathbb{N}^r)} \subset A^{\mathbb{N}^r} \\ a &\longmapsto f_a \end{aligned}$$

risulta essere un monomorfismo di anelli che consente di identificare A con la sua immagine in $A^{(\mathbb{N}^r)}$.

Identificando a con f_a e utilizzando $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ogni elemento $f = (a_{\underline{k}})_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} \in A^{(\mathbb{N}^r)}$ si può scrivere come somma del tipo:

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_r) := \sum_{\underline{k} = (k_1, \ldots, k_r)} a_{k_1, \ldots, k_r} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_r^{k_r}$$

e le $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sono dette indeterminate; si usa porre per comodità di notazione $\mathbf{X} := (X_1, X_2 \ldots, X_r)$ e scrivere $f(\mathbf{X}) := \sum_{\underline{k} \in \mathbb{N}^r} a_{\underline{k}} \mathbf{X}^{\underline{k}}$.

L'espressione di $f \in A^{(\mathbb{N}^r)}$, come somma si estende "formalmente" al caso in cui $f = (a_{\underline{k}})_{\underline{k}\in\mathbb{N}^r} \in A^{\mathbb{N}^r}$; possiamo scrivere una serie formale f attraverso una somma formale del tipo:

$$f(X_1, X_2 \ldots, X_r) := \sum_{\underline{k}=(k_1,\ldots,k_r)} a_{k_1,\ldots,k_r} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_r^{k_r}$$

oppure in modo compatto:

$$f(\mathbf{X}) := \sum_{\underline{k}\in\mathbb{N}^r} a_{\underline{k}} \mathbf{X}^{\underline{k}}.$$

Utilizzando le più comode notazioni che fanno intervenire le indeterminate X_i con $1 \leq i \leq r$ e le sommatorie nelle espressioni che descrivono serie e polinomi, si pone usualmente:

$$\begin{array}{lll} A[[\mathbf{X}]] & \textit{al posto di} & A^{\mathbb{N}^r} \\ A[\mathbf{X}] & \textit{al posto di} & A^{(\mathbb{N}^r)}. \end{array}$$

Ricordiamo le definizioni di grado di un polinomio e di ordine di una serie formale.

Definizione 0.1. *Un elemento di $A[\mathbf{X}]$ del tipo $a_{\underline{k}} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_r^{k_r}$ con $a_{\underline{k}} \neq 0$ è detto monomio di grado $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ e coefficiente $a_{\underline{k}}$. Sia $f(\mathbf{X}) \in A[\mathbf{X}]$ un polinomio non nullo*

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{\underline{k}=(k_1,\ldots,k_r)} a_{\underline{k}} \mathbf{X}^{\underline{k}},$$

si definisce grado di $f(\mathbf{X})$ e si denota con $deg(f(\mathbf{X}))$ il più grande tra gli interi $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ tale che $a_{k_1,\ldots,k_r} \neq 0$.

Osservazione 0.1. *Se $f(\mathbf{X})$ e $g(\mathbf{X})$ sono due polinomi non nulli di $A[\mathbf{X}]$, si ha che:*

$$\begin{array}{ll} * \ \textit{se } f(\mathbf{X})g(\mathbf{X}) \neq 0, & deg(f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})) \leq deg(f(\mathbf{X})) + deg(g(\mathbf{X})) \\ * \ \textit{se } A \textit{ è integro}, & deg(f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})) = deg(f(\mathbf{X})) + deg(g(\mathbf{X})) \\ * \ \textit{se } f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X}) \neq 0, & deg(f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})) \leq max\{deg(f(\mathbf{X})), deg(g(\mathbf{X}))\}. \end{array}$$

Definizione 0.2. *Sia $f(\mathbf{X}) \in A[[\mathbf{X}]]$ una serie formale non nulla*

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{\underline{k}=(k_1,\dots,k_r)} a_{\underline{k}} \mathbf{X}^{\underline{k}},$$

si definisce ordine di $f(\mathbf{X})$ e si denota con $ord(f(\mathbf{X}))$ il più piccolo tra gli interi $k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ tali che $a_{k_1,\dots,k_r} \neq 0$.

Osservazione 0.2. *Siano $f(\mathbf{X}), g(\mathbf{X}) \in A[[\mathbf{X}]]$ serie formali non nulle; allora si ha che:*

- $*$ *se* $f(\mathbf{X})g(\mathbf{X}) \neq 0$, $\quad ord(f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})) \geq ord(f(\mathbf{X})) + ord(g(\mathbf{X}))$
- $*$ *se* A *è integro*, $\quad ord(f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})) = ord(f(\mathbf{X})) + ord(g(\mathbf{X}))$
- $*$ *se* $f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X}) \neq 0$, $\quad ord(f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})) \geq min\{ord(f(\mathbf{X})), ord(g(\mathbf{X}))\}$.

Infine richiamiamo la definizione di forma:

Definizione 0.3. *Un polinomio $f(\mathbf{X}) \in A[\mathbf{X}]$ non nullo*

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{N}^r} a_{k_1,\dots,k_r} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_r^{k_r}$$

si dice forma di grado s se per ogni $(k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ tale che $a_{k_1,\dots,k_r} \neq 0$ si ha che $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = s$.

Nel secondo capitolo osserviamo e proviamo che è possibile generalizzare le definizioni date, nel primo capitolo, nel caso in cui lavoriamo con anelli di serie formali e anelli di polinomi in un insieme qualsiasi Λ di indeterminate. Si è osservato che per quanto riguarda l'anello dei polinomi in Λ indeterminate la definizione è proprio la generalizzazione di quella data nel caso finito, mentre quando si parla di anello di serie formali in Λ indeterminate si possono distinguere tre differenti "tipi" di anello che vengono indicati $A[[X_\lambda]]_i$ con $i = 1, 2, 3$.
Iniziamo con quello che generalizza quanto esposto nel caso finito.

Sia Λ un insieme non vuoto. L'insieme

$$\mathbb{N}^{(\Lambda)} := \{h : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N} \mid h \text{ è } un'applicazione\ quasi\ ovunque\ nulla\},$$

rispetto all'operazione di addizione, definita nel seguente modo:
per ogni $h, \tilde{h} \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ $(h + \tilde{h})(\lambda) = h(\lambda) + \tilde{h}(\lambda)$ risulta essere un semigruppo con elemento neutro $\overline{0}$.
Inoltre per ogni $h \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ esistono un numero finito di coppie (h', h'') di elementi di $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ tali che $h' + h'' = h$.
Definiamo una relazione d'ordine $\leq$ su questo semigruppo:
$\forall\, h, \tilde{h} \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$

$$h \leq \tilde{h} \Leftrightarrow h(\lambda) \leq \tilde{h}(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Ovviamente Λ è un insieme finito se e soltanto se $\mathbb{N}^{(\Lambda)} = \mathbb{N}^{\Lambda}$.

Definizione 0.4. *Sia l'insieme $A^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ di tutte le applicazioni da $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ in A ; in esso definiamo, analogamente a quanto fatto per Λ finito, le operazioni di addizione e moltiplicazione nel modo seguente: se $f, g \in A^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$*

$$(f+g)(h) = f(h) + g(h) \qquad \text{per ogni h} \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$$
$$(fg)(h) = \sum_{h'+h''=h} f(h')g(h'') \qquad \text{per ogni h} \in \mathbb{N}^{(\Lambda)};$$

rispetto alle operazioni appena introdotte $A^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ risulta essere un anello commutativo con unità.

Definizione 0.5. *Consideriamo $A^{(\mathbb{N}^{(\Lambda)})}$ il sottoinsieme di $A^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$ costituito dalle applicazioni da $N^{(\Lambda)}$ in A quasi ovunque nulle;* è *immediato verificare che $A^{(\mathbb{N}^{(\Lambda)})}$* è *un sottoanello di $A^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$.*

Motiviamo i nomi attribuiti a tali anelli ragionando come nel caso finito. Più precisamente:
per ogni $\lambda^* \in \Lambda$ sia $h_{\lambda^*} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da:

$$h_{\lambda^*}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \neq \lambda^* \\ 1 & \text{se } \lambda = \lambda^* \end{cases};$$

inoltre denotiamo con $X_{\lambda^*} : \mathbb{N}^{(\Lambda)} \longrightarrow A$ l'elemento di $A^{(\mathbb{N}^{(\Lambda)})}$ definito da

$$X_{\lambda^*}(h) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq h_{\lambda^*} \\ 1 & \text{se } h = h_{\lambda^*} \end{cases}.$$

gli elementi del tipo X_{λ^*} sono detti indeterminate.

Se identifichiamo ogni elemento $a \in A$ con il polinomio f_a definito da

$$f_a(h) = a_h \quad \text{con} \quad \begin{cases} a_h &= 0 \quad \text{se } h \neq \overline{0} \\ a_{\overline{0}} &= a \end{cases} \quad ;$$

gli elementi di $A^{(\mathbb{N}^{(\Lambda)})}$ si possono scrivere come somma di espressioni coinvolgenti elementi di A e prodotti finiti di elementi del tipo X_{λ^*} ; più precisamente sia $f \in A^{(\mathbb{N}^{(\Lambda)})}$, e sia $f(h) = a_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$; siano $h_1, h_2, \ldots, h_t$ i soli elementi di $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ per cui $a_h \neq 0$; per ogni $i = 1, 2, \ldots, t$ siano $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{is_i}$ gli unici valori di Λ per i quali $h_i(\lambda_{ij}) = n_{ij} \neq 0$ con $1 \leq j \leq s_i$. Allora

$$f = a_1 X_{\lambda_{11}}^{n_{11}} X_{\lambda_{12}}^{n_{12}} \ldots X_{\lambda_{1s_1}}^{n_{1s_1}} + \ldots + a_t X_{\lambda_{t1}}^{n_{t1}} \ldots X_{\lambda_{ts_t}}^{n_{ts_t}} .$$

L'espressione di un polinomio come somme si può estendere " formalmente" al caso in cui $f \in A^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$:

$$f = \sum_{h \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}} a_h X_{\lambda_{h1}}^{n_{h1}} X_{\lambda_{h2}}^{n_{h2}} \ldots X_{\lambda_{hs_h}}^{n_{hs_h}} .$$

Analogamente al caso finito, poniamo:

$A[[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]]$	al posto di	$\mathrm{A}^{\mathbb{N}^{(\Lambda)}}$
$A[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]$	al posto di	$\mathrm{A}^{(\mathbb{N}^{(\Lambda)})}$

chiamando tali anelli, rispettivamente, anello delle serie formali e anello dei polinomi nell'insieme di indeterminate $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ a coefficienti nell'anello A.

Estendiamo ai polinomi in Λ indeterminate le nozioni di grado e di forma: ad ogni $h \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ si può associare il numero naturale $n_h = \sum_{\lambda \in \Lambda} h(\lambda)$. Osserviamo che se $h, h', h'' \in \mathbb{N}^{(\Lambda)}$ sono tali che $h = h' + h''$, allora $n_h = n_{h'} + n_{h''}$. Utilizzeremo questo semplice fatto nella dimostrazione del Teorema 0.1

Definizione 0.6. *Sia* $f(X) \in A[X_\lambda]$ *un polinomio non nullo, allora soltanto per un numero finito di elementi* $h_1, \dots, h_r$ *di* $\mathbb{N}^{(\Lambda)}$ *si ha che* $f(h_1) \neq 0, \dots, f(h_r) \neq 0$. *Si dice grado di* $f(X)$ *e si indica con* $deg(f)$ *il massimo dell'insieme* $\{n_{h_1}, \dots, n_{h_r}\}$.
Un *polinomio non nullo* $f(X)$ *di grado* n *si dice forma di grado* n *se* $n = n_{h_1} = \dots = n_{h_r}$; *cioè se e solo se* $f(h) = 0$ *per ogni* h *tale che* $n_h \neq n$.

Quando parliamo di anello delle serie formali in Λ indeterminate possiamo distinguere tre differenti " tipi " di anello, come abbiamo già preannunciato, che vengono denotati con $A[[\{X_\lambda\}]]_i$, $i = 1, 2, 3$; allora precisando, l'anello $A[[X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda]]$ viene indicato con $A[[X_\lambda]]_3$, e viene detto anello delle serie formali in Λ indeterminate del 3^o tipo.
Andiamo ora a definire i restanti due tipi.

Definizione 0.7. *Sia*

$$\mathcal{F} = \{F \mid F \subseteq \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \text{ finito non vuoto}\};$$

l'insieme

$$A[[X_\lambda]]_1 := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} A[[F]]$$

rispetto alle operazioni di somma e prodotto così definite:
$\forall \alpha, \beta \in A[[X_\lambda]]_1$ *se* $\alpha \in A[[F_1]]$ *e* $\beta \in A[[F_2]]$

$$\alpha + \beta \in A[[F_1 \cup F_2]]$$
$$\alpha\beta \in A[[F_1 \cup F_2]]$$

risulta essere un anello, detto anello delle serie formali in Λ *indeterminate del* 1^o *tipo.*

Definizione 0.8. *Nell'insieme:*

$$A[[X_\lambda]]_2 := \{\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A[X_\lambda]_{\lambda \in \Lambda} \mid \forall i \in \mathbb{N} \; \varphi(i) = 0 \text{ oppure } \varphi(\mathrm{i}) \text{ è una forma di grado i}\}$$

consideriamo le seguenti operazioni:

$$(\varphi + \psi)(i) = \varphi(i) + \psi(i)$$
$$(\varphi\psi)(i) = \sum_{j=0}^{i} \varphi(j) \cdot \psi(i-j).$$

È facile dimostrare che rispetto a tali operazioni $A[[X_\lambda]]_2$ *è un anello con unità, detto anello delle serie formali del* 2^o *tipo.*

Il capitolo termina con la dimostrazione del seguente teorema:

Teorema 0.1. *Esistono monomorfismi di* $A[[X_\lambda]]_1$ *in* $A[[X_\lambda]]_2$ *e di* $A[[X_\lambda]]_2$ *in* $A[[X_\lambda]]_{\lambda\in\Lambda}$*; questi monomorfismi sono suriettivi se e soltanto se* Λ è *finito.*

A questo punto abbiamo introdotto gli "strumenti" con i quali lavoreremo; cercheremo, nel terzo e nel quarto capitolo, delle analogie tra alcuni risultati noti per i polinomi e quelle che otterremo per la serie formali. Dopo aver ricordato la caratterizzazione degli elementi invertibili dell'anello dei polinomi, abbiamo provato che se $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \in A[[X]]$ con $f(X) \neq 0$; allora $f(X)$ è invertibile in $A[[X]]$ se e soltanto se a_0 è invertibile in A.

È interessante osservare come il precedente risultato si possa estendere all'anello delle serie formali del 1^o *tipo:*

Proposizione 0.1. *Sia* $\gamma(X) \in A[[X_\lambda]]_1$*, indichiamo per comodità* $\gamma(X) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$*, allora* $\gamma(X)$ *è invertibile in* $A[[X_\lambda]]_1$ *se e soltanto se* f_0 *è invertibile in* A*.*

Introduciamo *ora alcune notazioni prima di passare ad alcuni risultati sugli ideali primi e massimali.*
Se I è *un ideale di* A*, allora l'insieme* $I + (X)$ *delle serie formali aventi il termine noto appartenente ad* I è *un ideale di* $A[[X]]$ *e si prova facilmente che se* I è *un ideale proprio dell'anello* A*, l'insieme* $I[[X]]$ *delle serie formali con tutti i coefficienti appartenenti ad* I *risulta essere un ideale di* $A[[X]]$

contenuto in $I + (X)$ e contenente $I\,A[[X]]$. Se P è un ideale primo di A, si ha che $P + (X)$ e $P[[X]]$ sono ideali primi di $A[[X]]$. Inoltre se M un ideale massimale di A, allora $M + (X)$ è un ideale massimale di $A[[X]]$. In generale vale che: se $\{M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali massimali di A, allora $\{M_\alpha + (X)\}$ è l'insieme degli ideali massimali di $A[[X]]$.

Segue *il paragrafo dedicato alla proprietà di noetherianità. Si deve osservare che per quanto riguarda gli anelli noetheriani quasi tutti i risultati ottenuti per l'anello dei polinomi passano all'anello delle serie formali. Si* è *ricordato il: Teorema della Base di Hilbert (1890) [1].*

Osserviamo *che la dimostrazione del teorema della Base di Hilbert si può estendere all'anello delle serie formali a coefficienti in un anello noetheriano. Abbiamo preferito dimostrare che se A è noetheriano allora anche $A[[X]]$ è noetheriano utilizzando il Teorema di Cohen [5] e il seguente teorema: Sia Q un ideale primo di $A[[X]]$ e sia Q' l'ideale di A immagine di Q tramite l'omomorfismo che manda le serie formali di $A[[X]]$ nei rispettivi termini noti in A. Allora Q è finitamente generato se e soltanto se Q' è finitamente generato. Se Q' è generato da r elementi, allora Q può essere generato da $r + 1$ elementi se $X \in Q$, altrimenti se $X \notin Q$ allora Q è generato da r elementi [11].*

Altra *importante proprietà* è *la fattorialità.* È *noto che se un anello A* è *un dominio a fattorizzazione unica allora $A[X_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$* è *a fattorizzazione unica. Banalmente se A* è *un dominio ad ideali principali allora $A[X]$* è *un dominio a fattorizzazione unica. Un risultato analogo vale anche per l'anello delle serie formali:*

Proposizione 0.2. *Se A è un dominio ad ideali principali, allora $A[[X]]$ è un UFD.[11]*

Il *capitolo termina con la caratterizzazione degli elementi nilpotenti e degli zero-divisori. Scopriremo che, in generale, non esiste una caratterizzazione per gli elementi nilpotenti di $A[[X]]$, ma soltanto risultati significativi. Ricordiamo prima la caratterizzazione dei polinomi nilpotenti.*

Un *polinomio non nullo $f(X)$ a coefficienti in un anello è nilpotente se e soltanto se ha tutti i coefficienti nilpotenti. Un risultato analogo per le* *serie formali non esiste. Si ha che se* $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in A[[X]]$ *è un elemento nilpotente, allora ogni suo coefficiente è nilpotente.*

Si è *dato un esempio di una serie formale non nilpotente pur essendo ogni suo coefficiente nilpotente.*
Nel *caso degli anelli noetheriani si ha che una serie formale* $f(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ è *nilpotente se e soltanto se esiste un intero* m *tale che* $a_i^m = 0$ *per ogni* $i \geq 0$.

Per *quanto riguarda gli zero-divisori viene richiamato un risultato decisivo sugli zero-divisori in anelli di polinomi dovuto a McCoy:*

Proposizione 0.3. (**McCoy**). *Sia* $f(X)$ *un polinomio non nullo a coefficienti in un anello* A ; $f(X)$ è *uno zero-divisore se e soltanto se esiste* $a \in A$, $a \neq 0$, *tale che* $a f(X) = 0$

Sfortunatamente, *non troveremo, in generale, un teorema analogo per l'anello delle serie formali; osserveremo il perch*è *attraverso un utile esempio;*
*La difficolt*à *riscontrata per l'anello* A *dell'esempio appena citato sta nel fatto che* A *non* è *noetheriano.*
L'analogo *del teorema di McCoy nel caso noetheriano* è *dovuto a D. Fields [6]:*

Proposizione 0.4. *Sia* A *un anello noetheriano; allora esistono* $r_1, r_2, \ldots, r_m \in A$ *elementi non nulli tali che* $f(X)$ è *uno zero-divisore di* $A[[X]]$ *se e soltanto se* $r_j \, f(X) = 0$ *per qualche* j.

Infine *nel quarto capitolo viene illustrata come sia differente la situazione per quanto riguarda il campo dei quozienti dell'anello dei polinomi rispetto a quello dell'anello delle serie formali.*
Vediamo cosa accade quando lavoriamo con l'anello dei polinomi.
Se A è *un anello qualsiasi ed* S *un suo sottoinsieme moltiplicativamente chiuso, allora si ha che* $(A[X])_S \simeq A_S[X]$.
Questo è *un risultato molto utile soprattutto quando lavoriamo con i domini d'integrit*à. *Infatti se* D è *un dominio d'integrit*à *con campo dei quozienti* K, *risulta* $(D[X])_{D^*} \simeq K[X]$, *dove* $D^* = D \setminus \{0\}$.
In questo modo, sfruttando i risultati relativi al dominio euclideo $K[X]$,

riusciamo a dedurne alcuni relativi a $D[\,X\,]$.
Per *gli anelli di serie formali la situazione* è *molto diversa. Se* D è *un dominio d'integrità con campo dei quozienti K, sappiamo che si verifica la seguente situazione, dove L denota il campo dei quozienti di $D[[\,X\,]]$:*

$$\begin{array}{ccc} K[[\,X\,]] & \hookrightarrow & K((\,X\,)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D[[\,X\,]] & \hookrightarrow & L \end{array}$$

dove $K((\,X\,))$, campo delle serie di Laurent, è *il campo dei quozienti di $K[[\,X\,]]$.*
In generale se D è *un dominio d'integrità con campo dei quozienti K, il campo dei quozienti (che per comodità indicheremo con "q. f.") di $D[[\,X\,]]$* è *sempre contenuto propriamente in $K((\,X\,))$:*

$$q.\,f.\,(\,D[[\,X\,]]\,) \subseteq K((\,X\,)).$$

Con *il prossimo teorema, dovuto a Gilmer [7], vengono stabilite condizioni necessarie e sufficienti affinchè $K((\,X\,)) = q.\,f.\,(\,D[[\,X\,]]\,)$.*

Teorema 0.2. *Sia D un dominio d'integrità; sia L il campo dei quozienti di $D[[\,X\,]]$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$L = K((\,X\,))$.*
2. *$K[[\,X\,]] = (\,D[[\,X\,]]\,)_N$, dove N è l'insieme degli elementi non nulli di A.*
3. *Se $\{\,(\,a_i\,)\,\}_{i=0}^{\infty}$ è una successione di ideali principali non nulli di D, allora $\bigcap_{i=0}^{\infty}(\,a_i\,) \neq (\,0\,)$.*

Alla *luce del risultato di Gilmer possiamo affermare che l'uguaglianza dei campi dei quozienti di $D[[\,X\,]]$* e di K[[X]] *si verifica solo in rari casi; non appena decadono le condizioni per cui si avrebbe l'uguaglianza, quindi se esiste una successione di elementi non nulli di D $\{\,a_i\,\}_{i=0}^{\infty}$ tale che $\bigcap_{i=0}^{\infty}(\,a_i\,) = (\,0\,)$, si verifica che $q.\,f.\,(\,D[[\,X\,]]\,) \subsetneq K((\,X\,))$.*

A *questo punto ci possiamo porre la seguente domanda: "Se il campo dei quozienti di* $K[[X]]$ è *più grande del campo dei quozienti di* $D[[X]]$, *di quanto* è *più grande?" A tale problematica ha dato una risposta P. Sheldon in un lavoro pubblicato nel 1971 [15]. Più precisamente, Sheldon si occupa del seguente problema. Sia* D *un dominio d'integrità e sia* a *un elemento di* $D^{*} = D \setminus \{0\}$ *tale che* $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^{i} D = (0)$ *allora si vuole confrontare il campo dei quozienti di* $D[[X]]$ *con quello di* $(D[1/a])[[X]]$. *Sheldon, inoltre, ci fornisce un risultato circa l'esistenza o meno di un elemento* a *di* D *per il quale* $D[[X]]$ e $(D[1/a])[[X]]$ *abbiano lo stesso campo dei quozienti.*

La *tesi, si conclude riportando il risultato di sheldon:*

Teorema 0.3. *Sia* D *un dominio d'integrità, sia* a *un elemento di* D *non nullo. Se* $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^{i} D = (0)$, *allora il campo dei quozienti di* $D[[X/a]]$ *ha grado di trascendenza infinito sul campo dei quozienti di* $D[[X]]$.

Bibliografia

[1] *M. Atiyah - I. McDonald,* Introduction to Commutative Algebra, *Addison-Wesley Publishing Co., U.S.A., 1969.*

[2] *J. W. Brewer,* Power series over commutative rings, *Dekker, New York, 1981.*

[3] *N. Bourbaki,* Algbre, *Ch. 4, Hermann, Paris, 1958.*

[4] *N. Bourbaki,* Commutative Algebra, *Springer, Berlin, 1989.*

[5] *I. S. Cohen,* Rings with restricted minimum condition, *Duke Math. J.* ***17*** *(1950), 27-42.*

[6] *David E. Fields,* Zero Divisors and nilpotent elements in power series rings, *Amer. Math. Soc.* ***27*** *(1971), 427-433.*

[7] *R. Gilmer,* A note on the quotient field of the domain $D[[\,X\,]]$, *Proc. Amer. Math. Soc.* ***18*** *(1967), 1138-1140.*

[8] *R. Gilmer,* On polynomial and power series rings over a commutative ring, *Rocky Mountain J. Math.* ***5*** *(1975), 157-175.*

[9] *R. Gilmer,* Power series rings over a Krull domain, *Pacific J. Math.* ***29*** *(1969), 543-549.*

[10] *S. Lang,* Algebra, *Addison-Wesley Publishing Co., U.S.A., 1993.*

[11] *I. Kaplansky,* Commutative rings, *Polygonal Publishing House, Washington, N.J., 1994.*

[12] *H. Matsumura*, Commutative ring theory, *Cambridge University Press, Cambridge, 1989.*

[13] *P. Samuel*, On unique factorizzation domains, *III, J. Math,* ***5*** *(1961), 1-17.*

[14] *P. Samuel*, Anneaux Factoriels, *Soc. Math, S*a *o Paulo, 1963, 58 e ss.*

[15] *Philip B. Sheldon*, How changing $D[[\,X\,]]$ changes its quotient field, *Tran. Amer. Math. Soc.,* ***22*** *(1971), 223-231.*

[16] *O. Zariski - P. Samuel,* Commutative Algebra, *Vol. I, Springer, New York, 1975.*