UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica

presentata da Erika Li Marzi

Aspetti rilevanti dell'estendibilità di scoppiamenti di varietà algebriche

Relatore Prof. A.F.Lopez

ANNO ACCADEMICO 2001-2002
LUGLIO 2002

Sintesi

La geometria algebrica gioca un ruolo centrale nella matematica del XIX secolo e fra i principali protagonisti della ricerca in materia emergono le figure di Kronecker e Dedekind con un punto di vista puramente algebrico e Brill e Noether con un approccio più geometrico.
Nel XX secolo, e in particolare, negli anni 50 e 60 assistiamo a una riscrittura dei fondamenti della geometria algebrica con l'introduzione dei concetti di fasci e schemi ad opera soprattutto della scuola francese (Serre e Grothendieck). Ciò ha permesso di affrontare, con nuove tecniche, diverse problematiche fra cui quella che vedremo dell'estendibilità.
In questo lavoro ci proponiamo di analizzare alcuni aspetti riguardanti l'estendibilità di scoppiamenti di varietà algebriche.
Riteniamo opportuno, innanzi tutto, illustrare la nozione di estendibilità.
Sia Y una sottovarietà dello spazio proiettivo n-dimensionale $\mathbb{P}^n$, non degenere, di dimensione ≥ 1, su un campo algebricamente chiuso k. Una sottovarietà X non degenere dello spazio proiettivo $(n+1)$-dimensionale $\mathbb{P}^{n+1}$ è detta essere un'*estensione* di Y (in $\mathbb{P}^{n+1}$) se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

1) $\dim(X) = \dim(Y) + 1$;

2) esiste un'immersione lineare $i : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ tale che $Y = X \cap H$, dove $H := i(\mathbb{P}^n)$.

Fissiamo $Y \subset \mathbb{P}^n$ come sopra, un'immersione lineare $i : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$ e poniamo $H = i(\mathbb{P}^n)$. Consideriamo un punto arbitrario $x \in \mathbb{P}^n - H$ e denotiamo con X il cono proiettivo in $\mathbb{P}^{n+1}$ sopra Y con vertice in x. X è chiaramente un'estensione di Y in $\mathbb{P}^{n+1}$, chiamata *l'estensione banale.*
Diremo che $Y \subset \mathbb{P}^n$ *è estendibile* se esiste X un'estensione non banale di Y in $\mathbb{P}^{n+1}$.
Già agli inizi del secolo scorso, e precisamente nel 1909, Scorza ha dimostrato la non estendibilità delle varietà di Veronese di dimensione maggiore di

1 e delle varietà di Segre (eccetto che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$). In anni più recenti (1980-1985) Sommese, Fujita, Zak, Badescu e L'vosky, tra gli altri, si sono occupati della stessa problematica individuando condizioni sufficienti per la non estendibilità e fornendo nuovi esempi di varietà che soddisfino tale proprietà. È interessante ricordare alcuni risultati cui ha portato la ricerca in materia:

- (Fujita) Una varietà proiettiva $Y \subset \mathbb{P}^n$, liscia, di dimensione ≥ 2 non ammette estensioni non banali se $H^1(Y, T_Y(-i)) = 0$ per ogni $i > 0$.

Vedremo, nel terzo capitolo, come è possibile limitarsi a studiare il caso $i = 1$; per fare ciò utilizzeremo il seguente risultato cui è pervenuto Zak.

- (Zak) Una sottovarietà Y di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$, liscia, non degenere, di codimensione ≥ 2, tale che $h^0(Y, N_{Y|\mathbb{P}^n}(-1)) = n + 1$ non è sezione iperpiana di alcuna varietà $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ diversa da un cono su Y.

Il caso da noi analizzato sarà quello dello scoppiamento in un punto P di una superficie proiettiva, non singolare su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Nel primo capitolo daremo una descrizione delle mappe Gaussiane e delle loro principali proprietà prestando particolare attenzione al teorema di Zak, che vedremo essere uno tra gli strumenti principali nella risoluzione del nostro problema. Entreremo maggiormente nel dettaglio per quanto riguarda il caso di mappe Gaussiane su curve algebriche e, in tal caso, vedremo che lo studio del problema dell'estendibilità si riduce allo studio della suriettività della mappa Gaussiana associata a un fibrato lineare L e al fascio canonico K_X.

Successivamente ci occuperemo di definire e analizzare lo scoppiamento di varietà algebriche concentrando prima la nostra attenzione al caso dello scoppiamento di una varietà in un punto, primo e più tipico esempio di mappa birazionale che non è un isomorfismo. Vedremo come è possibile generalizzare tale nozione a uno schema noetheriano qualsiasi definendo lo scoppiamento su ogni aperto affine e procedendo quindi al loro incollamento. Tratteremo,

infine, il caso di una superficie proiettiva, non singolare su un campo algebricamente chiuso k.
Il lavoro prosegue entrando nel vivo dell'analisi del problema, pervenendo a conclusioni che legano l'estendibilità dello scoppiamento di una varietà con l'estendibilità della varietà stessa. Sia $\tilde{X}$ lo scoppiamento in un punto P di una superficie proiettiva X irriducibile, non singolare, e sia $L = \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE)$ un fibrato lineare molto ampio che definisca un'immersione $\tilde{X} \subset \mathbb{P}^n$; ci proponiamo di stabilire condizioni per a ed L che garantiscano la non estendibilità di $\tilde{X}$.
Aggiungeremo, infine, alcune appendici volte a chiarire taluni aspetti preliminari richiamati più volte nel testo.

Riferimenti bibliografici

[1] E.Arbarello, E.Sernesi, *Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor*, Invent. Math.**49** (1978), no. 2, 99–119.

[2] J.Wahl, *Gaussian maps on algebraic curves*, J.Diff.Geom **32** (1990), 77-98

[3] R.Lazarsfeld,*A sampling of vector bundle tecniques in the study of linear series*, in M.Cornalba et al (eds), Lectures on Riemann Surfaces, World Scientific Press (Singapore, 1989), 500-559

[4] D.Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, Questions on algebraic varieties (C.I.M.E. 1969), Corso, Rome, 1970

[5] R.Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977

[6] J.Wahl, *Introduction to Gaussian maps on a algebraic curve*, to appear in Proceedings of the Conference on Projective Varieties, Trieste 1989

[7] J.Wahl, *A cohomological characterization of* $\mathbb{P}^n$, Invent. Math.**72** (1983), 315-322