

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI “ROMA TRE”
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

SINTESI DELLA TESI DI LAUREA IN MATEMATICA
di

Katia Lucca

**Stime dei parametri
nel modello di Vasicek generalizzato,
con applicazioni allo studio del mercato
italiano
dei titoli obbligazionari.**

Relatori

Prof. Alessandro Ramponi

Prof.ssa Lucia Caramellino

Firma del Candidato

Anno Accademico 2000-2001

Classificazione AMS: 91B24, 62M05, 62M020

Parole chiave: struttura a termine dei tassi di interesse, modello di Vasicek,
modello di Svensson, stima di parametri per diffusioni.

1 Introduzione

La relazione che, in un investimento lega l'evoluzione del tasso di interesse rispetto alla maturità dell'investimento stesso, viene detta struttura a termine.

Focalizzeremo il nostro interesse su quegli strumenti finanziari detti *a reddito fisso* ed in particolare sulle obbligazioni. Queste sono dei contratti in base ai quali chi investe diventa a tutti gli effetti creditore dell'ente che ha emesso i titoli, il quale si impegna a restituire, nei tempi stabiliti a priori, l'ammontare del debito più l'interesse precedentemente pattuito.

La funzione di sconto $d(t)$ è quella curva che descrive la struttura a termine dei tassi di interesse e ci permette quindi di attualizzare il valore del denaro: in generale il valore attualizzato X_0 di una certa quantità di denaro X_T al tempo T sarà

$$X_0 = X_T d(T) \quad (1.1)$$

In altre parole la (1.1) rappresenta la quantità di denaro che occorre depositare in banca al tempo $t = 0$ per avere una quantità di denaro X_T al tempo T . I valori della funzione d in un insieme finito di istanti $d(t_1), d(t_2), \dots, d(t_N)$ sono chiamati fattori di sconto (*discount factors*).

In generale, un'obbligazione di valore nominale V , con cedole di pagamento C , maturità T , e tempi di pagamento $t_1, t_2, \dots, t_N = T$, avrà un valore attualizzato pari a:

$$Cd(t_1) + Cd(t_2) + \dots + (C + V)d(T) \quad (1.2)$$

Più in generale, la funzione di sconto e le quantità ad essa legate, possono essere descritte matematicamente come funzioni di due variabili, per poter modellizzare la loro evoluzione nel tempo. Il valore al tempo t di una quantità unitaria di denaro che sarà ricevuta al tempo $T > t$, è dunque $d(t, T)$. La *curva dei rendimenti*, o struttura a termine dei tassi di interesse $R(t, T)$ può essere definita mediante la seguente relazione:

$$d(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)} \quad \Leftrightarrow \quad R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln d(t, T)$$

e rappresenta quindi il tasso di interesse su una quantità unitaria di denaro che verrà ricevuta al tempo T , con composizione continua degli interessi (continuous compounding). Se consideriamo il futuro come certo, quindi se assumiamo che tutti i tassi di interesse $(R(t, T))_{t \leq T}$ siano noti, allora in una situazione senza opportunità di arbitraggio la funzione $d(t, T)$ deve soddisfare

$$\forall \quad t < u < s \quad d(t, s) = d(t, u)d(u, s).$$

Da questa relazione si ricava anche l'uguaglianza $d(t, t) = 1$, e segue che se d è regolare, esiste una funzione r_t tale che

$$\forall t < T \quad d(t, T) = \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$$

e di conseguenza

$$R(t, T) = \frac{1}{T - t} \int_t^T r_s ds \quad (1.3)$$

La funzione r_t è interpretata come il *tasso di interesse istantaneo* o *tasso spot*. In una situazione di incertezza la (1.3) non è sempre vera. Al tempo t i futuri tassi di interesse $R(u, T)$ per $t < u < T$ non sono noti: tuttavia, è lecito ritenere che esista una certa relazione tra i diversi tassi di interesse e lo scopo della modellizzazione è appunto determinarla.

Un'altra quantità importante è il tasso forward. Si definisce *tasso forward istantaneo* $f(t, s)$ per $t \leq s$ il tasso di interesse istantaneo al tempo s come anticipato dal mercato al tempo t [12]. Tale tasso è legato alla funzione di sconto dalla relazione

$$d(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}.$$

D'altra parte, assumendo la derivabilità della funzione $d(t, T)$, il tasso forward istantaneo può essere definito dalla relazione

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln d(t, T)$$

L'evoluzione dei tassi di interesse non è certamente deterministica, ed è solitamente modellizzata, in un contesto probabilistico, come un processo aleatorio. I modelli che abbiamo approfondito sono "ambientati" in un futuro incerto: i tassi di interesse non sono noti a priori, quindi penseremo al tasso spot nei termini di un processo aleatorio, in particolare un processo di diffusione. Lavoreremo supponendo che non esistano opportunità di arbitraggio, cioè che chi investe non abbia mai la possibilità di ottenere dei guadagni senza rischio.

Per ottenere questo, si suppone l'esistenza di una probabilità P^* , sotto la quale i prezzi dei titoli scontati siano delle martingale. In particolare si assume in questo contesto che

$$d(t, T) = \mathbf{E}^* \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathbf{F}_t \right] \quad (1.4)$$

E' importante osservare che nè la funzione di sconto nè i tassi di interesse sono direttamente osservabili, ma devono essere stimati a partire dai dati che sono disponibili sul mercato.

Il principale scopo di questa tesi è quello di studiare alcune tecniche di stima della struttura a termine dei tassi di interesse, partendo dalle "osservazioni" quotidiane dei prezzi delle obbligazioni. Alcune di queste tecniche sono quindi state implementate a partire dai dati del mercato obbligazionario italiano dei titoli di stato.

2 I modelli

2.1 I modelli parsimoniosi

La specificazione di un modello matematico per la struttura a termine dei tassi di interesse per un fissato istante t , prende in generale il nome di modello *cross-sectional*. Date le relazioni che sussistono tra la funzione di sconto $d(t, T)$, il tasso di interesse $R(t, T)$ ed il tasso forward $f(t, T)$, parleremo di modelli cross-sectional quando si stabilisce una forma funzionale rispetto alla variabile T per una di queste funzioni. Una classe di modelli particolarmente utilizzata, è costituita dai *modelli parsimoniosi*. L'idea di base di questa classe di modelli, è quella di imporre a priori alcune proprietà della funzione di sconto, o del tasso forward, e contemporaneamente di cercare di limitare il numero dei parametri che determinano la forma funzionale. Tali parametri devono essere quindi stimati a partire dalle quantità osservate.

Nei risultati successivi utilizzeremo in particolare il *modello di Svensson*, dato da

$$f(t, T) = f_S(T - t; z) = z_1 + (z_2 + z_3(T - t)) e^{-z_5(T-t)} + z_4(T - t) e^{-z_6(T-t)} \quad (2.1)$$

dove T è la maturità e $z = (z_1, \dots, z_6)$ è un insieme di parametri tali che $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ e $\frac{z_3}{z_5} > 0$ da cui segue che la funzione di sconto è

$$d(t, T) = d_S(T - t; z) = \exp \left[-z_1 T + \frac{z_2}{z_5} (e^{-z_5 T} - 1) + \frac{z_3}{z_5} T e^{-z_5 T} + \frac{z_3}{z_5^2} (e^{-z_5 T} - 1) + \frac{z_4}{z_6} T e^{-z_6 T} + \frac{z_4}{z_6^2} (e^{-z_6 T} - 1) \right]$$

3 Modelli per il tasso spot: il modello di Vasicek e di Vasicek generalizzato

Una delle tecniche maggiormente utilizzate per modellizzare l'evoluzione della struttura a termine dei tassi di interesse, consiste nell'assumere che il tasso

spot risk-free, sia un processo stocastico markoviano, particolare soluzione di un'equazione differenziale stocastica. Uno dei più noti modelli è il modello di Vasicek. Tale processo è un processo che segue lo schema di *Ornstein-Uhlenbeck*, con drift lineare e coefficiente di diffusione costante.

$$\begin{cases} dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma dB_t \\ r_0 = r \end{cases} \quad (3.1)$$

dove α, β, σ sono costanti non negative, mentre B_t è un moto Browniano standard. La soluzione di questa equazione differenziale stocastica ci dà l'espressione esplicita del tasso spot:

$$r_t = r e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s. \quad (3.2)$$

Questo è un modello gaussiano, e r_t si distribuisce secondo una legge normale

$$r_t \sim \mathbf{N} \left(r e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}), \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \right).$$

Si può dimostrare [12] che il prezzo dell'obbligazione per il modello di Vasicek è

$$P(t, T) = \exp \left(\frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} [R_\infty - r_t] - (T - t)R_\infty - \sigma^2 \frac{(1 - e^{-\beta(T-t)})^2}{4\beta^3} \right)$$

dove $R(\tau, r_t)$ è la *curva dei rendimenti*, e $R_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau, y)$ rappresenta il tasso a lungo termine.

E' un modello molto usato perché, grazie alle sue proprietà gaussiane, ci permette di ricavare analiticamente tutte le quantità di interesse finanziario, ma allo stesso tempo non è nulla la probabilità di ottenere da questo modello dei tassi di interesse negativi, il che è un evidente svantaggio.

Naturale estensione del modello di Vasicek è appunto il modello di Vasicek generalizzato:

$$\begin{cases} dr_t = (\alpha_t - \beta_t r_t) dt + \sigma_t dB_t \\ r_0 = r. \end{cases} \quad (3.3)$$

In cui le variabili che costituiscono sia il drift che il coefficiente di diffusione sono funzioni dipendenti dal tempo. La soluzione è data da

$$r_t = e^{-Kt} \left(r + \int_0^t e^{Ku} (\alpha_u du + \sigma_u dB_u) \right)$$

dove $K_t = \int_0^t \beta_s ds$. Questo modello continua a mantenere le proprietà gaussiane infatti

$$r_t \sim \mathbf{N} \left(e^{-K_t} \left(r + \int_0^t e^{K_u} \alpha_u du \right), e^{-2K_t} \int_0^t e^{2K_u} \sigma_u^2 \right).$$

Il prezzo dell'obbligazione sarà in questo caso dato da

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbf{E} \left[e^{-\int_t^T r_u du} \right] = \\ &= \exp [-r_t B(t, T) - A(t, T)] \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove

$$\begin{aligned} B(t, T) &:= \int_t^T e^{(K_t - K_u)} du \\ A(t, T) &:= \int_t^T du \int_t^u \left[e^{(K_s - K_u)} \alpha_s - \int_t^s e^{(-K_s - K_u + 2K_y)} \sigma_y^2 dy \right] ds. \end{aligned}$$

3.1 Il modello di Vasicek-Svensson generalizzato

Poichè la curva dei tassi forward varia nel tempo, risulta di notevole importanza lo studio di modelli che caratterizzano l'evoluzione temporale di tali curve. Di particolare interesse abbiamo trovato il legame tra le curve di Svensson e il modello di Vasicek generalizzato. I risultati ottenuti da Filipovic [6] permettono di identificare un processo di diffusione consistente con il modello di Svensson

$$f(t, T) = f_S(T - t, z) = z_1 + (z_2 + z_3(T - t)) e^{-z_5(T-t)} + z_4(T - t) e^{-z_6(T-t)} \quad (3.5)$$

che corrisponde ad un modello di Vasicek generalizzato per il tasso spot. Utilizzando le proprietà dei processi di diffusione abbiamo riottenuto esplicitamente tale risultato. Consideriamo il modello di Vasicek generalizzato (3.3) dove

$$\alpha_t = z_3 e^{-z_5 t} + z_4 e^{-2z_5 t} + z_1 z_5 \quad \sigma_t = \sqrt{z_4 z_5} e^{-z_5 t} \quad \beta_t = z_5 \quad (3.6)$$

Sappiamo che, per definizione, il tasso forward è dato da:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t, T))$$

Utilizzando i risultati precedenti, possiamo calcolare il tasso forward esplicitamente, mediante la formula

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln [e^{-r_t B(t, T) - A(t, T)}] = \\ &= r_t \frac{\partial}{\partial T} B(t, T) + \frac{\partial}{\partial T} A(t, T). \end{aligned} \quad (3.7)$$

con $A(t, T)$ e $B(t, T)$ come viste nel paragrafo precedente, dato che in questo caso la forma funzionale di $\alpha_t, \sigma_t, \beta_t$ è fissata. Quindi a partire dalla (3.3), imponendo la (3.6), dalla (3.4) e (3.7) si ha

$$f(t, T) = r_t e^{z_5(t-T)} + z_3 e^{-z_5 T}(T-t) + z_4 e^{-2z_5 T}(T-t) + z_1 - z_1 e^{z_5(t-T)} \quad (3.8)$$

Considerando ora il modello di Svensson (3.5) in cui i parametri dipendono dal tempo

$$f(t, T; Z_t) = Z_t^{(1)} + \left(Z_t^{(2)} + Z_t^{(3)}(T-t) \right) e^{-Z_t^{(5)}(T-t)} + Z_t^{(4)}(T-t) e^{-Z_t^{(6)}(T-t)} \quad (3.9)$$

e poichè

$$r_t = f(t, t; Z_t) = Z_t^{(1)} + Z_t^{(2)}$$

si ricava il risultato desiderato assumendo che

$$Z_t^{(1)} = z_1; \quad Z_t^{(2)} = r_t - z_1; \quad Z_t^{(3)} = z_3 e^{-z_5 t} \quad (3.10)$$

$$Z_t^{(4)} = z_4 e^{-2z_5 t}; \quad Z_t^{(5)} = z_5; \quad Z_t^{(6)} = 2z_5. \quad (3.11)$$

Sostituendo infatti la (3.10) e la (3.11) in (3.9), si ottiene

$$f(t, T; Z_t) = z_1 - z_1 e^{-z_5(T-t)} + r_t e^{-z_5(T-t)} + z_3 e^{-z_5 T}(T-t) + z_4 e^{-2z_5 T}(T-t)$$

che coincide con la (3.8).

4 Alcuni metodi di stima

4.1 Stime cross-sectional

Consideriamo un'obbligazione caratterizzata dalla maturità T , cedola C , date di pagamento delle cedole $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ e prezzo $P_{\tau, C}(t, T)$. Il valore di tale obbligazione può essere espresso come il valore di un portafoglio di obbligazioni zero-coupon scontate e dunque

$$P_{\tau, C}(t, T) = \sum_{i=1}^N CP(t, \tau_i) = \sum_{i=1}^N Cd(t, \tau_i). \quad (4.1)$$

Assumeremo che $t = 0$ e quindi $P_{\tau, C}(0, T) = P_{\tau, C}(T)$. In generale, le procedure di stima cross-sectional della struttura a termine dei tassi di interesse che utilizzano i prezzi delle obbligazioni quotate, si riducono alla scelta di una famiglia di funzioni dipendenti dal parametro finito-dimensionale $z \in$

$\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}^k$, ed alla conseguente stima di tale parametro ottenuta genericamente mediante la minimizzazione della somma dei residui quadratici

$$S^2 = \sum_{j=1}^N \left[P_{\tau_j, C_j}^{(j)}(T_j) - P_{\tau_j, C_j}(T_j) \right]^2$$

dove $P_{\tau_j, C_j}^{(j)}(T_j) \quad j = 1, \dots, N$ sono i prezzi osservati e $P_{\tau_j, C_j}(T_j) \quad j = 1, \dots, N$ i prezzi derivati dal modello assunto tramite la (4.1). La quantità S^2 può essere minimizzata utilizzando una procedura di minimi quadrati non lineari vincolati.

La stima cross-sectional utilizza i prezzi delle obbligazioni in un singolo istante di tempo, ciò fa sì che il modello così stimato produrrà la miglior stima (nel senso dei minimi quadrati) per la struttura a termine relativa ad un solo giorno. Da notare però che la stima dei parametri può anche essere difficile e che i parametri stimati non sono stabili nel tempo.

Per stimare i modelli sopra descritti, sono stati usati i dati del mercato obbligazionario italiano, del periodo che va dal 26/8/98 al 21/11/00 per un totale di 323 giorni. I dati ottenuti da Datastream¹, sono formati esclusivamente dai titoli in vita nel momento in cui sono stati scaricati e comprendono dai 98 titoli quotati il 21/11/00 ai 62 titoli quotati il 26/8/98.

La stima dei parametri z_1, \dots, z_6 del modello di Svensson (2.1) è stata ottenuta minimizzando la quantità S^2 con la routine *lsqnonlin* del software di calcolo *Matlab 6.0*. Poichè si tratta di un problema di minimizzazione non lineare, il punto di partenza dell'algoritmo è risultato molto importante, come abbiamo potuto osservare nella pratica. Abbiamo dunque sperimentato differenti strategie per la scelta del punto iniziale (z_1^0, \dots, z_6^0) . Il primo insieme di risultati è stato ottenuto prendendo (z_1^0, \dots, z_6^0) come unico punto di partenza per tutti i giorni di contrattazione. Tale punto è stato ottenuto come la migliore approssimazione (nel senso dei minimi quadrati) del modello di Svensson alla stima della curva forward ricavata con un metodo molto utilizzato basato sulle funzioni spline. Nel secondo insieme di risultati, come punto iniziale per la stima dei parametri relativi al giorno i -esimo, abbiamo utilizzato la stima ottenuta nel giorno $i - 1$, mentre per il primo giorno abbiamo considerato lo stesso punto di partenza del caso precedente (z_1^0, \dots, z_6^0) . Il terzo gruppo di risultati deriva dall'aggiornamento ogni 30 giorni del punto di partenza, mentre per il quarto gruppo è stato effettuato l'aggiornamento di (z_1^0, \dots, z_6^0) ogni 5 giorni di contrattazione.

La prima, la terza e la quarta strategia portano a risultati simili: il residuo medio e la deviazione standard di residui è molto simile per tutti e tre i

¹Società del gruppo Thomson Financial, che si occupa di consulenza finanziaria.

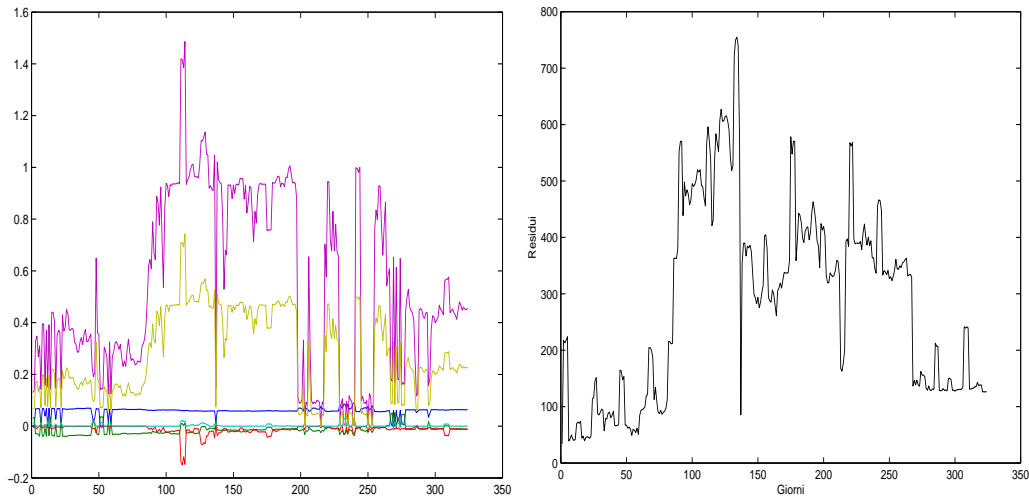


Figura 1: A sinistra sono rappresentati gli andamenti dei parametri z_1, \dots, z_6 , ottenuti con la prima strategia, secondo questi colori: z_1 =blu, z_2 =rosso, z_3 =nero, z_4 =verde, z_5 =viola, z_6 =giallo. A destra i residui dello stesso metodo.

metodi, mentre questi valori crescono molto quando aggiorniamo il punto iniziale ogni giorno, ovvero con la seconda strategia.

4.2 Stime dei parametri dei processi di diffusione

L'approccio classico per affrontare il problema di stima dei parametri di un processo di diffusione è quello della massima verosimiglianza che sotto deboli condizioni ha le note buone proprietà. Tuttavia non è sempre possibile esplicitare la funzione di verosimiglianza per un generico processo di diffusione ed inoltre, se l'intervallo tra le osservazioni è grande questo stimatore risulta essere fortemente distorto. Una possibile alternativa consiste nel discretizzare il processo di diffusione secondo lo schema di Eulero e quindi applicare a questo il metodo della massima verosimiglianza. Come alternativa a questi due metodi molto noti ed utilizzati abbiamo studiato il metodo di stima attraverso le *Martingale estimating functions* (MEF), come proposto da [3]. L'idea di questo metodo di stima è quella di "compensare" una funzione della verosimiglianza, in modo da ottenere una martingala e quindi poterne sfruttare le proprietà per stimare i parametri desiderati. Abbiamo applicato queste tecniche sia sul modello di Vasicek classico che sul modello di Vasicek generalizzato, con i seguenti risultati.

- La funzione di verosimiglianza per il modello di Vasicek è

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[2\pi \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta\Delta}) \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r_{t_i} - e^{-\beta\Delta} r_{t_{i-1}} - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta\Delta})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-\beta\Delta})}} \right)^2 \right]$$

e la sua massimizzazione risulta numericamente difficile;

- Il modello di Vasicek, una volta discretizzato con lo schema di Eulero diventa

$$r_{t+\Delta t} = \alpha\Delta t + (1 - \beta\Delta t) r_t + \sigma\sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

quindi la funzione di verosimiglianza è

$$L(\theta) = (2\pi\sigma^2\Delta t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_{t_i} - (a + b r_{t_{i-1}})}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right)^2 \right]$$

da cui si ricavano esplicitamente gli stimatori

$$\hat{b} = \frac{-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t_i} r_{t_{i-1}} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n r_{t_{i-1}} \sum_{i=1}^n r_{t_i}}{\frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n r_{t_{i-1}} \right)^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t_{i-1}}^2}, \quad \hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t_i} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{t_{i-1}} \hat{b}$$

e poichè $b = 1 - \beta\Delta$ e $a = \alpha\Delta$ avremo che $\hat{\beta} = \frac{1-\hat{b}}{\Delta t}$ e $\hat{\alpha} = \frac{\hat{a}}{\Delta t}$

- Il metodo di stima MEF per un processo di diffusione

$$dX_t = b(X_t; \theta) dt + \sigma(X_t; \theta) dB_t \quad X_0 = x$$

Consiste nel risolvere rispetto al parametro θ il sistema di equazioni $\tilde{G}_n(\theta) = 0$ dove

$$\tilde{G}_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\dot{b}(X_{(i-1)\Delta}; \theta)}{\sigma^2(X_{(i-1)\Delta}; \theta)} \{X_{i\Delta} - F(X_{(i-1)\Delta}; \theta)\}$$

$\theta = (\alpha, \beta)$ e $F(x, \theta) = \mathbf{E}_\theta(X_{t+\Delta} | X_t = x)$.

Nel caso del modello di Vasicek abbiamo

$$\tilde{G}_n(\alpha, \beta) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} \left(r_i - r_{i-1} e^{-\beta\Delta} - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta\Delta}) \right), \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n \frac{-r_{i-1}}{\sigma^2} \left(r_i - r_{i-1} e^{-\beta\Delta} - \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta\Delta}) \right) \right\}^T$$

dove $r_{i\Delta} = r_i$ e $r_{(i-1)\Delta} = r_{(i-1)}$. Ponendo uguali a 0 entrambi gli elementi del vettore, si ricava che

$$e^{-\beta\Delta} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i r_{(i-1)} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{(i-1)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{(i-1)}^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n r_{(i-1)} \right)^2} = \hat{H}$$

così

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n r_i - \sum_{i=1}^n r_{(i-1)} \hat{H} - \frac{-\ln \hat{H}}{n\Delta (1 - \hat{H})}, \quad \hat{\beta} = -\frac{-\ln \hat{H}}{\Delta}$$

Osserviamo che se usiamo l'approssimazione $e^{-\beta\Delta} \simeq 1 - \beta\Delta$ allora $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ sono gli stessi che abbiamo ottenuto con la stima di Eulero.

- Nel modello di Vasicek generalizzato i parametri da stimare sono z_1, \dots, z_6 . La discretizzazione di tale modello con lo schema di Eulero fornisce la funzione di verosimiglianza

$$L(\theta) = (2\pi z_4 z_5 \Delta)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{z_5}{2} \sum_{i=1}^n t_{i-1} \right] * \\ \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_{t_i} - z_3 e^{-z_5 t_{i-1}} - z_4 e^{-2z_5 t_{i-1}} - z_1 z_5 - z_5 X_{t_{i-1}}}{z_4 z_5 e^{-2z_5 t_{i-1}}} \right)^2 \right]$$

I valori dei parametri stimati mediante la massimizzazione di $L(\theta)$, sono stati ottenuti con il software di calcolo *Mathematica 4.0*.

- Per quanto riguarda la stima del modello di Vasicek generalizzato sti-

mato attraverso il metodo delle martingale abbiamo ottenuto:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_n(z) = & \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_4 e^{-2z_5 t_{i-1}}} (r_{t_i} - r_{t_{i-1}} (1 - z_5 \Delta) - z_3 \Delta e^{-z_5 t_{i-1}} - z_4 \Delta e^{-2z_5 t_{i-1}} - z_1 z_5 \Delta) , \right. \\
& \sum_{i=1}^n \frac{e^{-z_5 t_{i-1}}}{z_4 z_5 e^{-2z_5 t_{i-1}}} (r_{t_i} - r_{t_{i-1}} (1 - z_5 \Delta) - z_3 \Delta e^{-z_5 t_{i-1}} - z_4 \Delta e^{-2z_5 t_{i-1}} - z_1 z_5 \Delta) , \\
& \sum_{i=1}^n \frac{e^{-2z_5 t_{i-1}}}{z_4 z_5 e^{-2z_5 t_{i-1}}} (r_{t_i} - r_{t_{i-1}} (1 - z_5 \Delta) - z_3 \Delta e^{-z_5 t_{i-1}} - z_4 \Delta e^{-2z_5 t_{i-1}} - z_1 z_5 \Delta) , \\
& \left. \sum_{i=1}^n \frac{-z_3 t_{i-1} e^{-z_5 t_{i-1}} - 2z_4 t_{i-1} e^{-2z_5 t_{i-1}} + z_1 - r_{t_{i-1}}}{z_4 z_5 e^{-2z_5 t_{i-1}}} \right. \\
& \left. (r_{t_i} - r_{t_{i-1}} (1 - z_5 \Delta) - z_3 \Delta e^{-z_5 t_{i-1}} - z_4 \Delta e^{-2z_5 t_{i-1}} - z_1 z_5 \Delta) \right\}
\end{aligned}$$

Anche in questo caso abbiamo implementato questa tecnica per ottenere la stima dei parametri desiderati.

Riferimenti bibliografici

- [1] N. Anderson, F. Breedon, M. Deacon, A. Derry, G. Murphy. *Estimating and Interpreting the Yield Curve*. J. Willey & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1996.
- [2] P. Baldi. *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*. Pitagora Editrice, 2000.
- [3] B. Bibby e M. Sorensen. *Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes*. Bernoulli **1**(1/2), 1995, 017-039.
- [4] D. R. Chambers, W. T. Carleton, D. W. Waldman. *A new approach to estimation of the term structure of interest rates*. Journal of Finance and Quantitative Analysis, **19**, No 3 (Settembre 1984), 233-252.
- [5] J. F. J. de Munnik, P. C. Schotman. *Cross-sectional versus time series estimation of term structure models: empirical results for the Dutch bond market*. Journal of Banking & Finance **18**, 1994, 997-1025.
- [6] D. Filipovic. *Exponential-polynomial families and the term structure of the interest rates*. Bernoulli **6**(6), 2000, 1081-1107
- [7] R. Gibson, F.-S. Lhabitant, D. Talay. *Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature*. RiskLab Research Paper 2001.
- [8] A. Going. *Estimation in Financial Models*. RiskLab Research Paper 1996.
- [9] A. Going. *Parameter Estimation and Bessel Processes in Financial Models*. RiskLab Research Paper 1998.
- [10] J. Hull, A. White. *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*. The Review of Financial Studies Vol. 3, no. 4, 573-592, 1990.
- [11] J. James, N. Webber. *Interest rate Modelling*. J. Willey & Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 2000.
- [12] D. Lamberton e B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance*. Chapman & Hall, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [13] R. S. Lipster, A. N. Shiriyayev. *Statistics of Random Processes, I e II*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [14] J. H. McCulloch. *Measuring the term structure of interest rates*. Journal of Business, **XLIV**, Gennaio 1971, 19-31.

- [15] C. R. Nelson, A. F. Siegel. *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Journal of Business, 1987, vol. 60, no. 4
- [16] L. C. G. Rogers. *Which Model for Term-Structure of Interest Rates should one use?* Mathematical Finance, IMA Vol. 65, 93-116, Springer, New York, 1995.
- [17] L. Svensson. *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-94*. International Monetary Fund Working Paper No. 114, September 1994b.
- [18] B. Tuckman *Fixed Income Securities*. Willey & Sons, New York, 1995.