UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea in Matematica
di
Alessandra Lunghini

# Stima non parametrica della volatilità in un processo di diffusione dei prezzi mediante analisi di Fourier

Relatore Prof. Martinelli Fabio    Correlatore Prof.ssa Mancino M.Elvira

Il candidato

Alessandra Lunghini

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005

Luglio 2005

# Introduzione

L'anima di questa tesi è lo studio di alcuni selezionati argomenti sulla modellizzazione e sulla stima della volatilità.
Questi argomenti hanno ricevuto una grande attenzione nella letteratura finanziaria, poichè la modellizzazione della volatilità è cruciale in praticamente tutte le applicazioni finanziarie, incluso la derivazione dei titoli derivati (opzioni), selezione del portafoglio e la gestione del rischio.
La storia incomincia nel 1900 quando un matematico francese, Louis Bachelier, discusse una tesi di dottorato alla Sorbonne di Parigi intitolata *Théorie de la Speculation* in cui proponeva una metodologia per la valutazione del prezzo razionale di un'opzione basandosi sull'assunzione che i prezzi del titolo rischioso sottostante seguissero un moto browniano. Gli studi di Bachelier furono dimenticati per molti anni, fino agli anni '60. Nel 1973 il lavoro di Black e Scholes diede una risoluzione del problema della valutazione delle opzioni.
Il modello è stato oggetto di molte critiche negli anni, soprattutto perchè la dinamica dei prezzi di mercato, cioè le oscillazioni di tutti i giorni, non rispecchiano fedelmente le ipotesi teoriche di Black e Scholes, in particolare la volatilità non è costante, ma è stato empiricamente riconosciuto che quest'ultima è variabile nel tempo. E' stato rilevata una correlazione inversa tra rendimento dell'azione e variazione della volatilità. Questa peculiare caratteristica ha suggerito che la volatiltà dei prezzi delle azioni si potrebbe modellare assegnando un processo stocastico. Si introducono quindi di modelli a volatilità stocastica.

Nell'ambito di questi modelli generali a volatilità stocastica si pone il problema di individuare efficienti metodi di stima.

La letteratura riguardante questo argomento, si divide principalmente in due categorie; una è quella che descrive le procedure di stima basate sui modelli parametrici in cui la volatilità è modellata attraverso una forma funzionale di variabili osservate nel mercato. La seconda è quella che descrive misure di stima non parametriche più dirette che permettono valutazioni empiriche ex-post, quindi una valutazione storica senza assumere una forma funzionale per la volatilità. Poichè la volatilità cambia nel tempo, il suo calcolo attraverso i metodi non parametrici è concentrato in una piccola finestra temporale con dati ad alta frequenza.

La combinazione di grandi sviluppi sia teorici-metodologici che nella finanza empirica ha prodotto una crescita nella econometria finanziaria per quanto riguarda lo studio della dinamica della volatilità tramite l'interazione tra l'econometria e la letteratura finanziaria.

I primi risultati di misurazione della volatilita' sono stati strettamente parametrici, in seguito la letteratura più recente si è mossa in direzioni semi-parametriche o addirittura completamente non parametriche.

Il nostro scopo è quello di proporre un metodo non parametrico basato sull'analisi armonica per misurare la volatilità usando osservazioni ad alta frequenza. Il metodo ci permette di misurare la volatilità istantanea come una funzione del tempo. Come sottoprodotto abbiamo anche una formula per il calcolo della volatilità integrata. Osserviamo che la maggior parte dei metodi non parametrici proposti in letteratura non danno misure della volatilità istantanea ma solo di quella integrata (Cf. [9]) .

I metodi non parametrici presenti in letteratura (Cf. [9], [15]) calcolano principalmente la volatilità basandosi sulla teoria della variazione quadratica. Infatti è noto (da un famoso teorema di Wiener) che l'integrale della volatilità di una semimartingala Browniana continua risulta essere uguale alla variazione quadratica della semimartingala. Questa definizione motiva metodi standard sulla stima della volatilità istantanea e integrata basati su una procedura di differenziazione: la variazione quadratica di un processo con una data frequenza (giorno, settimana, mese) è presa coma una stima della volatilità in quell'orizzonte temporale.

La stima della volatiltà con questo metodo presenta alcuni inconvenienti quando sono usati dati ad alta frequenza. Infatti i dati non sono ugualmente spaziati e la equispaziatura delle serie temporali per i rendimenti intragiornalieri è costruita con l'interpolazione lineare logaritmica di dati dei prezzi adiacenti o prendendo le ultime quote su un dato tempo di riferimento (chiamato *metodo di imputazione*). Queste procedure inducono alcune distorsioni nell'analisi, dando origine a autocorrelazioni dei rendimenti e riducendo il numero delle osservazioni. Il problema risulta poi cruciale qualora si consideri il caso multivariato: è evidente che i dati riguardanti titoli differenti non siano in generale sincroni.

Il metodo da noi proposto permette di eliminare questi problemi in quanto è basato sull'integrazione di serie temporali ed utilizza tutte le osservazioni. E' basato sull'analisi di Fourier per le serie temporali, quindi lo stimatore che troviamo è chiamato *stimatore di Fourier*, che è stato recentemente proposto da Malliavin e Mancino (2002) (Cf. [37]).

Il metodo si puó sintetizzare come segue: lavoriamo in uno spazio filtrato

$(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ soddisfacente le condizioni usuali (Protter, 1990), e definiamo $S_t$ come la soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t \\ S_0 &= s_0 \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\sigma(t), \mu(t)$ sono funzioni deterministiche limitate del tempo, e $W_t$ è un moto browniano standard. In questo caso $S_t$ è una semimartingala è la sua variazione quadratica (Jacod e Shiryaev, 1987) è data da:

$$[S, S]_t = \int_0^t \sigma^2(s)ds \tag{2}$$

Consideriamo quindi, una singola semimartingala $S$ in una finestra temporale fissata.

Vogliamo determinare l'evoluzione della volatilità istantanea (e integrata) $\sigma^2(t)$ in questa finestra.

Cambiando l'origine e riducendo l'unità di tempo possiamo sempre ricondurci, senza perdita di generalità, al caso in cui l'intervallo temporale sia $[0, 2\pi]$.

Il metodo sarà il seguente: prima calcoliamo i coefficienti di Fourier di $dS$ e poi otteniamo un'espressione matematica dei coefficienti di Fourier per $\sigma^2$ usando i coefficienti di Fourier di $dS$. I risultati classici della teoria di Fourier ci permettono di ricostruire $\sigma^2$ dai relativi coefficienti di Fourier.

Calcoliamo i coefficienti di Fourier di $dS$ definiti da

$$a_0(dS) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dS(t)$$

$$a_k(dS) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)dS(t)$$

$$b_k(dS) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)dS(t)$$

Consideriamo i coefficienti di Fourier della volatilità:

$$a_0(\sigma^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma^2(t)dt$$

$$a_k(\sigma^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kt)\sigma^2(t)dt$$

$$b_k(\sigma^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sigma^2(t)dt$$

La ricostruzione di $\sigma^2$ tramite i coefficienti di Fourier è data dalla classica formula di inversione di Fourier-Féjer:

$$\sigma^2(t) = \lim_{N\to+\infty} \sigma_N^2(t) \tag{3}$$

dove

$$\sigma_N^2(t) := \sum_{k=0}^{N}(1-\frac{k}{N})(a_k(\sigma^2)\cos(kt) + b_k(\sigma^2)\sin(kt)) \qquad \forall t \in (0, 2\pi).$$

Notiamo che ci sono molte formule di inversione che ci permettono di ricostruire una funzione dai dati dei relativi coefficienti di Fourier; il vantaggio della formula di inversione di Féjer è che se la $\sigma^2$ è una funzione positiva anche l'approssimazione data da (3) lo è ( Cf. [42] ). Il teorema seguente è il risultato fondamentale su cui si basa la nostra analisi :

**Teorema 0.0.1.** *Fissato un intero* $n_0 > 0$, *i coefficienti di Fourier della* *volatilità sono dati dalle seguenti formule:*

$$a_0(\sigma^2) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^{N} (a_s^2(dp) + b_s^2(dp)) \tag{4}$$

$$a_q(\sigma^2) = \lim_{N\to+\infty} \frac{2\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^{N} a_s(dp)a_{s+q}(dp) \qquad \forall q > 0 \tag{5}$$

$$b_q(\sigma^2) = \lim_{N\to+\infty} \frac{2\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^{N} a_s(dp)b_{s+q}(dp) \qquad \forall q > 0 \tag{6}$$

*dove i limiti sono intesi in probabilità.*

Lo stimatore così ottenuto risulta essere consistente in probabilità.

Tutta la teoria formulata nel caso unidimensionale è stata estesa al caso multidimensionale.
In un usuale spazio di probabilità filtrato $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, definiamo $S_t \in \mathbf{R}^d$ come soluzione del seguente processo:

$$dS_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t \tag{7}$$

$$S_0 = s_0 \tag{8}$$

dove $\sigma(t) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d, \mu \in \mathbf{R}^d$ sono funzioni deterministiche limitate, e $W_t$ è un $\mathbf{R}^d$ moto browniano. In questo caso, con traiettorie continue, la variazione quadratica è semplicemente:

$$[S, S]_t = \int_0^t \sigma^T(s)\sigma(s)ds \tag{9}$$

Poniamo allora:

$$\sigma_{i,j}^2(t) = \sigma^T(t)\sigma(t) = \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(t)\sigma_{kj}(t) \tag{10}$$

e scriviamo $\sigma^2_{ij}(t)$ nel seguente modo:

$$\sigma^2_{ij}(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right) \cdot \left[a_k(\sigma^2_{ij})cos(kt) + b_k(\sigma^2_{ij})senkt)\right]. \tag{11}$$

Abbiamo allora il seguente:

**Teorema 0.0.2.** *Dato un intero $n_0 > 0$,allora i coefficienti $\sigma^2_{i,j}$ della matrice di volatilità sono i seguenti*

$$a_0(\sigma^2_{i,j}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^{N} \frac{1}{2}(a^i_s(dS)a^j_s(dS) + b^i_s(dS)b^j_s(dS)) \tag{12}$$

$$a_k(\sigma^2_{i,j}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^{N} (a^i_s(dS)a^j_{s+k}(dS) + b^i_s(dS)b^j_{s+k}(dS)) \tag{13}$$

$$b_k(\sigma^2_{i,j}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\pi}{N+1-n_0} \sum_{s=n_0}^{N} (a^i_s(dS)b^j_{s+k}(dS) + b^i_s(dS)a^j_{s+k}(dS)) \tag{14}$$

*dove i limiti sono intesi in probabilità.*

Come applicazione di questo metodo nel caso di dimensione due, cioè alla coppia di semimartingale “prezzo del titolo” e “processo di volatilità”, abbiamo sviluppato la stima dell’effetto *leverage*. Tale effetto si manifesta quando sequenze di rendimenti negativi del titolo sono associate ad incrementi della volatilità dei rendimenti dell’azione, cioè quando consideriamo la volatilità dipendente dal moto Browniano preso in considerazione.

Il metodo di Fourier non facendo alcuna assunzione sulla dipendenza o indipendenza, potenzialmente ammette questo effetto. Abbiamo ottenuto una procedura di stima dell’effetto *leverage* in termini quantitativi usando la metodologia di Fourier.

Consideriamo un modello dei prezzi che soddisfa le ipotesi

$$dS(t) = \sigma(t, W)dW + \mu(t, W)dt \tag{15}$$

dove $S$ è il prezzo del titolo e $W$ un moto browniano standard.. Assumiamo che la volatilità $\sigma(t)$ sia un processo stocastico soddisfacente

$$d\sigma(t) = \alpha(t)dW(t) + \beta(t)dW_1(t) + \gamma(t)dt \tag{16}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma$ sono funzioni prevedibili limitate e dove $W_1(t)$ è un altro moto Browniano indipendente da $W$.
Allora l'effetto 'Leverage' è definito come:

$$\lambda(t) := dS(t) \odot d\sigma(t) \tag{17}$$

dove $\odot$ denota la contrazione stocastica di Itô divisa per $dt$. Quindi

$$\lambda(t) = \alpha(t)\sigma(t).$$

Tuttavia non abbiamo conoscenza della funzione $\alpha$, quindi è interessante avere una formula per stimare $\lambda$ partendo dal prezzo. Possiamo allora enunciare il seguente Teorema:

**Teorema 0.0.3.** *Sia $S$ soddisfacente (15) e $\sigma$ soddisfacente (16), allora abbiamo*

$$\lambda(t) = \frac{1}{8\sigma(t)}(Vol(S + \sigma^2)(t) - Vol(S - \sigma^2)(t)) \tag{18}$$

Infine abbiamo verificato mediante simulazioni Monte Carlo e su dati reali l'effettiva capacità di stima del metodo di Fourier.
Dai risultati numerici risulta che la volatilità calcolata usando tutti i dati con il metodo di Fourier è più precisa.

Per comodità abbiamo calcolato numericamente i coefficienti di Fourier con l'integrazione per parti

$$a_k(dS) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos kt dS(t) = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin kt S(t) + \frac{S(2\pi) - S(0)}{\pi}. \quad (19)$$

Osserviamo che l'espressione di $a_k(dS)$ è numericamente stabile, perchè non coinvolge la differenziazione di $S$. Poichè le osservazioni sono limitate, per applicare il metodo ed in particolare l'integrazione abbiamo bisogno di un presupposto su come i dati sono collegati. Scegliamo quindi $S(t)$ uguale ad $S(t_i)$ nell'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$. Con questa scelta l'integrale nell'equazione (19) nell'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ diventa:

$$\frac{k}{\pi}\int_{t_i}^{t_{i+1}} S(t)\sin(kt)dt = S(t_i)\frac{k}{\pi}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin(kt)dt = S(t_i)\frac{1}{\pi}(\cos(kt_i) - \cos(kt_{i+1})).$$

Nell'integrazione per parti (19) il termine costante $\frac{S(2\pi)-S(0)}{\pi}$ appare per ogni $a_k$; questo potrebbe rendere la formula (19) troppo fortemente dipendente da un tale termine aleatorio. Possiamo evitare ciò aggiungendo il termine di drift $\frac{S(2\pi)-S(0)}{\pi}dt$ a $dp$ , in modo da avere $S(2\pi) = S(0)$. In effetti, aggiungendo il termine di drift a $dS$ non cambierà la volatilità. In questo caso, fermiamo l'espansione (4-6) ad una $N$ empiricamente determinata. Per dati equamente spaziati, il massimo $N$ che impedisce l'effetto Epps è $N = \frac{n}{2}$ (vedi Priestley (1979)).

Per illustrare la potenzialità di questo metodo, calcoliamo la volatilità $\sigma^2(t)$ di una serie temporale lunga cinquantacinque anni, che è il prezzo giornaliero di chiusura dell'indice Dow Jones Industrial dal 26 Maggio 1896 al 1999. La fig. (1) mostra l'andamento medio del prezzo logaritmoco del Dow Jones Industrial nel periodo di riferimento, mentre la fig. (2) rappresenta la volatilità giornaliera dello stesso indice calcolata con il Metodo di Fourier.

Figura 1: Andamento medio Dow Jones Industrial

Figura 2: Volatilità giornaliera dello stesso indice calcolata con il metodo di Fourier

Abbiamo illustrato questo fatto attraverso simulazioni Monte Carlo di un modelli GARCH(1,1) a tempo continuo con i parametri stimati in Andersen e Bollerslev (1998a).

$$\begin{aligned} dS(t) &= \sigma(t)dW_1(t) \\ d\sigma^2(t) &= \theta\left[\omega - \sigma^2(t)\right]dt + \sqrt{2\lambda\theta}\sigma^2(t)dW_2(t) \end{aligned} \tag{20}$$

dove $\theta, \omega, \lambda$ sono costanti e $W_1, W_2$ sono due moti browniani indipendenti. Data una finestra temporale $[0,1]$ (un giorno, una settimana, un mese), andiamo a calcolare la volatilità integrata del processo, cioe $\int_0^1 \sigma^2(t)$.
Uno stimatore non distorto di questa quantità è dato da $[S(1) - S(0)]^2$. Per quanto, questo stimatore è molto 'rumoroso'.
In Andersen e Bolleslev (1998c)( Cf. [3]) per i tassi di cambio e in Martens (2000) ( Cf. [35]) per gli indici di azioni, è stato mostrato che uno stimatore con meno rumore è dato dalla somma dei rendimenti quadratici intragiornalieri:

$$\sum_{i=2}^{N}\left[S(\frac{i}{N}) - S(\frac{i-1}{N})\right]^2.$$

Usando come criterio di valutazione la differenza

$$\int_0^1 \sigma^2(t) - \sum_{i=2}^{N}\left[S(\frac{i}{N}) - S(\frac{i-1}{N})\right]^2,$$

gli autori trovarono risultati migliori simulando serie temporali con le alte frequenze considerando rendimenti ogni 5 minuti.
Il metodo proposto nel capitolo 3 ci dà una stima della volatilità integrata. Infatti, integrando $\sigma^2$ tra 0 e $2\pi$, corrisponde a

$$\int_0^{2pi} \sigma^2(t)dt = 2\pi a_0(\sigma^2)$$

dove $a_0(\sigma^2)$ è dato da (4). Il calcolo di $a_0(\sigma^2)$ ci dà una stima della volatilità integrata usando tutte le osservazioni disponibili dei prezzi. Quindi calcoliamo la volatilità integrata con i tre stimatori: il rendimento quadratico giornaliero, il rendimento quadratico cumulativo ogni 5 secondi e lo stimatore di Fourier.

I risultati sono mostrati in figura (3), dove è mostrata la distribuzione della differenza normalizzata tra la volatilità integrata e la sua stima. Come ci aspettavamo, i rendimenti quadratici giornalieri sono una stimatore molto 'rumoroso.'

Mostriamo che, misurando la volatilità integrata in accordo con il metodo di Fourier, la performance del modello GARCH(1,1) è migliore che quella ottenuta calcolando la volatilità in accordo con i rendimenti quadratici cumulativi intragiornalieri. Questo risultato è confermato quando il metodo è applicato per calcolare la volatilità di tassi di cambio con serie temporali ad alta frequenza.

Figura 3: Distribuzione di $\frac{\int_0^1 \sigma^2(t)dt - \hat{\sigma^2}}{\int_0^1 \sigma^2(t)dt}$ dove $\hat{\sigma^2}$ è ottenuto con quattro differenti stimatori della volatilità integrata: (1) $\hat{\sigma^2} = [S(1) - S(0)]^2$; (2) $\hat{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{2} 88 \left[S(\frac{i}{288}) - S(\frac{i-1}{288})\right]^2$ (stima ogni cinque minuti); (3) $\hat{\sigma^2} = \sum_{i=2}^{1} 440 \left[S(\frac{i}{1440}) - S(\frac{i-1}{1440})\right]^2$ ( stima ogni minuti); (4) $\hat{\sigma^2} = 2\pi a_0(\sigma^2)$ (stimatore di Fourier). Per ogni distribuzione è indicata la media e la deviazione standard. Le distribuzioni sono calcolate con 10.000 replicazioni giornaliere.

La tesi è strutturata come segue. Il capitolo 1, *modelli stocastici per l'evoluzione dei prezzi dei titoli*, dopo una piccola introduzione storica, mostra il modello di Black e Scholes per calcolare il valore 'razionale' di un opzione di tipo europeo. Vengono poi illustrate le critiche che hanno portato ad altri studi e ad altri tipi di modellizzazione per la stima della volatilità, quindi all'introduzione dei modelli a volatilità stocastica. Il capitolo 2, *Stime parametriche e non parametriche della volatilità*, fornisce uno sguardo di insieme qualitativo sui diversi approcci alla modellizzazione e alla stima della volatilità. Ricadono in due categorie, quella delle procedure di stima basate sui modelli parametrici e quella delle misure non parametriche più dirette. Il capitolo 3, *Il metodo di Fourier per la stima della volatilità*, fornisce un metodo non parametrico basato sull'analisi armonica per misurare la volatilità usando osservazioni ad alta frequenza. Il punto chiave del metodo è che permette di misurare la volatilità istantanea come funzione del tempo. Il capitolo 4, *Risultati numerici*, mostra i risultati ottenuti applicando lo stimatore di Fourier a dati ad alta frequenza. Sono state effettuate delle simulazioni Monte Carlo e confrontato l'efficienza di tale stimatore rispetto a quelli già presenti in letteratura.

# Bibliografia


[1] Andersen, T., T. Bollerslev, e S. Lange (1999). *Forecasting financial market volatility: sample frequency vis-à-vis forecast horizon.* Journal of Empirical Finance 6, 457-477.

[2] Andersen, T. e T. Bollerslev (1998a). *Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts.* International Econimic review 39,885-905.

[3] Andersen, T. e T. Bollerlslev (1998c). *Towards a unified framework for high and low frequency return volatility modeling.* Statistica Neerlandica 52(3), 273-302.

[4] Andersen T. e T. Bollerslev (1997). *Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets.* Jounal of Empirical Finance 4, 115-158.

[5] Andersen, T. e T. Bollerslev (1998b). *Deutsche mark-dollar volatility: Intraday activity patterns, macroeconomic announcements, and longer run dependencies.* Journal of Finance 53, 219-265.

[6] Andersen, T., T. Bollerslev, F.Diebold, e P. Labys (2000a). *Exchange rate returns standardized by realized volatility are (nearly) Gaussian.* Multinational Finance Journal 4, 159-179.

[7] Andersen, T., T. Bollerslev, F.Diebold, e P. Labys (2001). *The distibution of realized exchange rate volatility.* Journal of the American Statistical Association 96, 42-55.

[8] Andersen, T., T. Bollerslev, F.Diebold, e P. Labys (2003). *Modeling and forecasting realized volatility.* Econometrica 71, 579-625.

[9] Andersen, T., T. Bollerslev, e F. X. Diebold (2003). *Parametric and nonparametric volatility measurement.* IN L.P. Hansen e Y. Ait-Sahalia (Eds.), Handbook of Financial Econometric. Amsterdam: North-Holland.

[10] Bandi,F. e J. Russell (2003). *Microstructure noise, realized volatility and optimal sampling.* Working paper.

[11] Barucci, E., P. Malliavin e M. E. Mancino *Harmonic analysis methods for volatility computation.* Working paper.

[12] Barucci, E. e R.Renò (2002a). *On measuring volatility and the GARCH forecasting performance.* Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 12, 183-200.

[13] Barucci, E., M. E. Mancino, e R. Renò (2000). *Volatility estimate via Fourier analysis.* In Finanza computazionale, atti della scuola estiva 2000, Venezia. Università Ca' Foscari.

[14] Barndorff-Nielsen, O.E., e N. Shephard (2002a). *Econometric analisys of realised volatility and its use in estimating stochastic volatility models.* Journal pf the Royal Statistical Society, Series B 64, 253-280.

[15] Barndorff-Nielsen, O.E., e N. Shephard (2002b). *Estimating quadratic variation using realized variance* Journal of Applied Econometrics 17, 457-478.

[16] Beckers (1980). *The constant elasticity of variance model and its implications for options pricing.*

[17] Black, F. (1976). *Studies of stock price volatility changes.* In Proceedings if the 1976 meetings of the american statistical association, businnes and economical statistics section, pp 177-181.

[18] Black, F. e M. Scholes (1972). *The valuation of option contracts and test of market efficiency.*

[19] Black, F. e M. Scholes (1973). *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy 81, 637-659.

[20] Bollerslev, T. (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity.* Journal of Econometrics 31, 307-327.

[21] Bonanno, G., F. Lillo, e R. Mantegna (2001). *High-frequency cross-correlation in a set of stocks.* Quantitative Finance 1, 1-9.

[22] Boness, A.J.(1964). *Some evidence of profitability of trading put and call options*

[23] Campbell, J.Y., A. S. Kyle (1193) *Smart money, noise trading and stock price behaviour.*

[24] Corsi, F., G. Zumbach, U. Muller, e M. Dacorogna (2001). *Consistent high-precision volatility from high-frequency data.* Economic Notes 30(2), 183-204.

[25] Courtault, J.M., Y. Kabanov, B. Bru, P. Crépel, e I. Lebon e A. Le Marchand (2000). *Louis Bachelier on the centenary of Théorie de la spéculation.* Mathematical Finance 10(3), 341-353.

[26] Cox (1975). *Notes on options pricingI: constant elasticity of variance diffusions.*

[27] Drost, F. e B. Werker (1996). *Closing the GARCH GAp: continuous time GARCH models.* Journal of Econometrics 74, 31-57.

[28] Engle, R. (1982). *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation.* Econometrica 68. 1343-1376.

[29] Figwski, S. (1997). *Forecasting volatility.* Financial Markets, Institutions and Instruments 6, 1-88.

[30] Glosten, L.R., R. Jagannathan, e D. Runkle (1993). *Relationship between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks.*

[31] Jacod, J. e A. N. Shiryaev (1987). *Limit Theorems for stochastic processes.* Springer.

[32] Jarrow e O'Hara (1989). *Primes and Scores:an essay in Market imperfections.*

[33] Kloeden, P. e E.Platen (1992). *Numerical solution of stochastic differential equations.* Springer.

[34] Lundin, M., M. Dacoragna, e U. Muller (1999). *Correlation of high-frequency financial time series.* In P. Lequeux (Ed.), Financial Markets Tick by Tick. Wiley & Sons.

[35] Martens M.(2002). *Measuring and forecasting S&P500 index future volatility using high-frequency data.* Journal of Futures Markets 22, 497-518.

[36] Malliavin, P. e M. E. Mancino (2005). *A Fourier trasform mothod for nonparametric estimation of volatility and nonparametric estimation of leverage effect.* Preprint Università di Firenze.

[37] Malliavin, P. e M. E. Mancino (2002). *Fourier series method for measurement of multivariate volatilities.* Finance e Stochastics 6(1), 49-61.

[38] Mancino, M. E. e R. Renò (2002). *Dynamic principal component analysis of multivariate volatility via Fourier analysis.* Applied Mathematical Finance. Forthcoming.

[39] Muthuswamy, J., S. Sarkar, A. Low, e E. Terry (2001). *Time variation in the correlation structure of exchange rates: high frequency analysus.* Journal of Futures Markets 21(2), 127-144.

[40] Nelson D.(1991). *Conditional heteroskedasticity in asset pricing: a new approch.* Econometrica 59, 347-370.

[41] Pagan, A., e G. W. Schwert (1990). *Alternative models for conditional stock volatility.* Journal of Econometrics 45, 267-290.

[42] Priestley M. (1979). *Spectral time series analysis.* Wiley.

[43] Samuelson, P.A. (1965). *Rational theory of warrant prices.*

[44] Samuelson, P.A. e C. Merton (1969). *A complete model of warrant pricing that maximizes utility.*

[45] Sprenkle, C.M. (1961). *Warrant prices indicators of expectations and preferences.* Vale Economic Essays.

[46] Swildler, S. e J. Diltz (1992) *Implied volatilities and transaction costs.*

[47] Zebedee, A. (2001). *A closer look at co-movements among stock returns.* San Diego State University.