Indice

INTRODUZIONE

La *diseguaglianza isoperimetrica*, oggetto di studio della tesi, ha rappresentato per i matematici motivo di profondo interesse per molti secoli.
In principio, considerando classi di oggetti, come possono essere ad esempio i triangoli, si puó stabilire una diseguaglianza del tipo seguente:

$$\frac{L^2}{A} \geq c > 0$$

dove L é il *perimetro* e A l'*area* di un oggetto della classe [1] e c é una costante.
Osserviamo che il quoziente presente nella precedente diseguaglianza é dimensionalmente invariante. Inizialmente, quindi, l'interesse nasce dal voler determinare il valore della migliore costante c, trovare cioé:

$$\hat{c} = \inf_{\alpha \in \mathcal{F}} \frac{L^2}{A}$$

dove $\mathcal{F}$ é la classe presa in considerazione.
Se ad esempio si considera la classe dei triangoli, si ricava abbastanza facilmente il seguente valore:

$$\hat{c} = 12\sqrt{3}.$$

Considerando altresí la classe dei poligoni convessi di n lati, si ottiene per $\hat{c}$ un risultato, non banale, che generalizza il precedente:

$$\hat{c} = 4n \tan(\pi/n). \tag{1}$$

Ora, mandando $n \to \infty$ in (1) si puó congetturare e finalmente formulare, la *classica* **diseguaglianza isoperimetrica** stabilendo che per una curva planare $\mathcal{C}$, semplice, chiusa e rettificabile, di lunghezza L:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A}$$

dove A é l'area della regione racchiusa da $\mathcal{C}$ e l'uguaglianza si verifica se e solo se $\mathcal{C}$ é una circonferenza.
Osserviamo che la precedente formulazione, mette anche in luce la cosiddetta

[1] evidentemente per gli oggetti della classe che si considera, deve essere possibile definire il *perimetro* e l'*area*

proprietá isoperimetrica del cerchio. In effetti con la *diseguaglianza isoperimetrica* sussiste il *problema isoperimetrico*, vale a dire: dimostrare che fra tutte le curve planari semplici, chiuse e rettificabili di lunghezza fissata, la circonferenza é la sola a racchiudere la regione di maggior area.
Questo problema, é stato in veritá, il primo aspetto legato alla *diseguaglianza isoperimetrica* che i matematici hanno affrontato, basti ricordare che il matematico greco Zenodoro, intorno al 180 a.C., si occupó della questione nella sua opera intitolata "Sulle figure isoperimetriche" (vedi [5] pag.5).

Nella tesi abbiamo cercato, dunque, partendo da considerazioni storico-critiche, di mettere in chiara luce gli aspetti essenziali, come quello geometrico ed analitico presenti nelle varie dimostrazioni della *diseguaglianza isoperimetrica*, non limitandoci comunque al solo caso planare.

La tesi é stata sviluppata in tre capitoli di complessitá via via crescente.
Nel primo, oltre ad una introduzione storica, abbiamo presentato in forma elementare e *sintetica* le prime dimostrazioni di carattere geometrico, dovute sostanzialmente a J. Steiner (1796-1863), sottolineando anche le obiezioni mosse da K. Weierstrass, cui viene prestata particolare attenzione nell' ambito della tesi.

Nel secondo capitolo abbiamo sviluppato in modo rigoroso gli argomenti trattati nel primo, dimostrando successivamente la diseguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^n$:

Teorema 0.1. (Teorema Isoperimetrico)
Sia A un corpo convesso [2] in $\mathbb{R}^n$. Allora [3]:

$$\boxed{s^n(A) \geq \omega_n n^n {\nu_n}^{n-1}(A)} \tag{2}$$

e l' eguaglianza si verifica se solo se A é una palla chiusa, (ω_n é il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$).

[2] insieme compatto e convesso tale che l' insieme dei punti interni sia diverso dall' insieme vuoto

[3] con le lettere s e ν_n vengono denotate rispettivamente, la misura $(n-1)$dimensionale della frontiera di A ed il *volume* di A secondo la misura di Peano-Jordan.

Va osservato comunque, che la diseguaglianza isoperimetrica [4] in $\mathbb{R}^n$ sussiste anche per una classe di insiemi piú ampia di quella dei convessi, valendo appunto il seguente teorema (che non dimostriamo: vedi [13] pag. 190):

Teorema 0.2. *Sia E un insieme di perimetro finito (i.e. un insieme di Caccioppoli) in $\mathbb{R}^n$. Allora:*

$$(\|\partial E\|)^n \geq \omega_n n^n (\mathcal{L}^n(E))^{n-1}$$

dove:

$$\|\partial E\| = \sup\{\int_E div\ \varphi\, dx : \ \varphi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\}$$

Riproponendo poi in modo rigoroso la *simmetrizzazione* di Steiner (introdotta, appunto, nel primo capitolo) e con strumenti via via analizzati, viene risolto in ambito sostanzialmente geometrico la critica mossa da Weierstrass a Steiner precedentemente ricordata.
Il capitolo si conclude con cenni sulla diseguaglianza isoperimetrica su superfici in $\mathbb{R}^3$.

Nel terzo capitolo infine, abbiamo messo in luce l' aspetto analitico, analizzando prima un interessante approccio dato da Eulero al *problema isoperimetrico* che é risultato utile per risolvere di nuovo, ma ora in ambito analitico, la critica mossa da Weierstrass a Steiner.
Successivamente, abbiamo analizzato un altro approccio (sempre al *problema isoperimetrico*) dovuto a A. Hurwitz, il cui interesse risiede nel fatto, che nella dimostrazione si fa uso sostanzialmente delle serie di Fourier.
Quindi abbiamo analizzato la relazione tra la diseguagliaza isoperimetrica [5] e la diseguaglianza di Sobolev, stabilendone l' equivalenza quando $p = 1$. Questo risultato é dovuto a due lavori indipendenti di Federer-Fleming e di Maz'ya del 1960.
La tesi si conclude con cenni sulle *diseguaglianze isoperimetriche* in ambito fisico-matematico, concentrando l' attenzione sulle due congetture (di Saint-Venant e di Rayleigh) dimostrate dopo quasi 100 anni, che sono state il punto

[4] la cui formulazione piú elaborata, che noi non affronteremo é stata sviluppata nell' ambito della *Teoria Geometrica della Misura*, per cui rimandiamo a [23]

[5] formulata per insiemi compatti con frontiera regolare in $\mathbb{R}^n$

di partenza per lo studio in questo campo.

La *diseguaglianza isoperimetrica*, per il fatto di essere stata per molti secoli (dai Greci fino ai nostri giorni) oggetto di studio, é a nostro avviso un utile strumento di analisi del pensiero matematico che ha accompagnato appunto lo sviluppo delle tecniche dimostrative legate alla *diseguaglianza*.
Se, infatti, la *diseguaglianza isoperimetrica* risulta di semplice comprensione ed intuitivamente plausibile, la sua dimostrazione é tutt' altro che elementare. Abbiamo cosí constatato, come, in ambito geometrico (Cap. 1, Cap. 2) numerose dimostrazioni risultino notevolmente elaborate.
L' aspetto interessante dell' approccio geometrico risiede d' altronde nelle tecniche utilizzate nelle dimostrazioni. La *simmetrizzazione* di Steiner (Cap. 1 e §2.2.5) ad esempio, nata per dimostrare la *diseguaglianza*,é un procedimento che viene adoperato anche oggi in questioni diverse da quelle di origine. In ambito analitico (Cap. 3) altresí, utilizzando strumenti piú agili di quelli geometrici, é stato possibile mettere in luce fatti particolarmente interessanti. Basti pensare all'equivalenza tra la diseguaglianza isoperimetrica e la diseguaglianza di Sobolev che a nostro avviso, costituisce, un ottimo esempio per mostrare come la matematica, sempre piú svincolata da un approccio intuitivo ai problemi, sia in grado di penetrare e rivelare fatti tutt' altro che banali.

Capitolo 1

Aspetti storici ed elementari

1.1 Lineamenti storici

Iniziamo questo capitolo, enunciando quello che storicamente, puó essere considerato il prototipo dei *problemi isoperimetrici*.

Teorema 1.1. (Teorema Isoperimetrico)
Fra tutte le figure piane di dato perimetro, il cerchio ha l'area massima.

Se indichiamo dunque con A l'area e con L il perimetro di una data *figura*, il Teorema puó essere sintetizzato, nella seguente diseguaglianza:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A} \qquad (classica\ diseg.\ isoperim.)$$

e l'uguaglianza si verifica se e solo se la *figura* é un cerchio.
Nel presente capitolo e solo in questo, si eviterá di specificare cosa si intenda precisamente per *figura*, cercando cosí di ripercorrere fedelmente, per quanto possibile, l'interessante sviluppo del pensiero matematico che ha accompagnato gli sforzi per dimostrare il precedente teorema. D'altronde, come vedremo, la storia della sua dimostrazione inizia con gli antichi Greci, i quali ovviamente ignoravano il significato di curva di Jordan, di curva chiusa rettificabile, di insieme semplicemente connesso, ecc., concetti indispensabili appunto, per definire il termine *figura*.
Iniziamo dunque, alla luce di quanto appena osservato, a ripercorrere le fasi

salienti di carattere storico ed elementare, che hanno accompagnato lo studio della *diseguaglianza isoperimetrica*, enfatizzando cosí piú la descrizione di tecniche dimostrative che la dimostrazione matematicamente rigorosa del Teorema Isoperimetrico, che affronteremo invece nei prossimi capitoli.

Nicholas Kazarinoff ([19] pag.36) afferma che giá Archimede (287-212 a.C.) conosceva l'enunciato del *Teorema Isoperimetrico* precedentemente esposto, e che Zenodoro nel 180 a.C. scrisse un libro intitolato *"Sulle figure isoperimetriche"*, del quale peró non c'é pervenuta alcuna copia; i risultati comunque, furono descritti e dimostrati di nuovo da Pappo di Alessandria (300 d.C.) nel Libro V della sua *Collezione,* (*Zenodori Commentarius de Figuris isoperimetricis*, Mathematicae Collectiones, III vol., pag.1189, Berlino, 1878).

Pochi progressi furono fatti dopo il lavoro dei geometri Greci fino a quello dello svizzero Simon Lhuilier (1750-1840), e del suo compatriota Jacob Steiner (1796-1863) dopo di lui.
I metodi introdotti da Lhuilier e Steiner nelle loro ricerche (come *l'approssimazione successiva,* la *simmetrizzazione* ed il *metodo degli snodi*) hanno avuto una grande influenza sulla matematica del tempo e vengono ancora adoperati.
I metodi di Steiner erano essenzialmente geometrici (piuttosto che algebrici o analitici); erano come si suol dire *metodi sintetici*: egli ragionava sulle proprietá geometriche delle figure senza far ricorso a teoremi di algebra e di Calcolo né ai metodi della geometria analitica.

A sua volta il lavoro di Steiner stimoló lo sviluppo dell'Analisi Matematica, specialmente del Calcolo delle Variazioni: ció fu dovuto ad un errore nella sua dimostrazione del *Teorema Isoperimetrico*, errore che fu messo in luce dal matematico tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) e che riguardava sostanzialmente il problema dell'esistenza della figura massimale, questione che appunto Steiner non prese in considerazione.
Leggendo il *Teorema Isoperimetrico* in effetti, intuitivamente si é portati ad accettare per data l'esistenza di una figura di area massima. La di-

mostrazione, adoperando un procedimento basato sulla iterazione di *processi* sempre uguali (come fece Steiner con la sua *simmetrizzazione*), richiederá peró, come notó appunto Weierstrass, argomenti di convergenza cui Steiner non fece riferimento.
L'osservazione posta da Weierstrass alla dimostrazione di Steiner, se non ne infició i risultati mise comunque in luce l'elaborato impianto logico-deduttivo sottostante una "vera" dimostrazione del *Teorema Isoperimetrico* per via geometrica, ponendo in risalto, ancora una volta, la fondamentale importanza nello sviluppo del pensiero matematico di una semplice figura come quella del cerchio.
Oggi, per ovviare alla giusta critica mossa da Weierstrass si utilizza il cosidetto *Principio di Selezione di Blaschke*, che analizzeremo nel prossimo capitolo.

Jacob Steiner elaboró il suo lavoro sui problemi isoperimetrici in due distinte fasi.
Nel 1836 presentó un lavoro dal titolo *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze* [Semplici prove fondamentali della isoperimetria] (J. Reine Angew. Math. **18**, pag.289-296, 1838) e poi nel 1841 all'Accademia di Parigi presentó *Über Maximum und minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt* [Sul massimo e minimo nelle figure sul piano, sulla superficie sferica e nello spazio in genere] (J.Math.Pure Appl., **6**, 105-170, 1842).
Nella prima parte di questo lavoro J.Steiner introduce il *metodo degli snodi*, che puó essere utilizzato per risolvere ad esempio (data l'esistenza di una figura massimale) il *Problema di Didone*.
Questo problema isoperimetrico ha una leggenda alle spalle.

Didone era la figlia di un re di Tiro. Secondo la leggenda, era sposata al proprio zio Acerba, che fu ucciso a causa delle sue ricchezze.
Allora Didone fuggí a Cipro col tesoro di Acerba e da lí salpó verso la costa dell'Africa di fronte la Sicilia.
Ella chiesa al signore del luogo di poter acquistare un pó di terra lungo la spiaggia, un pezzo non piú grande di quanto potesse cingerne una pelle di bue.
Egli acconsenti e generosamente le forní una grande pelle. La furba Didone

taglió allora la pelle in sottili strisce e ne legó le estremitá insieme in modo da formare una fune e poter cosí circondare ben piú terra di quanto il signore del luogo avesse immaginato.

Se ammettiamo che la spiaggia fosse rettilinea ed il terreno piatto, Didone si trovó di fronte al problema:

Qual'é la figura di area massima che si puó circondare con una fune di data lunghezza e con una parte imprecisata di linea retta?

Ora mostreremo come il *metodo degli snodi* di Steiner (presente nella dimostrazione del Lemma 1.3), applicato alla "dimostrazione" del *Teorema Isoperimetrico*, permetta di risolvere elegantemente e con ingegno il *Problema di Didone*, sottolineando il fatto peró che supporremo per data l'esistenza della figura massimale, mettendo in chiara luce l'obiezione posta da K.Weierstrass.

Richiamiano l'enunciato del Teorema:

Fra tutte le figure piane di dato perimetro, il cerchio ha l'area massima.

Dimostrazione. (alla Steiner con il metodo degli snodi)

La dimostrazione procederá in piú passi.

Il primo, é notare che la figura che risolve il teorema deve essere convessa.

Infatti se cosí non fosse, questo implicherebbe l'esistenza di due punti, che connessi con un segmento, individuerebbero una regione che sarebbe successivamente riflessa per trasformare la figura di partenza in una nuova con stesso perimetro ma con maggiore area, come avviene per le seguenti figure:

Il secondo passo é il seguente lemma:

Lemma 1.2. *Siano S e T due punti selezionati sul bordo della figura massimale che risolve il Teorema, tali da dividerne il perimetro in due parti uguali. Allora il segmento $\bar{ST}$ deve dividere la figura in due parti di eguale area.*

Dimostrazione. Con riferimento alla figura seguente:

sia per assurdo l'area di $S1T$ piú grande di quella di $T2S$.
Allora riflettendo $S1T$ secondo l'asse individuato dalla retta passante per $\bar{ST}$ otterremo la figura $S1T3$ la quale ha lo stesso perimetro di $S1T2$ ma area piú grande: contraddizione. ∎

Appare ora chiaro che per dimostrare il Teorema di partenza sará sufficiente risolvere il *Problema di Didone*, provando che:

Lemma 1.3. *Consideriamo tutti gli archi di lunghezza fissata ed estremi (S e T) giacenti su una retta r.*
Allora la curva che racchiude l'area massima tra se stessa e la retta r é il semicerchio.

Dimostrazione. Con riferimento alle seguenti figure consideriamo gli estremi S e T della curva ed un punto fissato P sull'arco $\tilde{ST}$:

consideriamo i tre punti S, T, P come degli *snodi* planari: il punto P é libero di muoversi sul piano π vincolato all'arco $\tilde{ST}$, mentre i punti S, T sono vincolati a muoversi sulla retta r sempre su π.
Da semplici considerazioni di trigonometria é facile convincersi che il triangolo SPT (considerando i lati $\bar{SP}$ e $\bar{PT}$ di lunghezza fissata) che ha area maggiore, é quello per cui l'angolo α é retto. Infatti l' area A del triangolo SPT é esprimibile, ponendo le lunghezze di $\bar{ST}$ e $\bar{PT}$ uguale ad a e b, come:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \alpha,$$

é chiaro quindi che l' area massima si ha per $\alpha = \pi/2$.
Se allora α, fissando P sull'arco $\tilde{ST}$, risultasse essere diverso da $\pi/2$, potremo sostituire la figura I) con la II), facendo scorrere S e T su r:

Otteniamo cosí una figura con lo stesso perimetro della figura I) ma con area maggiore (la zona tratteggiata si sposta rigidamente!).
Dall'arbitrarietá della scelta di P é chiaro ora che potremo applicare il procedimento fin qui esposto solo se la figura I) non é un semicerchio.
Questo prova il lemma e quindi il *Teorema Isoperimetrico*, avendo comunque supposto l' esistenza della soluzione. ■

Tra i matematici che si occuparono del problema di esistenza soggiacente, come abbiamo visto, nelle dimostrazioni di Steiner vanno ricordati in special modo: F.Edler, E.Study, C.Caratheodory e W.Blaschke che lavorarono comunque tutti in ambito convesso e sostanzialmente con strumenti geometrici.

Ricordiamo anche A.Hurwitz (*Sur quelques applications geometriques des series de Fourier*, Ann.Sci.École Norm.Sup.,**19**, pag.392-394, 1902) che diede una dimostrazione del *Teorema Isoperimetrico* utilizzando solo strumenti analitici, (si veda paragrafo §3.2 della presente tesi).
Nella sezione che seguirá, ci occuperemo di aspetti elementari (non per questo banali) legati ai problemi isoperimetrici, introducendo cosí fra gli altri il *metodo delle approssimazioni successive* e quello della *simmetrizzazione di Steiner*.

1.2 Sui problemi elementari

I poligoni sono fra le figure geometriche piú semplici e i triangoli sono i piú elementari fra i poligoni.
Proposizioni elementari ma basilari per una ricerca sui teoremi isoperimetrici sono le seguenti:

Proposizione 1.4. *Fra tutti i triangoli aventi la stessa base e lo stesso perimetro, il triangolo isoscele é quello di area massima.*

Proposizione 1.5. *Fra tutti i triangoli con dato perimetro, il triangolo equilatero ha l'area massima.*

Cominciamo col dimostrare la Prop. 1.4, che sará successivamente utile per la dimostrazione della Prop. 1.5.

Dimostrazione. (Prop. 1.4)
Sia ABC un triangolo isoscele di base $\bar{A}B$ e sia ABD un altro triangolo con stessa base e lo stesso perimetro. Allora avremo (denotando con $d(.,.)$ la distanza euclidea tra due punti sul piano) per ipotesi:

$$d(A,C) + d(B,C) = d(A,D) + d(B,D)$$

Nella figura precedente il punto D é stato posto esternamente al triangolo ABC ed in modo che il lato AD (del triangolo ABD) intersechi il lato BC

(del triangolo ABC), questo perché é effettivamente l'unico modo possibile (é chiaro che potevamo fare lo stesso raginamento con il lato BD) di disporre il triangolo ABD dato il vincolo posto dalle ipotesi della proposizione (cioé che il triangolo ABD deve avere lo stesso perimetro del triangolo ABC). A titolo esemplificativo e per convincersi di quanto appena affermato si osservino le seguenti figure:

É evidente che nei casi evidenziati nelle figure (che sono i soli casi possibili), il perimetro del triangolo ABD non puó essere uguale a quello del triangolo ABC.

Ritorniamo dunque alla figura iniziale.
Sia F su AE con $d(E,F) = d(E,B)$.
Questa scelta é possibile perché $\bar{BE} < \bar{AE}$ dato che vale per gli angoli la seguente diseguaglianza:

$$E\widehat{A}B < C\widehat{A}B = E\widehat{B}A$$

Sia inoltre EG su EC (eventualmente prolungato), con $d(E,G) = d(E,D)$. Dimostreremo che di fatto G é situato fra C e E, ed allora poiché il triangolo EFG é uguale al triangolo EBD ne seguirá immediatamente la tesi.

Dunque osserviamo che :

$$d(F,G) = d(B,D) \qquad \text{(per costruzione)}$$

e

$$d(A,C) + d(B,C) = d(A,D) + d(B,D) \qquad \text{(per ipotesi)}$$

allora:

$$\begin{aligned} d(A,C) + d(B,C) &= d(A,F) + d(F,D) + d(F,G) \\ &= d(A,F) + d(B,G) + d(F,G) \qquad (1.1) \\ &= d(A,F) + d(B,C) \pm d(C,G) + d(F,G) \end{aligned}$$

e quindi

$$d(A,C) = d(A,F) \pm d(C,G) + d(F,G)$$

dove il segno $+$ o $-$ indica rispettivamente che G é situato oltre C, oppure tra E e C.
Il segno $+$ implicherebbe un assurdo, in quanto la distanza lungo una retta, é la minima distanza fra due punti su un piano e quindi il punto G deve essere fra E e C ; la proposizione é dimostrata. ■

Passiamo adesso alla dimostrazione della Prop. 1.5.

Dimostrazione. (Prop. 1.5)

Dobbiamo dimostrare che fra tutti i triangoli con un dato perimetro, il triangolo equilatero ha l'area massima.
La dimostrazione che segue, dovuta a Simon Lhuilier (*L'Abrégé d'Isopérimétrie* in *Polygonométrie*, Ginevra,1789) sfrutta in modo ingegnoso il metodo delle approssimazioni successive.

Supponiamo che Δ sia un triangolo qualsiasi e che abbia perimetro P e area A. Supponiamo inoltre che Δ non sia equilatero.
Dimostreremo che se $\tilde{\Delta}$ é un triangolo equilatero di area $\tilde{A}$ e perimetro P

allora $\tilde{A} > A$.
Costruiremo una successione di triangoli

$$\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots \varDelta_n, \ldots$$

ciascuno di perimetro P e tale che ciascuno, dopo il primo, sia di area maggiore del precedente.
Vedremo come al crescere di n, i triangoli $\varDelta_n$ diventino sempre piú assomiglianti ad un triangolo equilatero $\tilde{\varDelta}$.
Occupiamoci della $\{\varDelta_n\}$.

Il primo triangolo della successione sia $\varDelta_1$, triangolo isoscele avente per base un lato di $\varDelta$; diciamo $s_1/2$ la lunghezza dei nuovi lati. Per la Prop. 1.4 la sua area A_1 é maggiore di A.
Il triangolo $\varDelta_1$ é il punto di partenza per il nostro processo iterativo, che consisterá nel sostituire un dato triangolo isoscele con un altro, anch'esso isoscele e dello stesso perimetro, ma avente come base un lato del precedente. In base alla Prop. 1.4, tale procedimento porterá, ad ogni passo, un aumento dell'area, lasciando invariato il perimetro.
Il secondo triangolo della successione sará allora un triangolo $\varDelta_2$ avente base di lunghezza $s_1/2$; gli altri lati avranno lunghezza, diciamo, $s_2/2$, tale che:

$$s_2 + s_1/2 = P.$$

Sia $\varDelta_n$ triangolo isoscele ottenuto iterando n-volte tale procedimento. Notiamo che se $s_{n-1}/2$ ed $s_n/2$ sono le lunghezze rispettivamente della base e dei lati, dovrá risultare:

$$s_n + s_{n-1}/2 = P = s_{n-1} + s_{n-2}/2$$

e quindi anche:

$$s_n = (s_{n-2} + s_{n-1})/2$$

Osserviamo che, una volta provato che s_n converge, dovrá essere:

$$\frac{3}{2} \lim s_n = P.$$

Siccome, detta A_n l'area di $\varDelta_n$, é

$$A_n < A_{n+1}, \quad \forall\, n$$

risulterá infine

$$A < \lim A_n = \tilde{A}$$

ove $\tilde{A}$ é l'area del triangolo equilatero di lato

$$s = \lim s_n/2 = P/3$$

.

Proviamo quindi la convergenza di s_n.
Per quanto sopra, é:

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{s_{n-1} + s_n}{2} - s_n \\ &= -\frac{s_n - s_{n-1}}{2} \\ &= (-1)^2 \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{2^2} \\ &\ldots\ldots \\ &= (-1)^{n-1} \frac{s_2 - s_1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Dunque s_n é di Cauchy e quindi converge. ■

La dimostrazione precedente ha evidentemente un interesse sostanzialmente storico, oggi la Prop. 1.5 puó essere dimostrata velocemente facendo riferimento alla seguente osservazione:

Osservazione 1.6. *Per i triangoli di dato perimetro $2p$ e lati di lunghezza x, y, z, vale la seguente formula (di Erone [19] pag. 41) (tutt'ora utilizzata nella pratica catastale)*

$$A(x, y, z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}, \tag{1.2}$$

dove p é il semiperimetro, i.e. $p = (x + y + z)/2$ e $A(x, y, z)$ é l'area del triangolo.
La dimostrazione della Prop. 1.5 segue subito ricordando la relazione che lega la media geometrica e quella aritmetica, cioé:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \quad \forall x_i \in \mathbf{R}^+, (i = 1, 2, \dots n), \tag{1.3}$$

e l' uguaglianza si verifica se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, (la (1.3) puó essere dimostrata per induzione).
In particolare:

$$\sqrt[3]{(p - x)(p - y)(p - z)} \leq \frac{p}{3}.$$

Dunque, da (1.2) segue che

$$A \leq \frac{p^2}{3^{3/2}}$$

e l'uguaglianza é infatti realizzata se e solo se $x = y = z = \frac{2}{3}\ p$, cioé:

$$A(\frac{2}{3}\ p, \frac{2}{3}\ p, \frac{2}{3}\ p) = \sqrt{\frac{p^4}{3^3}}.$$

La soluzione del problema isoperimetrico per i rettangoli, cioé il quadrato, era giá nota ad Euclide (vissuto nel 300 a.C.) da quanto afferma Kazarinoff in [19] pag.41; oggi, come per il caso dei triangoli, gli strumenti dell' Analisi riducono questo problema ad un banale esercizio:
Trovare il massimo per la funzione:

$$A(x, y) = xy, \quad x, y \geq 0$$

con la condizione:

$$2x + 2y = P\ (cost.).$$

é immediato allora, che:

$$A(x(y), y)) = \frac{(P - 2y)y}{2}$$

e quindi

$$\frac{dA}{dy} = \frac{P}{2} - 2y = 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{P}{4} \Rightarrow x_{max} = y_{max} = \frac{P}{4}.$$

Diamo di seguito alcuni risultati che generalizzano i precedenti.

Teorema 1.7. *(Lhuilier 1789)*
Sia P un poligono convesso, L il suo perimetro ed A la sua area. Allora:

$$\boxed{L^2 \geq 4\alpha A}$$

dove α é l'area del poligono circoscritto al cerchio unitario con lati paralleli ai lati di P. L'uguaglianza si verifica se e solo se P é circoscritto ad un cerchio.

(vedi [25] pag. 1209)

Teorema 1.8. *Sia n il numero di lati di un poligono convesso P. Denotiamo con L il suo perimetro ed A la sua area. Allora:*

$$\boxed{L^2 \geq 4nA\tan(\pi/n)}$$

e l'uguaglianza si verifica se e solo se P é regolare.

(vedi [2] pag. 2)

Teorema 1.9. *Sia S la misura della frontiera di un poliedro limitato di n-facce in $\mathbf{R}^3$ e V il suo volume. Allora:*

$$\boxed{S^3 \geq 54(n-2)(4\sin^2\alpha_n - 1)V^2\tan\alpha_n}$$

dove $\alpha_n = \pi/6(n/(n-2))$ e l'uguaglianza si verifica solo per il tetraedro e dodecaedro regolari ed il cubo.

(vedi [25] pag. 1219)

Adesso presenteremo il *metodo della simmetrizzazione* di Steiner in forma elementare, utilizzando quindi il *Principio di riflessione*, ripercorrendo sostanzialmente le tappe che portarono il matematico svizzero (J.Steiner) a credere di aver dimostrato completamente (con questo metodo) il *Teorema Isoperimetrico.*

Nel prossimo capitolo (§2.2) riaffronteremo la questione in modo compiuto utilizzando il *Principio di Selezione di Blaschke* completando cosí il lavoro di Steiner che, é bene ricordarlo rimase comunque valido e fondamentale nonostante la giusta osservazione mossa da K.Weierstrass piú volte ricordata.

Iniziamo dunque con l'osservare che nei problemi isoperimetrici la simmetria gioca un ruolo importante.
Le figure che risolvono ad esempio i problemi fin ad ora trattati (quadrato, triangolo isoscele, triangolo equilatero), sono quelle che, nella loro classe, hanno il massimo di simmetria possibile.
Un procedimento per creare simmetrie é sicuramente la riflessione.
Il principio matematico astratto che é associato al concetto di riflessione é noto come *Principio di riflessione* ed é attribuito a Erone di Alessandria (vissuto tra il I e II sec. d.C.).

Egli trovó che un raggio di luce riflesso da un piano percorre il minimo cammino possibile fra la sua sorgente e la sua destinazione.
Equivalente a questo principio é il fatto che *per un raggio riflesso da una superficie piana l'angolo d'incidenza é uguale all'angolo di riflessione.*
Per convincersi di quanto detto supponiamo che A sia la sorgente, B la destinazione e m sia il riflettore.
Limitiamoci a dimostrare che se ABC é un cammino con angoli d'incidenza e riflessione uguali, allora é il cammino piú corto da A a m e a B.
Sia B' il riflesso di B rispetto a m, allora:

$$A\widehat{C}X = B\widehat{C}Y = B'\widehat{C}Y$$

quindi ACB' é un segmento di retta, il cammino minimo fra A e B'.
Ma $d(B,C) = d(B',C)$, anzi $d(B,P) = d(B',P)$ per ogni P su m.

Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} d(A,P)+d(P,B) &= d(A,P)+d(P,B') \\ &> d(A,C)+d(C,B') \\ &= d(A,C)+d(C,B) \qquad \forall P \end{aligned} \tag{1.4}$$

pertanto ACB é il minimo cammino da A a m e a B.

Introduciamo ora la metodologia conosciuta come *Simmetrizzazione di Steiner* utilizzando il precedente *Principio*.
Ammettendo che vi sia una figura di area massima (cioé senza dimostrarlo) fra quelle di perimetro dato, l'idea di J.Steiner per "dimostrare" il *Teorema Isoperimetrico* con la *simmetrizzazione* fu quella che: *la figura massimale deve avere un asse di simmetria per ogni possibile direzione.*
Per sviluppare questa idea dobbiamo prima richiamare l'attenzione su un fatto riguardante i trapezi.
Supponiamo che $ABCD$ sia un trapezio e supponiamo che $AB'C'D$ sia un trapezio isoscele con le stesse basi e altezza di $ABCD$.
Utilizzando poi il *Principio di riflessione* si puó affermare che il perimetro di un triangolo di data base e altezza, é minimo quando é isoscele:

Allora con riferimento alle seguenti figure risulta chiaro che l'area di $AB'C'D$ é uguale all'area di $ABCD$, ma il suo perimetro é minore o uguale al perimetro di $ABCD$:

.

Ora consideriamo una qualsiasi figura convessa sul piano.
Dividiamola in sottili strisce a lati paralleli e per il momento ammettiamo che ogni striscia sia un trapezio.
Da questi trapezi ricaviamo una nuova figura trasformando ciascuno di essi in un trapezio isoscele con le stesse basi e la stessa area e poi allineando i nuovi trapezi in modo che abbiamo l'asse di simmetria in comune.
Con riferimento alle figure seguenti, segue allora da quanto dimostrato precedentemente che, la figura c) ha la stessa area della figura b) ma minor perimetro:

Tramite argomenti di approssimazione *(poligoni approssimanti)* possiamo in ultima analisi affermare che: *data una figura convessa possiamo costruirne un'altra con la stessa area, con perimetro non maggiore e con un asse di simmetria in una direzione arbitraria.*

La costruzione precedente puó essere pensata peró, anche nel modo seguente:

Data una figura convessa, si individua una direzione tracciando una retta. Si pensi poi, di tracciare tutte le corde della figura data in modo perpendicolare alla retta di direzione.
Si pensi di spostar tutte le corde in modo che la retta di direzione diventi l'asse di ciascuna di essa. Gli estremi delle corde spostate per traslazione, formeranno una nuova figura simmetrica, con la medesima area di quella di partenza ma con un perimetro minore.
Questa costruzione appena descritta si chiama: *Simmetrizzazione di Steiner.*

Adesso passiamo alla "dimostrazione" del *Teorema Isoperimetrico*, utilizzando il precedente metodo:

Dimostrazione. (alla Steiner con la Simmetrizzazione)

Data una figura convessa che non abbia un asse di simmetria in una certa direzione, applichiamogli una *simmetrizzazione di Steiner* rispetto a quella direzione: otterremo una nuova figura convessa con la medesima area e un minor perimetro.

Possiamo adesso pensare di ingrandire la nuova figura (ad esempio con una similitudine) finché abbia il perimetro uguale a quello della figura originaria. Pertanto, se una figura non ha un asse di simmetria in ogni direzione non puó essere la figura di massima area fra quelle di perimetro dato.
Allora *se esiste* una figura massimale, il cerchio é la figura massimale. ■

Nei prossimi capitoli con un linguaggio preciso (non piú *sintetico ed elementare*) indagheremo sugli aspetti geometrici ed analitici legati alla *diseguaglianza isoperimetrica*.

Capitolo 2

Aspetti geometrici

2.1 Proprietá isoperimetrica del cerchio

La *classica diseguaglianza isoperimetrica* stabilisce che, per una curva planare $\mathcal{C}$, semplice, chiusa e rettificabile, di lunghezza L:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A} \tag{2.1}$$

dove A é l'area della regione racchiusa da $\mathcal{C}$.
Poiché l'uguaglianza in (2.1) si verifica quando $\mathcal{C}$ é una circonferenza, segue allora che la circonferenza massimizza l'area A tra tutte le curve (come sopra definite) di uguale lunghezza L. Da (2.1) altresí non segue immediatamente che la *circonferenza é l'unica curva che massimizza l'area A*. Anche quest'ultima affermazione (*proprietá isoperimetrica del cerchio*) richiederá dunque una dimostrazione.

Durante il 1920, T.Bonnesen (*Uber eine Verscharfung der isoperimetrischen Ungleichheit des Kreises in der Ebene*, Math. Ann., **84**, pp. 216-227, 1921) provó una serie di disuguaglianze della forma:

$$L^2 - 4\pi A \geq B \tag{2.2}$$

dove la quantitá B é un'espressione avente le seguenti tre proprietá di base:

1. B é non negativa.

2. B $= 0$ se e solo se $\mathcal{C}$ é una circonferenza.

3. B ha proprietá geometriche.

Osserviamo allora che:

- dalla proprietá 1., ogni diseguaglianza di Bonnesen (2.2) implicherá la diseguaglianza isoperimetrica (2.1).
- dalla proprietá 2., segue che l'uguaglianza in (2.1) si verificherá *solo* quando $\mathcal{C}$ é una circonferenza.
- la proprietá 3. misurerá la *deviazione dalla circolaritá* della curva $\mathcal{C}$. (per approfondimenti: T. Bonnesen, *Uber des isoperimetrische Defizit ebener Figuren*, Math. Ann., **91**, pp. 252-268, 1924).

Passiamo dunque alla formulazione precisa della diseguaglianza isoperimetrica sul piano.
É bene precisare prima di enunciare il teorema, che una curva $\mathcal{C}$ chiusa, semplice e rettificabile sul piano, puó essere formalizzata (parametrizzandola) nel seguente modo:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

dove $f(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue $BV[a,b]$ (ovvero a variazione limitata in $[a,b]$) tali che:

$$f(a) = f(b), \qquad g(a) = g(b), \quad (i.e.\ \mathcal{C}\ e'\ chiusa)$$

$$(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2)),\ \forall t_1 \neq t_2 \in (a,b], \quad (i.e.\ \mathcal{C}\ e'\ semplice)$$

Teorema 2.1. *Sia $\mathcal{C}$ una curva planare chiusa, semplice e rettificabile.*
Se L é la lunghezza di $\mathcal{C}$ e A l'area della regione Ω racchiusa da $\mathcal{C}$ allora:

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

L'uguaglianza si verifica solo se Ω é un cerchio.

Per dimostrare il teorema (2.1) faremo uso di alcune diseguaglianze di Bonnesen, che passiamo dunque subito a formulare e dimostrare.

Teorema 2.2. *Sia $\mathcal{C}$ una curva planare chiusa, semplice e rettificabile. Siano L la lunghezza di $\mathcal{C}$ e A l'area della regione Ω racchiusa da $\mathcal{C}$. Siano r e R i raggi rispettivamente del piú grande cerchio contenuto in Ω e del piú piccolo cerchio contenente Ω.*
Allora si hanno le seguenti diseguaglianze (di Bonnesen):

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2 (R - r)^2, \tag{2.4}$$

$$L^2 - 4\pi A \geq A^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^2, \tag{2.5}$$

$$L^2 - 4\pi A \geq L^2 \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2, \tag{2.6}$$

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi} \leq r \leq R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}. \tag{2.7}$$

Dimostrazione.(Teorema 2.2.) Osserviamo che poiché nella (2.7) sono presenti le radici della seguente equazione di secondo grado:

$$\pi t^2 - Lt + A = 0$$

avremo per ogni t compreso nell'intervallo chiuso limitato da queste radici:

$$\pi t^2 - Lt + A \leq 0. \tag{2.8}$$

Possiamo riscrivere quest'ultima disequazione per ogni t compreso nell'intervallo suddetto, nelle seguenti forme equivalenti:

$$Lt \geq A + \pi t^2 \tag{2.9}$$

$$L^2 - 4\pi A \geq (L - 2\pi t)^2 \tag{2.10}$$

$$L^2 - 4\pi A \geq \left(L - \frac{2A}{t} \right)^2 \tag{2.11}$$

$$L^2 - 4\pi A \geq \left(\frac{A}{t} - \pi t \right)^2 \tag{2.12}$$

Passiamo adesso a provare le diseguaglianze di Bonnesen del teorema.
L'idea é di provare, prima, che la (2.7) implica effettivamente tutte le altre ((2.4),(2.5),(2.6)) e dimostrare poi la (2.7) stessa.
Osserviamo allora che dalla (2.7) segue la (2.4), infatti da (2.7) abbiamo:

$$R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}$$

$$-r \leq \frac{-L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}$$

e sommando otteniamo:

$$R - r \leq \frac{\sqrt{L^2 - 4\pi A}}{\pi}$$

che é appunto la (2.4):

$$L^2 - 4\pi A \geq \pi^2 (R - r)^2.$$

Dalla (2.11) poi si hanno le seguenti diseguaglianze:

$$\sqrt{L^2 - 4\pi A} \geq \frac{2A}{r} - L \tag{$*$}$$

$$\sqrt{L^2 - 4\pi A} \geq L - \frac{2A}{R} \tag{$**$}$$

addizionandole e quadrando, otterremo la (2.5) :

$$L^2 - 4\pi A \geq A^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^2$$

mentre moltiplicando $(*)$ per r e $(**)$ per R e quindi sommando, otterremo la (2.6):

$$L^2 - 4\pi A \geq L^2 \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2.$$

Dunque rimane da dimostrare la (2.7).
Ci limitiamo per ora a considerare $\mathcal{C}$ come la frontiera di un poligono convesso.
Sia $t \geq 0$, chiamiamo $\mathcal{C}_t$ la curva esterna parallela a $\mathcal{C}$ a distanza t.
$\mathcal{C}_t$ consiste di un insieme di segmenti, ognuno parallelo ad un lato di $\mathcal{C}$ con uguale lunghezza, uniti con archi circolari di raggio t con centro nei vertici di $\mathcal{C}$.

Osserviamo che per la lunghezza $L(t)$ di $\mathcal{C}_t$ avremo:

$$L(t) = L + 2\pi t$$

(dove L é la lunghezza di $\mathcal{C}$), mentre per l'area $A(t)$ della regione racchiusa da $\mathcal{C}_t$ avremo:

$$A(t) = A + Lt + \pi t^2 \tag{2.13}$$

(dove A é l'area della regione racchiusa da $\mathcal{C}$), come facilmente si verifica.

Cercheremo adesso di stimare il valore di $A(t)$.
L'idea é di giungere alla disequazione (2.8).
Sia $\mathcal{P}$ un' arbitraria linea poligonale semplice (non necessariamente chiusa) di lunghezza L, e fissiamo $t \geq 0$.
Sia $\mathsf{E}^{(t)}$ l'insieme di punti p del piano cosí definito:

$$p \in \mathsf{E}^{(t)} \Leftrightarrow \text{la circonferenza di raggio } t \text{ centrata in } p \text{ interseca } \mathcal{P}.$$

Dividiamo $\mathsf{E}^{(t)}$ nei sottoinsiemi $\mathsf{E}_\mathsf{k}^{(\mathsf{t})}$ cosí definiti:

$$p \in \mathsf{E}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})} \Leftrightarrow \text{la circonferenza}$$
$$\text{di raggio } t \text{ centrata in } p \text{ interseca}$$
$$\mathcal{P} \text{ in esattamente } \mathsf{k} \text{ punti.}$$

.

Mostreremo piú avanti che le aree $\mathsf{A}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})}$ degli $\mathsf{E}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})}$ e la lunghezza L di $\mathcal{P}$ soddisfano la seguente uguaglianza:

$$\sum_{\mathsf{k}} \mathsf{k}\mathsf{A}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})} = 4tL \tag{2.14}$$

Osserviamo per ora, che possiamo ignorare le circonferenze tangenti ad un lato di $\mathcal{P}$ o passanti per un vertice, poiché i centri di tali circonferenze vivono su un'unione di segmenti ed archi circolari e quindi non danno contributo alle aree $\mathsf{A}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})}$. Alla luce di questa osservazione, considerando poligoni chiusi, (la cui frontiera quindi, é una poligonale semplice, chiusa e di lunghezza L), avremo $\mathsf{A}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})} \neq 0$ solo se k é pari.

Prima di passare alla dimostrazione della (2.14) consideriamo dunque l'area totale $\mathsf{A}_{\mathsf{E}}^{(\mathsf{t})}$ dell'insieme $\mathsf{E}^{(t)}$, nel caso di poligoni chiusi, che soddisferá allora, le seguenti relazioni:

$$2\mathsf{A}_{\mathsf{E}}^{(\mathsf{t})} = 2(\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})} + \mathsf{A}_4^{(\mathsf{t})} + \mathsf{A}_6^{(\mathsf{t})} ...) \leq 2\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})} + 4\mathsf{A}_4^{(\mathsf{t})} + 6\mathsf{A}_6^{(\mathsf{t})} ... = 4tL$$

e cosí, tenendo presente la (2.14) e (2.13) e considerando $t \in (r, R)$ avremo:

$$2tL \geq \mathsf{A}_{\mathsf{E}}^{(\mathsf{t})} = A(t) = A + Lt + \pi t^2.$$

Infatti essendo ora $t \in (r, R)$, (dove r, R sono per ipotesi i raggi rispettivamente del piú grande cerchio contenuto in Ω e del piú piccolo cerchio contenente Ω) i punti $p \in \mathsf{E}^{(t)}$ saranno tutti e soli i punti della regione racchiusa da $\mathcal{C}_t$ (la cui area é appunto $A(t)$).
Dall'ultima relazione, segue facilmente che:

$$\pi t^2 - Lt + A \leq 0 \qquad \forall t \in [r, R]$$

giungendo finalmente alla (2.7) per poligoni convessi.

Prima di estendere la validitá della (2.7) a curve (planari) chiuse, semplici e rettificabili, passiamo a dimostrare la (2.14) procedendo per induzione.
Se $\mathcal{P}$ é un unico segmento $\mathcal{S}$ di lunghezza s, allora l'insieme degli $\mathsf{E}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})}$, precedentemente definiti, sará costituito solo da $\mathsf{E}_1^{(\mathsf{t})}$ e $\mathsf{E}_2^{(\mathsf{t})}$, perché una circonferenza che intereca $\mathcal{S}$ puo farlo ovviamente in uno o due soli punti.

Allora la (2.14) prende la forma:

$$\mathsf{A}_1^{(\mathsf{t})} + 2\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})} = 4ts \tag{2.15}$$

dove $\mathsf{A}_1^{(\mathsf{t})}$ e $\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})}$ sono rispettivamente l'area di $\mathsf{E}_1^{(\mathsf{t})}$ e $\mathsf{E}_2^{(\mathsf{t})}$.
Per verificare quest'ultima uguaglianza *(base dell'induzione)*, notiamo che l'insieme $\mathsf{E}^{(t)} = \mathsf{E}_1^{(\mathsf{t})} \cup \mathsf{E}_2^{(\mathsf{t})}$ in questo caso é un rettangolo di dimensioni $s \cdot 2t$ con due semicerchi di raggio t su due lati opposti. Allora con riferimento alla figura seguente, seguirá facilmente la (2.15).

Adesso, supponiamo verificata la (2.14) per tutte le linee poligonali semplici (non necessariamente chiuse) e rettificabili di n lati *(ipotesi induttiva).*
Dato allora una poligonale di n lati, aggiungendogli il lato $\mathcal{S}$ otterremo ovviamente una poligonale di $n+1$ lati.
Ma per $\mathcal{S}$ adesso vale la (2.15), e cosí addizionandola a (2.14), otterremo la corretta espressione della (2.14) per una poligonale semplice e rettificabile di $n+1$ lati e dunque la dimostrazione di (2.14) $\forall n$.

Osservazione 2.3. *Verifichiamo a titolo di esempio, la* (2.14) *nel caso del quadrilatero:* $(con\ riferimento\ alla\ figura,\ sia\ t\ fissato : t < a/2)$, *Facendo riferimento alla figura dovremmo avere che:*

$$2\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})} + 4\mathsf{A}_4^{(\mathsf{t})} = \sum_{\mathsf{k}} \mathsf{k}\mathsf{A}_{\mathsf{k}}^{(\mathsf{t})} = 4tL = 4t(2a + 2b)$$

infatti calcolando direttamente $\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})}$ *e* $\mathsf{A}_4^{(\mathsf{t})}$ *otteniamo:*

$$\mathsf{A}_2^{(\mathsf{t})} = 4t(a + b) - 8t^2 + 2\pi t^2$$

$$\mathsf{A}_4^{(\mathsf{t})} = 4t^2 - \pi t^2$$

e quindi:

$$2\mathsf{A}_2 + 4\mathsf{A}_4 = 4t(2a + 2b)$$

Adesso completiamo la dimostrazione del teorema.
Ricordiamo che abbiamo dimostratato la (2.7) solo per poligoni convessi.
Ora osserviamo che per un poligono arbitrario P (la cui frontiera sia comunque una poligonale semplice, e chiusa), possiamo considerare il relativo *inviluppo convesso*: $conv(P)$, (per le principali proprietá dell' *inviluppo convesso* si veda §2.2.1 della presente tesi).

L'idea é di confrontare le quantitá L, A, r, R di P (ormai con gli usuali significati), con i rispettivi $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{r}$, $\hat{R}$ di $conv(P)$.
Le quantitá $\hat{L}$, $\hat{A}$, $\hat{R}$ infatti soddisferanno per i risultati precedentemente ottenuti (per poligoni convessi appunto), la seguente diseguaglianza (derivata dalla (2.8)):

$$\hat{R}\hat{L} \geq \hat{A} + \pi\hat{R}^2,$$

ma essendo $\hat{L} \leq L$, $\hat{A} \geq A$ e $\hat{R} = R$ (vedi [26] pag.5), avremo

$$RL \ \geq \hat{R}\hat{L} \ \geq \hat{A} + \pi\hat{R}^2 \ \geq A + \pi R^2$$

e dunque anche per poligoni arbritari (come sopra meglio definiti), varrá:

$$R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}.$$

Ora per quanto riguarda r, utilizziamo un lemma che ci limitiamo ad enunciare: (vedi [26] pag.6)

Lemma 2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la cui frontiera é una poligonale $\mathcal{P}$ chiusa, semplice e di lunghezza L. Per ogni t nell'intervallo $0 \leq t \leq r$, sia Ω_t l'insieme dei punti in Ω che distano da $\mathcal{P}$ piu di t, e sia $\mathcal{P}_t$ la frontiera di Ω_t.*
Se $L(t)$ é la lunghezza di $\mathcal{P}_t$ allora:

$$L(t) \leq L - 2\pi t$$

e

$$A = \int_0^r L(t)\, dt$$

dove A é l'area di Ω.

Osservazione 2.5. *Facendo riferimento alle seguenti figure, possiamo convincerci facilmente del precedente lemma nel caso che Ω sia convesso.*

Chiaramente il lemma implica che:

$$A \leq Lr - \pi r^2$$

e cosí anche per poligoni arbritari, semplici e chiusi varrá:

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi} \leq r.$$

Per ultimare finalmente la dimostrazione del teorema, basterá allora utilizzare argomenti di approssimazione come ad esempio il seguente, che ci limitiamo ad enunciare: ([26] pag. 5)

Lemma 2.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la cui frontiera $\mathcal{C}$ sia una curva chiusa, semplice e di lunghezza L. Siano A, R e r le quantitá come precedentemente definite. Allora esiste una successione di poligonali chiuse e semplici $\mathcal{P}_n$, con associate le relative quantitá L_n, A_n, R_n e r_n tali che:*

$$L_n \leq L, \quad L_n \to L, \quad A_n \to A, \quad R_n \to R, \quad r_n \to r$$

.

Fine dimostrazione del Teorema (1.2) ■

Possiamo adesso dimostrare facilmente il teorema iniziale *(Teorema 1.1.)*.

Dimostrazione.(Teorema 1.1.)

La diseguaglianza di Bonnesen: $L^2 - 4\pi A \geq \pi^2(R-r)^2$ precedentemente dimostrata, implica chiaramente che $L^2 - 4\pi A \geq 0$ e che l'uguaglianza in quest'ultima si ottiene solo se Ω é un cerchio. ■

.

2.2 Diseguaglianza isoperimetrica nello spazio euclideo

In questo paragrafo, concentreremo la nostra attenzione sugli insiemi compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$. Dopo l'introduzione di alcuni concetti come la *metrica di Hausdorff*, il *Principio di selezione di Blaschke* e richiami sulla *misura secondo Peano-Jordan* (che chiameremo *volume* denotandola con ν_n), passeremo ad introdurre la nozione di *area superficiale* (che denoteremo con la lettera s) per insiemi non vuoti compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$ (i.e. la *misura* $(n-1)-$*dimensionale della frontiera*), mettendola in stretta connessione con particolari oggetti chiamati *volumi misti*.
Questi ultimi, introdotti qui in modo elementare (per approfondimenti si veda [8] Cap.6), ci permetteranno di arrivare alla diseguaglianza isoperimetrica per *corpi convessi* (i.e. insiemi compatti e convessi tale che l' insieme dei punti interni sia diverso dall' insieme vuoto), dimostrando cioé il seguente teorema:

Teorema 2.7. (Teorema Isoperimetrico)
Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$\boxed{s^n(A) \geq \omega_n n^n {\nu_n}^{n-1}(A)} \tag{2.16}$$

e l' eguaglianza si verifica se solo se A é una palla chiusa, (ω_n é il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$).

Concluderemo il paragrafo riproponendo in modo rigoroso la *simmetrizzazione* di Steiner e con gli strumenti precedentemente introdotti, risolveremo in ambito sostanzialmente geometrico la critica mossa da Weierstrass a Steiner piú volte ricordata.
Va osservato infine, che la diseguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^n$ sussiste anche per insiemi limitati non necessariamente convessi, all'atto della dimostrazione peró, si dovranno utilizzare strumenti piú elaborati di quelli introdotti in questo paragrafo, per cui si rimanda per approfondimenti a [8] Cap.2, [13] pag.190 ed al Capitolo 3 della presente tesi.

2.2.1 Insiemi convessi, la metrica di Hausdorff ed il Principio di selezione di Blaschke

Sia $\mathbb{R}^n$ la spazio euclideo n-dimensionale.
Estendendo l'usuale operazione di addizione vettoriale e moltiplicazione per uno scalare a sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, possiamo definire:

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}, \qquad \lambda A = \{\lambda \mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\}$$

dove $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'insieme $A + B$ é chiamato *somma vettoriale (o di Minkowski)* di A e B, ([37] pag.3, [8] pag. 68).
L'insieme $\{\mathbf{a}\} + B$, dove $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é spesso scritto $\mathbf{a} + B$ e chiamato il *traslato* di B, o piú precisamente il *traslato di B tramite* $\mathbf{a}$.
Dalla definizione di *somma vettoriale* segue che:

$$A + B = \bigcup_{\mathbf{a} \in A} \{\mathbf{a} + B\}$$

Il precedente risultato puó essere visualizzato dal seguente esempio in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) : |x|, |y| \leq 1\}, \qquad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

allora:

$$\mathbf{a} + B = \{\text{il disco di centro } \mathbf{a} \text{ e raggio unitario}\}$$

e quindi $A + B$ puó essere rappresentato come nelle seguenti figure:

Considerando le note proprietá dell' addizione vettoriale e moltiplicazione per uno scalare, risulteranno le seguenti proprietá per la *somma vettoriale*:

$$A + B = B + A \qquad (i)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad (ii)$$

$$A + \mathbf{0} = A \qquad (iii)$$

$$\mathbf{0} \in A + (-A) \quad se \quad A \neq \varnothing \qquad (iv)$$

$$1A = A \qquad (v)$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A \qquad (vi)$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad (vii)$$

$$(\lambda + \mu)A \subseteq \lambda A + \mu A \qquad (viii)$$

Ora concentreremo l'attenzione sugli *insiemi convessi.*

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due distinti punti di $\mathbb{R}^n$.
Allora il sottoinsieme

$$\{\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} : \lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1\}$$

é il *segmento* congiungente $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Definizione 2.8. *Sia A un insieme in $\mathbb{R}^n$.*
A é convesso*, se comunque presi due distinti punti di A, il segmento che li congiunge é contenuto in A.*

Algebricamente, A é *convesso* se $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in A$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$, o equivalentemente A é *convesso* se $\lambda A + \mu A \subseteq A, \quad \forall \lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$.

Teorema 2.9. *Siano A, B insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$ e sia α una scalare.*
Allora $A + B$ e αA sono convessi.

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$.
Poiché A, B sono convessi, $\lambda A + \mu A \subseteq A$ e $\lambda B + \mu B \subseteq B$.
Allora

$$\lambda(A + B) + \mu(A + B) = (\lambda A + \mu A) + (\lambda B + \mu B) \subseteq A + B$$

e

$$\lambda(\alpha A) + \mu(\alpha A) = \alpha(\lambda A + \mu A) \subseteq \alpha A.$$

■

Teorema 2.10. *L'intersezione di una famiglia arbitraria di insiemi convessi in* $\mathbb{R}^n$ *é un insieme convesso.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$.
Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bigcap\{A_i : i \in I\}$ e $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$; allora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{A_i : i \in I\}, \quad \forall i \in I$ ed essendo gli A_i convessi, $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in \{A_i : i \in I\}, \quad \forall i \in I$.
Allora $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in \bigcap\{A_i : i \in I\}$, mostrando appunto che l'intersezione é un insieme convesso. ■

Teorema 2.11. *Siano* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ *punti in un insieme convesso* A *in* $\mathbb{R}^n$. *Sia inoltre* $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ *con* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$.
Allora $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{a}_m \in A$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m.
Se $m = 1$ allora il teorema é banalmente verificato. (*Base dell'induzione*)

Supponiamo dunque che la tesi sia vera quando m é un intero k. (*Ipotesi induttiva*)
Sia allora:

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}$$

dove $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{k+1} \in A; \quad \lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1} \geq 0$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k+1} = 1$.
Al piú un λ_i dovrá essere minore di 1, diciamo $\lambda_{k+1} < 1$.
Possiamo scrivere:

$$\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{a}_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\lambda}\mathbf{a}_k, \qquad \text{dove} \quad \lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$$

Dall' ipotesi induttiva, $\mathbf{y} \in A$.
Poiché A é convesso e contiene $\mathbf{y}$ e $\mathbf{a}_{k+1}$ allora l' equazione $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + \lambda_{k+1}\mathbf{a}_{k+1}$ mostra che $\mathbf{x} \in A$ e questo completa la dimostrazione per induzione. ■

L' ultimo teorema ci porta alla seguente definizione:

Definizione 2.12. *Un punto* $\mathbf{x}$ *si dice* combinazione convessa *dei punti* $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m$ *in* $\mathbb{R}^n$, *se esistono* $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ *con* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ *tali che*

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m.$$

Teorema 2.13. *Sia* A *un insieme convesso in* $\mathbb{R}^n$ *e siano* $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$. *Allora* $(\lambda_1 + ... + \lambda_m)A = \lambda_1 A + \cdots + \lambda_m A$.

Dimostrazione. L' affermazione é banale quando ogni λ_i é uguale a zero; supponiamo dunque che $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m > 0$.
Per il Teorema 2.11, possiamo dedurre che:

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + ... + \lambda_m)A &\subseteq \lambda_1 A + \cdots + \lambda_m A \\ &= \lambda \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} A + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda} A \right) \\ &\subseteq \lambda A \\ &= (\lambda_1 + ... + \lambda_m)A.\end{aligned}$$

Cosí $(\lambda_1 + ... + \lambda_m)A = \lambda_1 A + \cdots + \lambda_m A$. ∎

Teorema 2.14. *Siano* A, B, C *insiemi in* $\mathbb{R}^n$. *Supponiamo che* A *sia non vuoto e limitato, che* C *sia chiuso e convesso, e che* $A + B \subseteq A + C$. *Allora* $B \subseteq C$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{a}_0 \in A$. Se $\mathbf{b} \in B$, allora $\mathbf{a}_0 + \mathbf{b} \in A + B \subseteq A + C$, quindi esiste $\mathbf{a}_1 \in A$, $\mathbf{c}_1 \in C$ tali che $\mathbf{a}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{c}_1$. Ugualmente, esisteranno $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_h \in A$ e $\mathbf{c}_2, ..., \mathbf{c}_h \in C$ con $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{c}_2, ..., \mathbf{a}_{h-1} + \mathbf{b} = \mathbf{a}_h + \mathbf{c}_h$.
Adesso sommando le precedenti h equazioni abbiamo:

$$\mathbf{a}_0 + h\mathbf{b} = \mathbf{a}_h + \mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_h$$

Poiché C é convesso, il punto $\mathbf{x}_h$ definito dalla seguente equazione:

$$\mathbf{x}_h = \frac{1}{h} (\mathbf{c}_1 + \cdots + \mathbf{c}_h)$$

é contenuto in C. Osserviamo ora che:

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{x}_h\| = \frac{1}{h} \|\mathbf{a}_h - \mathbf{a}_0\| \to 0, \quad per\ h \to \infty,$$

poiché A é limitato. Allora $\mathbf{x}_h \to \mathbf{b}$ per $h \to \infty$.
Ma C é chiuso, quindi $\mathbf{b} \in C$ e cosí $B \subseteq C$. ∎

Segue facilmente, dal precedente teorema il seguente corollario:

Corollario 2.15. *Siano A, B, C insiemi in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che A sia non vuoto e limitato, che B e C siano chiusi e convessi, e che $A + B = A + C$. Allora $B = C$.*

Premettiamo ora alcune notazioni.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ allora denoteremo con:
i) A^c: l'insieme complementare di A in $\mathbb{R}^n$.

ii) $Int(A)$: l'insieme dei punti interni a A.

iii) $Fr(A)$: l'insieme dei punti di frontiera di A.

iv) $\bar{A}$: la chiusura di A.

v) $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)$: palla aperta di centro $\mathbf{a}$ e raggio r.

vi) $\mathcal{B}[\mathbf{a}, r]$: palla chiusa di centro $\mathbf{a}$ e raggio r.

vi) $aff(A)$: *l'inviluppo affine* di A, i.e. l' intersezione di tutti gli insiemi affini in $\mathbb{R}^n$ contenenti A, dove per insieme affine si intende un insieme S in $\mathbb{R}^n$ tale che se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S$ e $\lambda + \mu = 1$, allora $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in S$ ([37] pag.7).

viii) $Int_R(A)$: l'insiemi dei punti interni di A *relativi* allo spazio nel quale A é immerso: $\mathbf{a} \in Int_R(A)$ se esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{B}(\mathbf{a}, r) \cap aff(A) \subseteq A$.

ix) $Fr_R(A)$: l' insieme dei punti di frontiera di A *relativi* allo spazio nel quale A é immerso.

x) $conv(A)$: *l'inviluppo convesso* di A, i.e. l'intersezione di tutti gli insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$ contenenti A.

La precedente definizione per *l'inviluppo convesso* di un insieme A in $\mathbb{R}^n$ con il Teorema 2.10 mostra che $conv(A)$ é un insieme convesso contenente A.
Se C é un insieme convesso in $\mathbb{R}^n$ contenente A allora $conv(A) \subseteq C$.
É chiaro dunque che $conv(A)$ é il piú piccolo insieme convesso in $\mathbb{R}^n$ conte-

nente A. Inoltre A é convesso se e solo se $A = conv(A)$, $\quad conv(conv(A)) = conv(A)$ e se $A \subseteq B$ allora $conv(A) \subseteq conv(B)$.

Teorema 2.16. *Sia A un insieme in $\mathbb{R}^n$. Allora $conv(A)$ é l'insieme di tutte le* combinazioni convesse *(vedi Def. 2.12) di punti di A.*

Dimostrazione. Denotiamo con B l' insieme di tutte le *combinazioni convesse* di punti di A. Allora dal Teorema 2.11 e dal fatto che $A \subseteq conv(A)$ segue che $B \subseteq conv(A)$.
Adesso mostriamo che B é convesso. Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$, allora:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m, \qquad \mathbf{y} = \mu_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \mu_p \mathbf{b}_p$$

per qualche $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_p \in A$ e $\lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_p \geq 0$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$, $\mu_1 + \cdots + \mu_p = 1$. Sia $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Allora:

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = \lambda \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda \lambda_m \mathbf{a}_m + \mu \mu_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \mu \mu_p \mathbf{b}_p$$

e

$$\begin{aligned} \lambda\lambda_1 + \cdots + \lambda\lambda_m + \mu\mu_1 + \cdots + \mu\mu_p &= \lambda\left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m\right) + \mu\left(\mu_1 + \cdots + \mu_p\right) \\ &= \lambda + \mu = 1 \end{aligned}$$

Dunque $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in B$ e cosí B e convesso.
Poiché B é convesso e $A \subseteq B$ per definizione, risulta $conv(A) \subseteq B$. Quindi $B = conv(A)$. ∎

Ora dopo questa prima parte introduttiva, affronteremo argomenti e strumenti che risulteranno necessari per ricavare la diseguaglianza isoperimetrica nello spazio euclideo in modo rigoroso (limitandoci comunque ad una classe particolare di insiemi). Affronteremo concetti come: *distanza di Hausdorff*, *λ-intorno*, *Principio di selezione di Blaschke*, (per approfondimenti, si puó fare riferimento a [37] Cap.2, [4] Cap.XI-XII, [3] Cap.VIII).

Definizione 2.17. *Sia A un insieme in $\mathbb{R}^n$ e $\lambda \geq 0$.*
Allora il λ-intorno *: $(A)_\lambda$ di A é l'insieme $A + \lambda U$, dove U denota la palla unitaria chiusa: $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.*

La seguente figura illustra chiaramente quanto appena definito.

Teorema 2.18. *Siano A, B insiemi in $\mathbb{R}^n$ e sia $\lambda, \mu \geq 0$. Allora:*

$$(A)_0 = A \qquad e \quad A \subseteq (A)_\lambda; \tag{i}$$

$$(A)_\lambda \subseteq (B)_\lambda \quad \textit{quando} \quad A \subseteq B; \tag{ii}$$

$$(A)_\lambda \textit{ é convesso quando } A \textit{ é convesso}; \tag{iii}$$

$$((A)_\lambda)_\mu = (A)_{\lambda+\mu} \tag{iv}$$

Dimostrazione. i) e ii) sono semplici conseguenze della definizione di λ-*intorno.*
iii) segue da Teorema 2.9 e dal fatto che U é convesso.
iv) segue infine, dal Teorema 2.13, infatti:

$$((A)_\lambda)_\mu = (A)_\lambda + \mu U = (A + \lambda U) + \mu U = A + (\lambda + \mu)U = (A)_{\lambda+\mu}$$

■

Affermare dunque, che per ogni punto **a** di un insieme A in $\mathbb{R}^n$, esiste un punto **b** di un insieme B in $\mathbb{R}^n$, tale che la distanza euclidea $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \lambda$, é equivalente al fatto che: $A \subseteq (B)_\lambda, \quad \lambda \geq 0$.
Possiamo cosí introdurre una funzione ρ tra insiemi non vuoti e compatti A, B in $\mathbb{R}^n$ definita dalla seguente equazione:

$$\rho(A, B) = \inf\{\lambda \geq 0 : A \subseteq (B)_\lambda \quad e \quad B \subseteq (A)_\lambda\}.$$

Osserviamo che $\rho(\{\mathbf{a}\},\{\mathbf{b}\})$ tra i singleton $\{\mathbf{a}\},\{\mathbf{b}\}$ in $\mathbb{R}^n$ é uguale a $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$, ed inoltre ρ é invariante per traslazione, cioé se A e B sono non vuoti e compatti in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}$ un punto di $\mathbb{R}^n$, allora:

$$\rho(A,B) = \rho(A+\mathbf{x}, B+\mathbf{x})$$

Osservazione 2.19. *Siano A e B le palle chiuse rispettivamente: $\mathcal{B}[\mathbf{a},r]$ e $\mathcal{B}[\mathbf{b},s]$ in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\rho(A,B) = \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| + |s-r|$$

Infatti, supponiamo prima che $r \leq s$, allora:

$$A \subseteq B - (\mathbf{b}-\mathbf{a}) \subseteq (B)_{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|}$$

e

$$B = A + \mathbf{b} - \mathbf{a} + (s-r)U \subseteq (A)_{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|+s-r},$$

e quindi $\rho(A,B) \leq \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + s - r$. Ora B contiene un punto la cui distanza da $\mathbf{a}$ é $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| + s$. Allora se $\lambda \geq 0$ e $B \subseteq (A)_\lambda = \mathcal{B}[\mathbf{a}, \lambda + r]$, avremo che $\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| + s \leq \lambda + r$ e quindi $\rho(A,B) \geq \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + s - r$.
Essendo il caso $s \leq r$ similare, avremo dunque: $\rho(A,B) = \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| + |s-r|$.

Si dimostra facilmente che se A e B sono insiemi non vuoti e compatti in $\mathbb{R}^n$ con $\rho(A,B) = \lambda$, allora $A \subseteq (B)_\lambda \quad e \quad B \subseteq (A)_\lambda$ (si utilizza la nozione di distanza di un punto da un insieme, [37] pag.92), preferiamo soffermarci dunque, sul seguente teorema:

Teorema 2.20. *Siano A, B, C insiemi non vuoti e compatti in $\mathbb{R}^n$ e sia $\theta \geq 0$. Allora:*

$$\rho(A,B) \geq 0 \quad e \quad \rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B \qquad (i)$$

$$\rho(A,B) = \rho(B,A) \qquad (ii)$$

$$\rho(A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C) \qquad (iii)$$

$$\rho(conv(A), conv(B)) \leq \rho(A,B) \qquad (iv)$$

$$se\ A\ e\ B\ sono\ convessi \Rightarrow \rho(A,B) = \rho((A)_\theta, (B)_\theta) \qquad (v)$$

Dimostrazione. i). Dalla definizione di ρ segue che: $\rho(A,B) \geq 0$ e $\rho(A,A) = 0$.
Se $\rho(A,B) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \subseteq (B)_0 = B$ e $B \subseteq (A)_0 = A$ e quindi $A = B$.
ii). é ovvia.
iii). Sia $\rho(A,B) = \alpha$ e $\rho(B,C) = \beta$. Allora:

$$A \subseteq (B)_\alpha \subseteq ((C)_\beta)_\alpha = (C)_{\alpha+\beta} \quad e \quad C \subseteq (B)_\beta \subseteq ((A)_\alpha)_\beta = (A)_{\alpha+\beta}$$

quindi:

$$\rho(A,C) \leq \alpha + \beta = \rho(A,B) + \rho(B,C).$$

iv). Sia $\rho(A,B) = \alpha$. Allora $(conv(A))_\alpha$ é convesso e

$$B \subseteq (A)_\alpha \subseteq (conv(A))_\alpha$$

quindi $B \subseteq (conv(A))_\alpha$. In modo simile si ha che $convA \subseteq (conv(B))_\alpha$. Allora:

$$\rho(conv(A), conv(B)) \leq \alpha = \rho(A,B),$$

per la compattezza di $conv(A)$ e $conv(B)$ si veda [37], pag.57.
v). Siano A e B convessi. Gli insiemi $(A)_\theta$ e $(B)_\theta$ sono compatti [37], pag.42. Sia $\rho(A,B) = \alpha$ e $\rho((A)_\theta, (B)_\theta) = \beta$. Allora:

$$(A)_\theta \subseteq ((B)_\alpha)_\theta = ((B)_\theta)_\alpha \quad e \quad (B)_\theta \subseteq ((A)_\alpha)_\theta = ((A)_\theta)_\alpha$$

e quindi $\beta \leq \alpha$. Inoltre:

$$A + \theta U \subseteq (B + \theta U) + \beta U \quad e \quad B + \theta U \subseteq (A + \theta U) + \beta U,$$

i.e.

$$A + \theta U \subseteq (B + \beta U) + \theta U \quad e \quad B + \theta U \subseteq (A + \beta U) + \theta U,$$

quindi $A \subseteq B + \beta U$ e $B \subseteq A + \beta U$ dal Teorema 2.14. Allora $\alpha \leq \beta$, e cosí $\alpha = \beta$. ■

Dunque ρ definisce una metrica in:

$$\mathfrak{P} = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \neq \varnothing, A \text{ } compatto\}$$

ed é conosciuta come *distanza di Hausdorff*, ([8] pag.70, [37] pag.92).
La *distanza di Hausdorff* é stata introdotta sostanzialmente per poter parlare di convergenza di successioni di insiemi non vuoti e compatti in $\mathbb{R}^n$ ([37] pag.93).

Definizione 2.21. *La successione* $A_1, ..., A_j, ...$ *di insiemi non vuoti e compatti in* $\mathbb{R}^n$ converge *ad un insieme non vuoto e compatto* A *in* $\mathbb{R}^n$*:*

$$A_j \to A \qquad j \to \infty$$

se

$$\rho(A_j, A) \to 0 \qquad j \to \infty$$

Osserviamo che la successione $\{A_j\}$ non puó convergere ad un altro insieme non vuoto e compatto diverso da A, perché se cosí fosse, chiamando B l' insieme in questione, avremo:

$$0 \leq \rho(A, B) \leq \rho(A, A_j) + \rho(A_j, B) \to 0 \quad j \to \infty$$

dunque $\rho(A, B) = 0$ e quindi $A = B$.
Un' altra semplice osservazione é che se $\{A_j\}$ converge ad A e ogni A_j é convesso allora anche A é convesso.
Infatti dal Teorema 2.20 (iv) risulta:

$$\rho(A_j, conv(A)) = \rho(conv(A_j), conv(A)) \leq \rho(A_j, A) \to 0 \quad j \to \infty$$

e quindi $\{A_j\}$ converge anche a $conv(A)$.
Ma allora per quanto osservato precedentemente $A = convA$, cioé A é convesso.

D' ora in poi gli insiemi compatti e piú avanti anche i convessi giocheranno un ruolo importante, infatti ricaveremo la diseguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^n$ limitandoci ai *corpi convessi.*

Definizione 2.22. *Un* corpo convesso C *é un insieme compatto e convesso in* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $Int(C) \neq \varnothing$

Un' altra nozione importante é la seguente:

Definizione 2.23. *Una successione di insiemi in* $\mathbb{R}^n$ *é detta essere* uniformemente limitata *se esiste una palla in* $\mathbb{R}^n$ *che contiene ogni membro della successione.*

I prossimi risultati ci permetteranno di arrivare al *Principio di selezione di Blaschke* (vedi [37] pag.90, [4] pag.78) che utilizzeremo piú avanti.

Lemma 2.24. *Sia* $A_1, ..., A_j, ...$ *una successione* uniformemente limitata *di insiemi non vuoti e compatti in* $\mathbb{R}^n$*. Sia* $\varepsilon > 0$*. Allora esiste una sottosuccessione* $A_{i_1}, ..., A_{i_k}, ...$ *di* $A_1, ..., A_j, ...$ *tale che:*

$$\rho(A_{i_j}, A_{i_k}) \le \varepsilon \qquad \forall j, k = 1, 2, ...$$

Dimostrazione. Poiché esiste una palla in $\mathbb{R}^n$ che contiene tutti i membri della data successione, esiste un insieme finito E in $\mathbb{R}^n$ tale che $A_j \subseteq (E)_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ per $j = 1, 2, ...$
Ora $\forall j$ sia $E_j = E \cap (A_j)_{\frac{1}{2}\varepsilon} \subseteq (E)_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ sottoinsieme non vuoto di E.
Facilmente si verifica che $\rho(E_j, A_j) \le \frac{1}{2}\varepsilon$. Ma E é finito, dunque puó esistere solo un numero finito di differenti E_j per $j = 1, 2, ...$
Allora la successione $E_1, ..., E_j, ...$ deve contenere una sottosuccessione constante, diciamo $E_{i_1}, ..., E_{i_k}, ...$
Dunque per $j, k = 1, 2, ...$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \rho(A_{i_j}, A_{i_k}) &\le \rho(A_{i_j}, E_{i_j}) + \rho(E_{i_j}, A_{i_k}) \\ &= \rho(A_{i_j}, E_{i_j}) + \rho(E_{i_k}, A_{i_k}) \\ &\le \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Teorema 2.25. *Ogni successione* uniformemente limitata $A_1, ..., A_j, ...$ *di insiemi non vuoti e compatti in* $\mathbb{R}^n$ *contiene una sottosuccessione convergente ad un insieme non vuoto e compatto* A *in* $\mathbb{R}^n$*.*

Dimostrazione. La dimostrazione é sostanzialmente un'applicazione del lemma precedente e del metodo di diagonalizzazione di Cantor. Infatti, applicando ripetutamente il lemma precedente con $\varepsilon = 1, 1/2, ..., 1/j, ...$ possiamo costruire le seguenti sottosuccessioni:

$$A_{11}, A_{12}, ..., A_{1j}, ...$$

$$A_{21}, A_{22}, ..., A_{2j}, ...$$

$$..............................$$

$$A_{r1}, A_{r2}, ..., A_{rj}, ...$$

$$..............................$$

ognuna delle quali , dopo la prima, é sottosuccessione delle precedenti e tali che: $\rho(A_{rj}, A_{rk}) \leq 1/r$ per $j, k = 1, 2, ...$
La successione diagonale $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{jj}, \ldots$ é una sottosuccessione di $A_1, \ldots, A_j, \ldots$ con la proprietá che: $\rho(A_{jj}, A_{kk}) \leq 1/j$ quando $j \leq k$.
Rinominiamo, per comoditá, $\{A_{jj}\}$ con $\{B_j\}$ per $j = 1, 2, ...$ Per completare la dimostrazione mostreremo che la sottosuccessione $B_1, B_2, ...$ di $A_1, ..., A_j, ...$ converge ad un insieme non vuoto e compatto B definito nel modo seguente:

$$B = \bigcap \{(B_k)_{1/k} : k = 1, 2, ...)\}.$$

Sia j un intero positivo e sia $\mathbf{b}_j \in B_j$. Per $i = 1, 2, ...$ scegliamo $\mathbf{b}_{j+1} \in B_{j+1}$ tale che $\|\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j\| \leq 1/j$; questo é possibile inquanto $\rho(B_j, B_{j+1}) \leq 1/j$.
Osserviamo allora che la successione $\mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}, ...$ é nell' insieme compatto $(B_1)_1$ e quindi contiene una sottosuccessione convergente a qualche punto $\mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^n$.
Poiché $B_{j+1} \subseteq (B_k)_{1/k}$ quando $j + 1 \geq k$, la successione $\mathbf{b}_{j+1}, \mathbf{b}_{j+2}, ...$ eccetto al piú, un numero finito di termini, é nell' insieme compatto $(B_k)_{1/k}$ per $k = 1, 2, ...$, quindi $\mathbf{b} \in (B_k)_{1/k}$ e cosí $\mathbf{b} \in B$.
Ma $\mathbf{b}_j$ é un punto arbitrario di B_j e chiaramente $\|\mathbf{b} - \mathbf{b}_j\| \leq 1/j$ e cosí $B_j \subseteq B_{1/j}$.
Osservando che dalla definizione di B si ha $B \subseteq (B_j)_{1/j}$, abbiamo finalmente che: $\rho(B_j, B) \leq 1/j$ e dunque $B_j \to B$ per $j \to \infty$. $\blacksquare$

Arriviamo cosí, dato l' ultimo risultato, ad enunciare il *Principio di selezione di Blaschke.*

Teorema 2.26. (Principio di selezione di Blaschke)
Ogni successione uniformemente limitata *di insiemi non vuoti compatti e convessi di* $\mathbb{R}^n$ *contiene una sottosuccessione convergente ad insieme non vuoto compatto e convesso in* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Teorema precedente e dal fatto che una successione convergente di insiemi convessi deve convergere ad un insieme convesso. ■

2.2.2 Volumi: richiami sulla misura di Peano-Jordan

Ora ripercorreremo brevemente la costruzione della *misura secondo Peano-Jordan* (che chiameremo *volume* e denoteremo con ν) senza entrare in dettagli, per i quali si rimanda a [37] Cap. 6 e [20] Cap. V.

Per cominciare introdurremo la misura ν su una classe molto semplice di insiemi convessi e limitati in $\mathbb{R}^n$: le *n-celle.*
Chiamiamo *1-cella* un intervallo convesso e limitato in $\mathbb{R}^1$.
Possiamo generalizzare la precedente definizione nel seguente modo:

Definizione 2.27. *Una* n-cella I *in* $\mathbb{R}^n$ *e un insieme della forma:*

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \in I_1, \cdots, x_n \in I_n\}$$

dove $I_1, \cdots, I_n$ *sono* 1-celle *in* $\mathbb{R}^1$.

L' insieme vuoto e i singletons sono esempi di celle degeneri in $\mathbb{R}^n$.
Ora facendo semplici considerazioni arriveremo a definire un' altra classe di insiemi.

Siano $I,\ J$,*1-celle* in $\mathbb{R}^1$. Allora $I,\ J,\ \bar{I}, Int(I), I \cap J, I + J$, sono limitati e convessi in $\mathbb{R}^1$ come facilmente si verifica. In generale peró la differenza $I \backslash J$ non é una *1-cella*, ma é facile verificare che $I \backslash J$ puó essere espressa come unione di *1-celle* disgiunte (una delle quali puó essere l' insieme vuoto). Per esempio $[3,8) \setminus (4,5] = [3,4] \cup (5,8)$.
Siano adesso $I,\ J$ *n-celle* in $\mathbb{R}^n$ cioé:

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n, \qquad J = J_1 \times \cdots \times J_n$$

dove $I_1, \cdots, I_n, J_1 \cdots, J_n$ sono *1-celle*. Facilmente si ha che:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 \times \cdots \times \bar{I}_n, \qquad Int(I) = Int(I_1) \times \cdots \times Int(I_n)$$

Anche $I \cap J$ e $I + J$ sono *n-celle* giacché:

$$I \cap J = (I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_n \cap J_n)$$

e

$$I + J = (I_1 + J_1) \times \cdots \times (I_n + J_n)$$

Osserviamo, che $I \backslash J$ puó essere espressa come unione finita di celle a due a due disgiunte. Per $i = 1, ..., n;\quad I_i \cap J_i$ é una cella contenuta nella cella I_i, quindi poiché le celle sono semplicemente intervalli, esistono P_i, Q_i celle in $\mathbb{R}^1$ tali che relazione:

$$I_i = P_i \cup Q_i \cup (I_i \cap J_i)$$

esprime I_i come unione di tre celle a due a due disgiunte. Possiamo dunque esprimere I come segue:

$$I = (P_1 \cup Q_1 \cup (I_1 \cap J_1)) \times \cdots \times (P_n \cup Q_n \cup (I_n \cap J_n))$$

e quindi considerarlo come unione di 3^n celle a due a due disgiunte in $\mathbb{R}^n$, una delle quali é:

$$(I_1 \cap J_1) \times \cdots \times (I_n \cap J_n) = I \cap J.$$

Ma allora $I \backslash J$, che é uguale a $I \backslash (I \cap J)$, puó essere espresso come l' unione di $3^n - 1$ celle in $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunte.
Alla luce della precedente esemplificazione, introduciamo la seguente classe di insiemi, ([37] pag.255, [20] pag.247, [8] pag.70):

Definizione 2.28. *Un insieme il quale puó essere espresso come unione finita di celle a due a due disgiunte in* $\mathbb{R}^n$ *é chiamato* insieme elementare.

Per le dimostrazioni dei seguenti risultati si puó far riferimento a [37] pag.255.

Proposizione 2.29. *Siano* A *e* B *insiemi elementari in* $\mathbb{R}^n$. *Allora* $A \cap B$, $A \backslash B$, $A \cup B$, *e* $A + B$ *sono insiemi elementari.*

seguono immediatamente i seguenti corollari:

Corollario 2.30. *Ogni unione finita, e intersezione di un numero finito, di insiemi elementari in* $\mathbb{R}^n$ *é un insieme elementare.*

Corollario 2.31. *La chiusura, l' interno e la frontiera di un insieme elementare in* $\mathbb{R}^n$ *sono insiemi elementari.*

Ora porremo la nostra attenzione sulla nota definizione della misura per insiemi elementari. La *lunghezza* $\ell(I)$ di una cella I in $\mathbb{R}^1$ é definita uguale a zero quando I é un singleton, ed uguale a $b-a$ quando I é una delle seguenti $[a, b]\,, [a, b), (a, b]$, o (a, b) dove $a < b$.

Definizione 2.32. *i) Si chiama* volume *di una* n-cella $I_1 \times \cdots \times I_n$ *il numero:*

$$\nu(I_1 \times \cdots \times I_n) := \ell(I_1) \cdots \ell(I_n),$$

ii) Si chiama volume *di un insieme elementare* $E := \bigcup_{i=1}^m I_i$, I_i *n-celle a due a due disgiunte, il numero:*

$$\nu(E) := \sum_{i=1}^{m} \nu(I_i).$$

La prossima proposizione (per la dimostrazione si veda [37] pag. 259), ci assicura che la precedente definizione é ben posta.

Proposizione 2.33. *Supponiamo che* $I_1, ..., I_m$ *e* $J_1, ..., J_p$ *siano due partizioni in celle di un insieme elementare* E *in* $\mathbb{R}^n$.
Allora

$$\sum_{i=1}^{m} \nu(I_i) = \sum_{j=1}^{p} \nu(J_j).$$

Passiamo adesso ad estendere la misura *volume* ν ad una classe piú ampia di quella degli insiemi elementari: gli insiemi limitati.
Ricordiamo che lo scopo sará di determinare il *volume* per insiemi compatti e convessi, indispensabile per introdurre piú avanti i *volume misti.*

Denotiamo con $\mathcal{E}$ la classe degli insiemi elementari in $\mathbb{R}^n$. Sia A un insieme limitato in $\mathbb{R}^n$. Definiamo *volume-interno* $\nu_*(A)$ per A il numero:

$$\nu_*(A) = \sup\{\nu(E) : E \subseteq A \quad e \quad E \in \mathcal{E}\}$$

ed in modo simile definiamo *volume-esterno* $\nu^*(A)$ per A l'equazione:

$$\nu^*(A) = \inf\{\nu(E) : A \subseteq E \quad e \quad E \in \mathcal{E}\}.$$

Allora se A e B sono insiemi limitati in $\mathbb{R}^n$, si dimostra che:

$$\nu_*(A) \leq \nu^*(A) \qquad (i)$$

$$\nu_*(A) = \nu(A) = \nu^*(A) \text{ quando } A \text{ é un insieme elementare;} \qquad (ii)$$

$$\nu_*(A) \leq \nu_*(B) \text{ e } \nu^*(A) \leq \nu^*(B) \text{ quando } A \subseteq B; \qquad (iii)$$

$$\nu_*(A) = \nu_*(Int(A)) \text{ e } \nu^*(A) = \nu^*(\bar{A}); \qquad (iv)$$

Diciamo poi, che un insieme A in $\mathbb{R}^n$ *ha volume* se é limitato e $\nu_*(A) = \nu^*(A)$.
Si arriva cosí a dimostrare che un insieme A in $\mathbb{R}^n$ ha volume se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due insiemi elementari E e F in $\mathbb{R}^n$ tali che $E \subseteq A \subseteq F$ e $\nu(F \backslash E) < \varepsilon$.
Si dimostra facilmente anche, che se A é un insieme limitato in $\mathbb{R}^n$, allora ha volume se e solo se la sua frontiera $Fr(A)$ ha volume zero; i.e. $\nu(Fr(A)) = 0$.
Osserviamo che l'insieme $G = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *non* ha *volume* essendo $\nu^*(G) = 1$ e $\nu_*(G) = 0$ ed infatti $Fr(G) = [0,1]$.
Possiamo allora affermare, che la famiglia $\mathcal{V}_\nu$ degli *insiemi che hanno volume*, é un' algebra (estendendo ν ad insiemi illimitati in modo opportuno [36] pag.89); infatti se $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato:

$$E \in \mathcal{V}_\nu \Leftrightarrow \nu(Fr(E)) = 0;$$

allora, dato che:

$$Fr(E^c) = Fr(E), \quad Fr(E \cup F) \subseteq Fr(E) \cup Fr(F),$$

(con $F \in \mathcal{V}_\nu$), segue l' affermazione.
L'insieme $G = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, considerato precedentemente, mostra altresí che $\mathcal{V}_\nu$ non é una σ-algebra.
Diamo adesso alcuni risultati di non difficile dimostrazione
(vedi [37] pag.267):

1) *Ogni sottoinsieme limitato di un iperpiano in $\mathbb{R}^n$ ha volume zero.*

2) *Siano $A_1, ..., A_m$ insiemi in $\mathbb{R}^n$ che hanno volume. Allora:*

$$\nu(A_1 \cup, ..., \cup A_m) \leq \nu(A_1) + \cdots + \nu(A_m),$$

valendo l'uguaglianza quando $\nu(A_i \cap A_j) = 0, \quad per 1 \leq i < j \leq m.$

3) *Se A é un insieme in $\mathbb{R}^n$ che ha volume, e $\mathbf{a}$ un punto in $\mathbb{R}^n$ allora:*

$$\nu(A + \mathbf{a}) = \nu(A)$$

cioé ν é invariante per traslazione.

4) *Sia $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Qx} + \mathbf{q}, per\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dove $\mathbf{Q}$ é una matrice reale $n \times n, e\ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Allora, per ogni insieme $A \in \mathbb{R}^n$ che ha volume, si ha:*

$$\nu(T(A)) = |\det \mathbf{Q}| \nu(A).$$

5) *Sia A un insieme in $\mathbb{R}^n$ che ha volume. Allora:*

$$\nu(\lambda A + \mathbf{a}) = \lambda^n \nu(A), \qquad \forall \lambda \geq 0 \quad e \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

6) *Siano A, B insiemi congruenti in $\mathbb{R}^n$, con A avente volume. Allora*

$$\nu(A) = \nu(B).$$

Ricordiamo che A, B sono congruenti, se esiste una trasformazione (isometria affine) T di $\mathbb{R}^n$ tale che $T(A) = B$ e $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Qx} + \mathbf{q}, per\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dove $\mathbf{Q}$ é una matrice reale ortogonale $n \times n, e\ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

In vista delle prossime applicazioni, enunciamo il prossimo teorema concernente:
i) la "misurabilitá" degli insiemi convessi e limitati,
ii) la continuitá del *volume* rispetto alla metrica di Hausdorff,
iii) un utile risultato quando introdurremo i *volumi misti*.

Teorema 2.34. .
i) Ogni insieme convesso e limitato in $\mathbb{R}^n$ *ha* volume.

ii) Siano $A, A_1, ..., A_k, ...$ *insiemi non vuoti compatti e convessi in* $\mathbb{R}^n$*, tali che* $A_k \to A$ *per* $k \to \infty$*. Allora* $\nu(A_k) \to \nu(A)$ *per* $k \to \infty$.

iii) Sia A *una unione finita di insiemi limitati e convessi in* $\mathbb{R}^n$ *ognuno dei quali di dimensione al piú* $n-2$*. Allora:*

$$\nu((A)_\lambda)/\lambda \to 0 \qquad per\ \lambda \to 0_+$$

Dimostrazione. i) Si rimanda a [37] pag. 267.
ii) In tutta la dimostrazione per una migliore esposizione, denoteremo la distanza di Hausdorff $\rho(A_k, A)$ tra A_k e A semplicemente con ρ_k. Consideriamo prima il caso di A tale che $Int(A) \neq \varnothing$.
Poiché sia il *volume* che la distanza di Hausdorff sono invarianti per traslazione possiamo assumere che l' origine sia un punto interno di A, allora sará $rU \subseteq A$ per qualche $r > 0$. Scegliamo k grande tale che $\rho_k < r$.
Allora dalla definizione di ρ si ha:

$$A_k \subseteq A + \rho_k U \subseteq A + \frac{\rho_k}{r} A = \left(1 + \frac{\rho_k}{r}\right) A$$

e

$$\left(1 - \frac{\rho_k}{r}\right) A + \frac{\rho_k}{r} A = A \subseteq A_k + \rho_k U \subseteq A_k + \frac{\rho_k}{r} A$$

quindi dal teorema 2.14:

$$\left(1 - \frac{\rho_k}{r}\right) A \subseteq A_k.$$

Cosí

$$\left(1 - \frac{\rho_k}{r}\right) A \subseteq A_k \subseteq \left(1 + \frac{\rho_k}{r}\right) A \qquad e$$

$$\left(1 - \frac{\rho_k}{r}\right)^n \nu(A) \leq \nu(A_k) \leq \left(1 + \frac{\rho_k}{r}\right)^n \nu(A),$$

e quindi $\nu(A_k) \to \nu(A)$ per $k \to \infty$.
Supponiamo adesso $Int(A) = \varnothing$. Dunque A giace in qualche iperpiano di $\mathbb{R}^n$. Se $n = 1$ allora A é un singleton e $\nu(A_k) \leq 2\rho_k$, cosí $\nu(A_k) \to 0 = \nu(A)$ per $k \to \infty$. Supponiamo adesso che $n \geq 2$. Poiché sia il *volume* e la distanza di Hausdorff sono invarianti per trasformazioni di congruenza, possiamo assumere che per qualche $R > 0$:

$$A \subseteq \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) : |x_1|, ..., |x_{n-1}| \leq R\}.$$

Allora:

$$A_k \subseteq A + \rho_k U \subseteq \{(x_1, ..., x_n) : |x_1|, ..., |x_{n-1}| \leq R + \rho_k, |x_n| \leq \rho_k\},$$

e quindi:

$$\nu(A_k) \leq 2(2R + 2\rho_k)^{n-1}\rho_k \to 0 = \nu(A) \qquad per \quad k \to \infty.$$

iii) Consideriamo prima il caso di un insieme limitato e convesso in $\mathbb{R}^n$ di dimensione al piú $n-2$. Possiamo assumere $n \geq 3$ e che, per qualche $R > 0$:

$$A \subseteq \{(0, 0, x_3, ..., x_n) : |x_3|, ..., |x_n| \leq R\}.$$

Cosí, per $\lambda > 0$,

$$A \subseteq \{(x_1, ..., x_n) : |x_1|, |x_2| \leq \lambda; |x_3|, ..., |x_n| \leq R + \lambda\},$$

allora

$$\nu((A)_\lambda) \leq 4\lambda^2(2R + 2\lambda)^{n-2} = 2^n\lambda^2(R + \lambda)^{n-2}.$$

Quindi:

$$\nu((A)_\lambda)/\lambda \leq 2^n\lambda(R + \lambda)^{n-2} \to 0 \qquad per\ \lambda \to 0_+.$$

Consideriamo adesso il caso generale quando A é unione di insiemi limitati e convessi $A_1, ..., A_m$ in $\mathbb{R}^n$, ognuno dei quali ha dimensione al piú $n-2$. Allora

$$\nu((A)_\lambda) = \nu((A_1)_\lambda \cup \cdots \cup (A_m)_\lambda) \leq \nu(A_1)_\lambda + ... + \nu(A_m)_\lambda,$$

e finalmente

$$\nu((A)_\lambda)/\lambda \leq \nu(A_1)_\lambda/\lambda + ... + \nu(A_m)_\lambda/\lambda \to 0 \qquad per\ \lambda \to 0_+.$$

■

Per denotare la dipendenza di ν da n, é conveniente d' ora in poi scrivere ν_n per intendere appunto il *volume* in $\mathbb{R}^n$.

Concludiamo questo paragrafo con alcune utili formule:

a) Formule per insiemi congruenti

Se A é un insieme in $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$ congruente ad un insieme B in $\mathbb{R}^{n-1}$ avente *(n-1)-volume*, allora definiamo $\nu_{n-1}(A) := \nu_{n-1}(B)$ ed in generale quindi, se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é un' isometria affine e $\lambda \geq 0$:

$$\boxed{\nu_{n-1}(T(C)) = \nu_{n-1}(C) \qquad e \qquad \nu_{n-1}(\lambda C) = \lambda^{n-1}\nu_{n-1}(C)} \tag{2.17}$$

dove C é un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ per il quale $\nu_{n-1}(C)$ esiste.

b) Formula di Fubini

Se A un insieme limitato e convesso in $\mathbb{R}^n$, denotando con A_x le intersezioni di A con l' iperpiano $x_1 = x$ in $\mathbb{R}^n$ é di semplice verifica, che:

$$\nu_n(A) = \int_a^b \nu_{n-1}(A_x)\, dx.$$

dove l' integrale é di Riemann, e A_x é l' insieme vuoto se $x < a$ o $x > b$, la precedente formula si generalizza nel seguente modo: (per le dimostrazioni si puó fare riferimento a [37] pag.275)

Proposizione 2.35. *(Fubini)*
Sia A un insieme limitato e convesso in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{n}$ un vettore unitario in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, denotiamo con A_x l' intersezioni di A con l' iperpiano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = x$. Allora:

$$\boxed{\nu_n(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_{n-1}(A_x)\, dx.} \tag{2.18}$$

c) Formula per il volume di un cono

Sia A un sottoinsieme convesso non vuoto di un iperpiano $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_0$ in $\mathbb{R}^n$, dove $n_0 \in \mathbb{R}^1$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ e $\|\mathbf{n}\| = 1$. Sia poi $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tale che $n_0 < \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}$, allora definiamo il *cono* C come segue:

$$C = conv(A \cup \{\mathbf{c}\}) = \bigcup(\lambda\mathbf{c} + (1-\lambda)A : 0 \le \lambda \le 1).$$

L' iperpiano $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = x$ incontra C nell' insieme $\lambda\mathbf{c}+(1-\lambda)A$, per $n_0 \le x \le \mathbf{n}\cdot\mathbf{c}$, dove

$$\lambda = \frac{x - n_0}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} - n_0},$$

e nell' insieme vuoto per gli altri valori di x.

Poiché

$$\nu_{n-1}(\lambda\mathbf{c} + (1-\lambda)A) = \nu_{n-1}((1-\lambda)A) = (1-\lambda)^{n-1}\nu_{n-1}(A)$$

deduciamo dalla Proposizione precedente che:

$$\boxed{\nu_n(C) = \int_{n_0}^{\mathbf{n}\cdot\mathbf{c}} \left(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} - x}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} - n_0}\right)^{n-1} \nu_{n-1}(A)\, dx = \frac{1}{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{c} - n_0)\nu_{n-1}(A).}$$

d) Formula per il volume di un poliedro limitato

Definizione 2.36. *Un* poliedro *in* $\mathbb{R}^n$ *é un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$ *ottenuto come intersezione finita di semispazi chiusi. Un* poliedro limitato *é l'inviluppo convesso di un numero finito di punti in* $\mathbb{R}^n$*.*

Semplici esempi di *poliedri limitati* sono il punto, i segmenti, i poligoni convessi, i parallelepipedi, i tetraedri.

Ora, al fine di introdurre alcune formule per i poliedri limitati, conviene introdurre la nozione di *funzione supporto* di un insieme non vuoto compatto e convesso.
Sia A un insieme non vuoto compatto e convesso in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{n}$ un vettore in $\mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo.
Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^1$ denotiamo con H_α l' iperpiano definito dall' equazione:

$$H_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha\},$$

e con ${H_\alpha}^-$ il semispazio definito dall' equazione:

$${H_\alpha}^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \leq \alpha\}.$$

Chiaramente $A \subseteq {H_\alpha}^-$ se e solo se:

$$\sup\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\} \leq \alpha.$$

La *funzione supporto* h, o piú precisamente h_A, di un insieme A non vuoto compatto e convesso in $\mathbb{R}^n$ é definita come segue:

$$h(\mathbf{n}) = \sup\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\} \qquad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che considerando la palla unitaria U_0 centrata nell'origine si ha:

$$h_{U_0}(\mathbf{n}) = 1 \qquad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 2.37. *Siano* $\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_m$ *versori normali uscenti dalle facce di un poliedro limitato* P *rispettivamente* $F_1, \cdots, F_m$. *Sia inoltre* h_P *la funzione supporto di* P. *Allora*

$$\boxed{\nu_n(P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} h_P(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i) \qquad e \qquad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{n}_i\nu_{n-1}(F_i) = 0}$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che l' origine sia un punto interno a P. Per ogni $i = 1, ..., m$ denotiamo C_i l' insieme convesso $conv(\{\mathbf{0}\} \cup F_i)$. Allora $P = C_1 \cup \cdots \cup C_m$ e

$$C_i \cap C_j = conv(\{\mathbf{0}\} \cup (F_i \cap F_j)) \qquad per\ i, j = 1, ..., m$$

il quale mostra che $C_i \cap C_j$, $(i \neq j)$ é al piú $(n-1)$-dimensionale, cosí $\nu_n(C_i \cap C_j) = 0, \quad (i \neq j)$.
Dunque abbiamo:

$$\nu_n(P) = \nu_n(C_1 \cup \cdots \cup C_m) = \nu_n(C_1) + \cdots + \nu_n(C_m).$$

Dalla formula ottenuta precedentemente per il volume del *cono*, otteniamo per $i = 1, ..., m$

$$\nu_n(C_i) = \frac{1}{n}h_P(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i);$$

quindi

$$\nu_n(P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} h_P(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Denotiamo con $\mathbf{a}$ il vettore $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{n}_i\nu_{n-1}(F_i)$. Scegliamo poi, $\lambda > 0$ piccolo tale che l' origine sia punto interno del poliedro limitato $P + \lambda\mathbf{a}$. Applicando allora la formula precedentemente ottenuta si deduce quanto segue:

$$\begin{aligned}\nu_n(P) = \nu_n(P + \lambda\mathbf{a}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(h_{P+\lambda\mathbf{a}}(\mathbf{n}_i))\nu_{n-1}(F_i + \lambda\mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(h_P(\mathbf{n}_i) + \lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i) \\ &= \nu_n(P) + \frac{\lambda}{n}\|\mathbf{a}\|^2,\end{aligned}$$

il quale mostra che $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i \nu_{n-1}(F_i) = 0$.

Consideriamo adesso il caso generale quando P non contiene l' origine. Ad ogni P associamo il vettore $\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i \nu_{n-1}(F_i)$. Chiaramente questo vettore é lo stesso per tutti i traslati di P. Allora anche nel caso generale:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{n}_i \nu_{n-1}(F_i) = 0.$$

Per finire quindi, sia $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tale che il poliedro limitato $P + \mathbf{c}$ contenga l' origine. Quindi:

$$\begin{aligned}
\nu_n(P) = \nu_n(P+\mathbf{c}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (h_{P+\mathbf{c}}(\mathbf{n}_i)) \nu_{n-1}(F_i + \mathbf{c}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (h_P(\mathbf{n}_i) + \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_i) \nu_{n-1}(F_i) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} h_P(\mathbf{n}_i) \nu_{n-1}(F_i) + \frac{\mathbf{c}}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{n}_i \nu_{n-1}(F_i) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} h_P(\mathbf{n}_i) \nu_{n-1}(F_i)
\end{aligned}$$

■

e) Formula per la misura (n-1)-dimensionale della frontiera di un poliedro limitato

Teorema 2.38. *Siano $\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_m$ versori normali, uscenti dalle facce rispettivamente $F_1, \cdots, F_m$ di un poliedro limitato P in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni insieme A non vuoto compatto e convesso in $\mathbb{R}^n$, con funzione supporto h:*

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\nu_n(P + \lambda A) - \nu_n(P)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{m} h_A(\mathbf{n}_i) \nu_{n-1}(F_i).$$

Dimostrazione. La relazione posta nel Teorema, rimane invariata se si sostituisce A con un suo traslato (vedi Teorema 2.37), assumiamo dunque che A contenga l'origine.

Consideriamo ora il caso quando P é di dimensione n.
Iniziamo allora mostrando che per ogni $\lambda > 0$:

$$\nu_n(P + \lambda A) - \nu_n(P) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda h_A(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Per ogni $i = 1, ..., m$, sia $\mathbf{a}_i \in A$ tale che $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_i = h_A(\mathbf{n}_i)$, e definiamo un sottoinsieme convesso C_i di $P + \lambda A$ dall' equazione:

$$C_i = Int_R(F_i) + \lambda\{\mu \mathbf{a}_i : 0 \leq \mu \leq 1\}.$$

Osserviamo che gli insiemi $C_1, ..., C_m$ sono disgiunti. Se cosí non fosse, allora esiste un punto $\mathbf{f}_i \in Int_R(F_i)$ ed un punto $\mathbf{f}_j \in Int_R(F_j)$ tali che:

$$\mathbf{f}_i + \theta_i \mathbf{a}_i = \mathbf{f}_j + \theta_j \mathbf{a}_j,$$

dove $\theta_i, \theta_j \geq 0$.
Poiché P é n-dimensionale, $\mathbf{f}_j \notin F_i$, quindi $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{f}_j < \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{f}_i$. Segue allora, dalla definizione di $h(\mathbf{n}_i)$ che $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_j < \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_i$. Inoltre:

$$\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{f}_i + \theta_i \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{f}_j + \theta_j \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_j < \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{f}_i + \theta_j \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_i.$$

Poiché, A contiene l' origine, $h_A(\mathbf{n}_i) = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_i \geq 0$, possiamo concludere che $\theta_i < \theta_j$. Per simmetria si ha, $\theta_j < \theta_i$. Questa contraddizione mostra appunto che gli insiemi $C_1, ..., C_m$ sono disgiunti.
Per ogni $i = 1, ..., m$, $\nu_n(C_i \cap P) = 0$ e si ha che:

$$\nu_n(C_i) = \nu_n(\bar{C}_i) = |\lambda(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{a}_i)\nu_{n-1}(F_i)| = \lambda h(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Possiamo allora dedurre che:

$$\nu_n(P+\lambda A)-\nu_n(P)\geq \nu_n(C_1)+...+\nu_n(C_m)=\sum_{i=1}^{m}\lambda h_A(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Ora stimiamo dall' alto $\nu_n(P+\lambda A)-\nu_n(P)$, mostrando che per $\lambda>0$:

$$P+\lambda A\subseteq P\cup\bar{C}_1\cup...\cup\bar{C}_m\cup(S)_{\lambda s},$$

dove S é l' unione delle facce $(n-2)$-dimensionali di P e s é il diametro di A, ($s:=\sup\{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|:\mathbf{u},\mathbf{v}\in A\}$.)
Supponiamo dunque, che $\mathbf{x}$ sia un punto di $P+\lambda A$ ma non degli insiemi $P,\bar{C}_1,...,\bar{C}_m$, verifichiamo quindi che $\mathbf{x}\in(S)_{\lambda s}$. Sia $\mathbf{f}$ il punto di P piú vicino a $\mathbf{x}$. Allora $\mathbf{f}\in F_i$ per qualche $i=1,...,m$. Se $\mathbf{f}\in Fr_R(F_i)$, allora $\mathbf{f}\in S$ e $\mathbf{x}\in(S)_{\lambda s}$. Se $\mathbf{f}\in Int_R(F_i)$, $\mathbf{x}=\mathbf{f}+\alpha\mathbf{n}_i$ per qualche $\alpha>0$. Poiché $\mathbf{x}\in P+\lambda A,\quad \alpha\leq\lambda h_A(\mathbf{n}_i)$.

Sia $\mathbf{y}=\mathbf{x}-(\alpha\mathbf{a}_i)/h_A(\mathbf{n}_i)$. Dall' ipotesi che $\mathbf{x}\notin\bar{C}_i$, abbiamo che $\mathbf{y}\notin F_i$. Dunque $\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{y}=\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{f}$, e cosí $\mathbf{y}\in aff(F_i)$. Cosí, possiamo trovare un β con $0<\beta<1$, tale che il punto $\mathbf{z}=(1-\beta)\mathbf{y}+\beta\mathbf{f}$ appartenga a $Fr_R(F_i)$, e quindi $\mathbf{z}\in S$. Osserviamo che:

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|\leq(1-\beta)\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\beta\|\mathbf{x}-\mathbf{f}\|\leq(1-\beta)\lambda s+\beta\lambda s=\lambda s,$$

quindi $\mathbf{x}\in(S)_{\lambda s}$. Abbiamo ottenuto cosí, che:

$$\nu_n(P+\lambda A)\leq\nu_n(P)+\nu_n(\bar{C}_1)+...+\nu_n(\bar{C}_m)+\nu_n((S)_{\lambda s}).$$

Ricopitolando:

$$\sum_{i=1}^{m} h_A(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i) \le \frac{\nu_n(P+\lambda A)-\nu_n(P)}{\lambda}$$
$$\le \sum_{i=1}^{m} h_A(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i) + \frac{1}{\lambda}\nu_n((S)_{\lambda s}).$$

Dal Teorema 2.34, $\nu_n((S)_{\lambda s})/\lambda \to 0$ per $\lambda \to 0_+$, quindi:

$$\lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n(P+\lambda A)-\nu_n(P)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{m} h_A(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Questo completa la dimostrazione nel caso che P é n-dimensionale.
Supponiamo adesso che P abbia dimensione $n-1$. Allora $m = 2$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$, $F_1 = P$ e $F_2 = P$, dove $\mathbf{n}$ é un vettore unitario uscente dall' iperpiano contenente P. La dimostrazione segue la precedente, tenendo presente che ora $C_1 \cap C_2 = Int_R(P)$ e che ovviamente $\nu_n(Int_R(P)) = 0$. Per concludere, quando P ha dimensione minore di $n-1$ si ha facilmente che:

$$\lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n(P+\lambda A)-\nu_n(P)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n(P+\lambda A)}{\lambda} = 0,$$

visto che $P+\lambda A \subseteq (P)_{\lambda s}$ e sempre dal Teorema 2.34 iii):

$$\lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n((P)_{\lambda s})}{\lambda} = 0.$$

■

Osserviamo che se l'insieme A del precedente teorema é la palla unitaria U in $\mathbb{R}^n$, si ha per la *misura (n-1)-dimensionale della frontiera* di P (i.e. $\sum_{i=1}^{m} \nu_{n-1}(F_i)$), la seguente relazione:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} \nu_{n-1}(F_i) = \lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n((P)_\lambda)-\nu_n(P)}{\lambda}.} \tag{2.19}$$

2.2.3 Volumi misti ed area superficiale

Cercando di determinare il volume $\nu_n(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r)$, dove $A_1, ..., A_r$ sono dati insiemi compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, ..., \lambda_r$ variabili reali non negative, definiremo i *volumi misti* e quindi, con un approccio diverso da quello classico (fondato su argomenti di approssimazione), definiremo la *misura (n-1)-dimensionale della frontiera* di insiemi compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$, che per comoditá, chiameremo semplicemente *area superficiale* e la denoteremo con la lettera s (vedi [37] pag. 281).

Per rendere piú rapida la comprensione dei prossimi risultati, é importante considerare il seguente esempio. Con riferimento alle figure seguenti, calcoliamo il volume del corpo convesso $\lambda A + \mu B$, dove

$$A = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\},$$

$$B \text{ la palla chiusa unitaria in } \mathbb{R}^3, \quad e\ \lambda, \mu > 0$$

Facilmente si arriva alla formula:

$$\nu_3(\lambda A + \mu B) = (abc)\lambda^3 + 2(ab + bc + ca)\lambda^2\mu + \pi(a + b + c)\lambda\mu^2 + \frac{4\pi}{3}\mu^3$$

Osserviamo subito, che $\nu_3(\lambda A + \mu B)$ é un polinomio omogeneo di grado tre in λ e μ con coefficienti non negativi. In effetti quanto appena osservato non é che un caso di un risultato piú generale che ci limitiamo solo ad enunciare, (per la dimostrazione si veda [37] pag.284).

Teorema 2.39. *Siano $A_1, ..., A_r$ insiemi compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$. Allora $\nu_n(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r)$ é, $\forall \lambda_1, ..., \lambda_r \geq 0$ un polinomio omogeneo di grado n in $\lambda_1, ..., \lambda_r$ con coefficienti non negativi.*

Ricordiamo adesso che un polinomio omogeneo $p(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ puó essere rappresentato in modo unico nel seguente modo:

$$p(\lambda_1, ..., \lambda_r) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} a_{\alpha_1, ..., \alpha_r} {\lambda_1}^{\alpha_1} \cdots {\lambda_r}^{\alpha_r}.$$

dove $a_{\alpha_1,...,\alpha_r} \geq 0$.
Per gli interi $i_1, ..., i_n$ a valori in $\{1, ..., r\}$, poniamo

$$\nu(A_{i_1}, ..., A_{i_n}) := a_{\alpha_1,...,\alpha_r} \qquad e \qquad \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} := \lambda_1{}^{\alpha_1} \cdots \lambda_r{}^{\alpha_r}$$

allora i numeri $\nu(A_{i_1}, ..., A_{i_n})$ rimangono invariati quando $i_1, ..., i_n$ sono permutati ed il teorema precedente puó essere cosí precisato:

Teorema 2.40. *Siano $A_1, ..., A_r$ insiemi compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $\lambda_1, ..., \lambda_r \geq 0$,*

$$\nu_n(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r) = \sum_{i_1=1}^{r} \cdots \sum_{i_n=1}^{r} \nu(A_{i_1}, ..., A_{i_n})\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}.$$

I numeri $\nu(A_{i_1}, ..., A_{i_n})$ sono chiamati *volumi misti* di $A_{i_1}, ..., A_{i_n}$ e per approfondimenti si puó fare riferimento a [8] Cap. 4.

Tornando allora al precedente esempio avremo, essendo:

$$\nu_3(\lambda A + \mu B) = (abc)\lambda^3 + 2(ab + bc + ca)\lambda^2\mu + \pi(a + b + c)\lambda\mu^2 + \frac{4\pi}{3}\mu^3$$

i seguenti valori per i volumi misti di A e B:

$$\nu(A, A, A) = abc; \quad \nu(B, B, B) = \frac{4\pi}{3},$$
$$\nu(A, A, B) = \nu(A, B, A) = \nu(B, A, A) = \frac{2}{3}(ab + bc + ca),$$
$$\nu(A, B, B) = \nu(B, B, A) = \nu(B, A, B) = \frac{1}{3}(a + b + c)\pi.$$

La prossima Proposizione insieme con le osservazioni poste al termine del precedente paragrafo (formula (2.19)), prepareranno gli strumenti necessari per definire la *misura (n-1)-dimensionale della frontiera* di un insieme compatto e convesso in funzione di un preciso *volume misto*.

Proposizione 2.41. *Siano $\mathbf{n}_1, \cdots, \mathbf{n}_m$ versori normali, uscenti dalle facce rispettivamente $F_1, \cdots, F_m$ di un poliedro limitato P in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni insieme A non vuoto compatto e convesso in $\mathbb{R}^n$, con funzione supporto h_A:*

$$\nu(A, \underbrace{P, ..., P}_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} h_A(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$,

$$\nu_n(P+\lambda A) = \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \nu(\underbrace{A,...,A}_{i}, \underbrace{P,...,P}_{n-i})\lambda^i,$$

e cosí:

$$\nu_n(P+\lambda A) - \nu_n(P) = n\nu(A, \underbrace{P,...,P}_{n-1})\lambda + \sum_{i=2}^{m} \binom{n}{i} \nu(\underbrace{A,...,A}_{i}, \underbrace{P,...,P}_{n-i})\lambda^i.$$

Quindi:

$$\lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\nu_n(P+\lambda A) - \nu_n(P)}{\lambda} = n\nu(A, \underbrace{P,...,P}_{n-1}),$$

e dal Teorema 2.38 segue la tesi. ■

Ora, dalla formula (2.19) e dalla precedente Proposizione (ponendo per A la palla chiusa unitaria U in $\mathbb{R}^n$) si ha che:

$$n\nu(U, \underbrace{P,...,P}_{n-1}) = \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\nu_n((P)_\lambda) - \nu_n(P)}{\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \nu_{n-1}(F_i),$$

e valendo le seguenti uguaglianze per un insieme compatto e convesso A in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \nu_n((A)_\lambda) &= \nu_n(A+\lambda U) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \binom{n}{i} \nu(\underbrace{U,...,U}_{i}, \underbrace{A,...,A}_{n-i})\lambda^i \qquad (2.20) \\ &= \nu_n(A) + n\nu(U, \underbrace{A,...,A}_{n-1})\lambda + \cdots + n\nu(\underbrace{U,...,U}_{n-1}, A)\lambda^{n-1} + \nu_n(U)\lambda^n \end{aligned}$$

definiamo la *misura (n-1)-dimensionale della frontiera* $s(A)$ di un insieme A compatto e convesso in $\mathbb{R}^n$ come:

$$s(A) := \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\nu_n((A)_\lambda) - \nu_n(A)}{\lambda}.$$

Osserviamo che la (2.20) ci assicura che la precedente definizione é una buona definizione ed inoltre che:

$$s(A) = n\nu(U, \underbrace{A,...,A}_{n-1}).$$

Per comoditá, d' ora in poi, $s(A)$ verrá chiamata semplicemente: *area superficiale* di A, per approfondimenti si puó fare riferimento a [8] pag. 139.
Da una semplice applicazione della precedente definizione, si ottiene ad esempio l' utile risultato:

$$s(U) = \lim_{\lambda \to 0_+} \frac{\omega_n (1+\lambda)^n - \omega_n}{\lambda} = n\omega_n$$

dove U é la palla chiusa unitaria in $\mathbb{R}^n$, $\nu_n(U) = \omega_n$ e chiaramente $\nu_n((U)_\lambda) = (1+\lambda)^n \omega_n$.

Poiché quindi, abbiamo definito *l'area superficiale* come multiplo di un *volume misto*, segue immediatamente che se A e B sono insiemi compatti e convessi in $\mathbb{R}^n$ tali che $A \subseteq B$ allora $s(A) \leq s(B)$ ed inoltre $s(A_i) \to s(A)$ per $n \to \infty$, data la successione $A_1, ..., A_i, ...$ di insiemi non vuoti compatti e convessi convergente all' insieme non vuoto compatto e convesso A in $\mathbb{R}^n$, ([37] pag. 295).

2.2.4 Diseguaglianza di Brunn e diseguaglianza isoperimetrica.

La diseguaglianza isoperimetrica per corpi convessi, rappresenterá dunque una relazione tra il *volume* e *l' area superficiale*, e verrá dimostrata di seguito, utilizzando sostanzialmente un' altra diseguaglianza (di Brunn), che ci apprestiamo tra breve a presentare. Le dimostrazioni che seguono, sono dovute ai lavori di H. Hadwiger e D. Ohmann (Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie, *Mathematische Zeitschrift*, **66**, pp.1-8,1956), e seguiranno la sintesi sviluppata in [37] Cap. 6, ricordando comunque che una loro formulazione piú generale si trova in un articolo di L.A.Lyusternik (Die Brunn-Minkoskische Ungleichung fr beliege messbare Mengen, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences URSS*, **8**, pp. 55-8, 1935).

Lemma 2.42. *Sia A un insieme in $\mathbb{R}^n$ che ha volume. Sia $\theta \geq 0$. Allora, per $i = 1, ..., n$, esiste uno scalare λ_i tale che:*

$$\nu_n(\{(x_1, ..., x_n) \in A : x_i < \lambda_i\}) = \theta \nu_n(\{(x_1, ..., x_n) \in A : x_i > \lambda_i\}).$$

Dimostrazione. Poiché A é limitato, esiste $a > 0$ tale che:

$$A \subseteq \{(x_1, ..., x_n) : -a \leq x_i \leq a \quad per \quad i = 1, ..., n\}.$$

Definiamo una funzione $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$f_i(x) = \nu_n(\{(x_1, ..., x_n) \in A : x_i < x\}), \qquad per \quad x \in \mathbb{R}.$$

Allora, per $x < y$:

$$0 \leq f_i(y) - f_i(x) = \nu_n(\{(x_1, ..., x_n) \in A : x \leq x_i < y\}) \leq 2^{n-1}a^{n-1}(y - x).$$

Questo mostra che f_i é continua. Osserviamo infine, che $f_i(-a) = 0$, $f_i(a) = \nu_n(A)$, e cosí per qualche $\lambda_i \in [-a, a]$, $f_i(\lambda_i) = \theta\nu_n(A)/(1+\theta)$; segue dunque, facilmente la tesi. ■

Nel prossimo lemma, con il termine *celle non degeneri*, intendiamo celle con interno non vuoto.

Lemma 2.43. *Sia $A = I_1 \cup \cdots \cup I_m$, $\quad B = J_1 \cup \cdots \cup J_p$, dove $I_1, ..., I_m$ e $J_1, ..., J_p$ sono una successione disgiunta di celle non degeneri in $\mathbb{R}^n$. Allora:*

$${\nu_n}^{1/n}(A + B) \geq {\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(B).$$

Dimostrazione. Procederemo per induzione su $m + p$. Supponiamo che $m + p = 2$, cosí che $m = 1, p = 1$. Sia $A = S_1 \times \cdots \times S_n, B = T_1 \times \cdots \times T_n$, dove $S_1, ..., S_n, T_1, ..., T_n$ sono celle in $\mathbb{R}^1$ con lunghezza positiva rispettivamente $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$. Abbiamo allora (vedi [37] pag.202):

$$\begin{aligned}{\nu_n}^{1/n}(A + B) &= ((a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n))^{1/n} \\ &\geq (a_1 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 \cdots b_n)^{1/n} = {\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(B).\end{aligned}$$

Il caso $m + p = 2$ é quindi provato.
Supponiamo ora, che $m + p > 2$ é che l' asserto sia vero tutti i valori della variabile induttiva minori di $m+p$. Assumiamo $m \geq 2$. Poiché le celle I_1 e I_2 sono disgiunte, esiste un $i \in \{1, ..., n\}$ ed uno scalare μ tale che I_1 é contenuto nel semispazio chiuso $x_i \leq \mu$ e I_2 nel semispazio chiuso $x_i \geq \mu$. Denotiamo con A^- e con A^+ l' intersezione di A con i semispazi aperti rispettivamente

$x_i < \mu$ e $x_i > \mu$. Sia A^- che A^+ é l' unione disgiunta di meno che m celle non degeneri. Inoltre A é l'unione disgiunta di A^-,A^+ e di un insieme di volume zero, e quindi $\nu_n(A) = \nu_n(A^-) + \nu_n(A^+)$. Il precedente lemma afferma che esiste uno scalare λ tale che l' iperpiano $x_i = \lambda$ divide B negli insiemi disgiunti B^-,B^+ ed un insieme di volume zero tali che:

$$\frac{\nu_n(B^-)}{\nu_n(A^-)} = \frac{\nu_n(B^+)}{\nu_n(A^+)} = \alpha \ (= const.)$$

Sia B^- che B^+ é l' unione disgiunta di p o meno celle non degeneri, e $\nu_n(B) = \nu_n(B^-) + \nu_n(B^+)$.
Gli insiemi $A^- + B^-$ e $A^+ + B^+$ sono contenuti in opposti semispazi aperti, limitati dall' iperpiano $x_i = \lambda + \mu$, sono cosí disgiunti e la loro unione é un sottoinsieme di $A + B$. Applicando l' ipotesi induttiva alle coppie (A^-, B^-) e (A^+, B^+), si ha che:

$$\begin{aligned}
\nu_n(A+B) &\geq \nu_n(A^- + B^-) + \nu_n(A^+ + B^+)\\
&\geq [{\nu_n}^{1/n}(A^-) + {\nu_n}^{1/n}(B^-)]^n + [{\nu_n}^{1/n}(A^+) + {\nu_n}^{1/n}(B^+)]^n\\
&= [\nu_n(A^-) + \nu_n(A^+)](1+\alpha^{1/n})^n\\
&= \nu_n(A)(1+\alpha^{1/n})^n\\
&= [{\nu_n}^{1/n}(A) + \alpha^{1/n}{\nu_n}^{1/n}(A)]^n\\
&= [{\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(B)]^n.
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione per induzione. ■

Teorema 2.44. (Diseguaglianza di Brunn)
Siano $A, B, A+B$ insiemi non vuoti in $\mathbb{R}^n$ che hanno volume. Allora:

$${\nu_n}^{1/n}(A+B) \geq {\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(B).$$

Dimostrazione. La diseguaglianza é banale se A, B hanno volume zero. Assumiamo quindi, che $\nu_n(A) > 0$ e $\nu_n(B) > 0$. Ci sono successioni di insiemi elementari non vuoti $A_1, ..., A_i, ...$ e $B_1, ..., B_i, ...$ in $\mathbb{R}^n$ tali che $A_i \subseteq A$, $B_i \subseteq B$ per $i = 1, 2, ...$, e $\nu_n(A_i) \to \nu_n(A)$, $\nu_n(B_i) \to \nu_n(B)$ per $i \to \infty$, ed inoltre possiamo supporre che gli insiemi A_i, e B_i siano unione finita e

disgiunta di celle non degeneri.
Dal precedente lemma si ha:

$$\nu_n{}^{1/n}(A+B) \geq \nu_n{}^{1/n}(A_i+B_i) \geq \nu_n{}^{1/n}(A_i) + \nu_n{}^{1/n}(B_i).$$

Mandando $i \to \infty$ abbiamo quindi:

$$\nu_n{}^{1/n}(A+B) \geq \nu_n{}^{1/n}(A) + \nu_n{}^{1/n}(B).$$

■

Corollario 2.45. *Siano A, B insiemi non vuoti convessi e limitati in $\mathbb{R}^n$. Allora la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita dall' equazione:*

$$f(t) = \nu_n{}^{1/n}((1-t)A + tB) \qquad per \quad 0 \leq t \leq 1$$

é concava.

Dimostrazione. Siano $x, y \in [0,1]$. Siano $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda+\mu = 1$. Applichiamo il teorema agli insiemi $\lambda((1-x)A+xB)$ e $\mu((1-y)A+yB)$ per dedurre che:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \nu_n{}^{1/n}[(1-(\lambda x+\mu y))A + (\lambda x + \mu y)B] \\ &= \nu_n{}^{1/n}[\lambda((1-x)A+xB) + \mu((1-y)A+yB)] \\ &\geq \lambda\nu_n{}^{1/n}((1-x)A+xB) + \mu\nu_n{}^{1/n}((1-y)A+yB) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y). \end{aligned}$$

Quindi la funzione é concava. ■

Teorema 2.46. (Diseguaglianza di Minkowski per volumi misti)
Siano A e B corpi convessi in $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$\nu(\underbrace{A, ..., A}_{n-1}, B) \geq \nu_n{}^{(n-1)/n}(A)\nu_n{}^{1/n}(B),$$

l' uguaglianza si verifica se e solo se:

$$\nu_n{}^{1/n}(A+B) = \nu_n{}^{1/n}(A) + \nu_n{}^{1/n}(B).$$

Dimostrazione. Definiamo una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$f(t) = {\nu_n}^{1/n}((1-t)A + tB) \qquad per \quad 0 \leq t \leq 1$$

Allora:

$$f(t)^n = \nu_n(A)(1-t)^n + n\nu(\underbrace{A, ..., A}_{n-1}, B)(1-t)^{n-1}t + \cdots + \nu_n(B)t^n,$$

e quindi:

$$f'(0) = \frac{\nu(\overbrace{A, ..., A}^{n-1}, B) - \nu_n(A)}{{\nu_n}^{(n-1)/n}(A)}.$$

Per il precedente corollario, f é concava, cosí possiamo affermare che $f'(0) \geq f(1) - f(0)$,[37] pag.195, e quindi otteniamo immediatamente la diseguaglianza. Osserviamo inoltre che l' uguaglianza nella diseguaglianza di Minkowski si ha se e solo se $f'(0) = f(1) - f(0)$.
Dimostriamo adesso che $f'(0) = f(1) - f(0)$ se e solo se $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$. Supponiamo prima che $f'(0) = f(1) - f(0)$. Allora la funzione $(f(x) - f(0))/x$ deve essere constantemente uguale a $f(1) - f(0)$ per $0 < x \leq 1$, e quindi ponendo $x = \frac{1}{2}$ otteniamo $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$. Supponiamo adesso $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$. Allora:

$$\frac{f(1) - f(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{f(0) - f(\frac{1}{2})}{0 - \frac{1}{2}} = f(1) - f(0),$$

allora $(f(x) - f(\frac{1}{2}))/(x - \frac{1}{2})$ deve essere constantemente uguale a $f(1) - f(0)$ per $x \in [0,1] \backslash \{\frac{1}{2}\}$, quindi $f'(0) = f(1) - f(0)$.
Completiamo la dimostrazione osservando che $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$ se e solo se :

$${\nu_n}^{1/n}(A + B) = {\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(B).$$

■

Nel prossimo Lemma ed in seguito, con il termine *n-simplesso* indicheremo il piú semplice esempio di poliedro limitato di dimensione n. Definiremo cioé *r-simplesso*, $(r = -1, 0, ..., n)$ come l' inviluppo convesso di $r + 1$ punti linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$.

Esempi di *r-simplessi* sono i seguenti: l'insieme vuoto ($-$*1-simplesso*), un punto (*0-simplesso*), un segmento (*1-simplesso*), un triangolo (*2-simplesso*), un tetraedro (*3-simplesso*),([18] pag. 94).

Lemma 2.47. *i) Sia S un n-simplesso e sia T un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $\nu_n(S) = \nu_n(T)$ e che:*

$$\nu(\underbrace{S, ..., S}_{n-1}, T) = {\nu_n}^{(n-1)/n}(S){\nu_n}^{1/n}(T).$$

Allora T é il traslato di S.
ii) Siano A, B corpi convessi in $\mathbb{R}^n$ tali che per ogni n-simplesso contenuto in uno di essi, ne esiste uno traslato contenuto nell' altro. Allora B é un traslato di A.

Dimostrazione. i) Siano $F_0, ..., F_n$ le facce di S e $\mathbf{n}_0, \cdots, \mathbf{n}_n$ i corrispondenti versori normali uscenti. Sia h_T la funzione supporto di T. Sia inoltre C il simplesso omotetico ad S che circoscrive T, i.e. $T \subseteq C$ e T incontra ogni faccia di C. Supponiamo che $C = \lambda S + \mathbf{a}$ per qualche $\lambda > 0$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.
La Proposizione 2.41 mostra che:

$${\nu_n}^{(n-1)/n}(S){\nu_n}^{1/n}(T) = \nu(\underbrace{S, ..., S}_{n-1}, T) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} h_T(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i).$$

Inoltre:

$$\lambda^n \nu_n(S) = \nu_n(C) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} h_C(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(\lambda F_i + \mathbf{a}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \lambda^{n-1} h_T(\mathbf{n}_i)\nu_{n-1}(F_i),$$

dove h_C é la funzione supporto di C. Allora:

$${\nu_n}^{n-1/n}(S){\nu_n}^{1/n}(T) = \lambda\nu_n(S), \quad \text{cioé} \quad \nu_n(T) = \lambda^n\nu_n(S) = \nu_n(C).$$

Ma $T \subseteq C$, e cosí $T = C$. Poiché $\nu_n(S) = \nu_n(T)$, λ deve essere uguale a 1 e T é il traslato $S + \mathbf{a}$ di S.
ii) Chiaramente A e B devono avere lo stesso *diametro*, diciamo s, (per definizione il *diametro* di un insieme A non vuoto e limitato é uguale al $\sup\{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A\}$).

Siano $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A$ tali che $\|\mathbf{a}-\mathbf{a}'\| = s$. Allora esiste $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{a}+\mathbf{x}, \mathbf{a}'+\mathbf{x} \in B$. Sia $\mathbf{c} \in A$, allora $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{c}$ appartengono ad un qualche n-simplesso di A, quindi esiste un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{a}+\mathbf{y}, \mathbf{a}'+\mathbf{y}, \mathbf{c}+\mathbf{y} \in B$.
Adesso:

$$\begin{aligned} 2\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 + 2s^2 &= 2\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{a}-\mathbf{a}'\|^2 \\ &= \|\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{a}-\mathbf{a}'\|^2 + \|\mathbf{y}-\mathbf{x}-\mathbf{a}+\mathbf{a}'\|^2 \\ &= \|(\mathbf{a}+\mathbf{y})-(\mathbf{a}'+\mathbf{x})\|^2 + \|(\mathbf{a}'+\mathbf{y})-(\mathbf{a}+\mathbf{x})\|^2 \\ &\leq 2s^2, \end{aligned}$$

poiché B ha diametro s. Questo mostra che $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Quindi $\mathbf{c}+\mathbf{x} \in B$ per ogni $\mathbf{c}$ in A, e cosí $A+\mathbf{x} \subseteq B$. In modo simile si arriva a $B-\mathbf{x} \subseteq A$. Dunque B é il traslato $A+\mathbf{x}$ di A. ■

Teorema 2.48. (di Brunn-Minkowski)
Siano A, B corpi convessi in $\mathbb{R}^n$. Allora

$${\nu_n}^{1/n}(A+B) \geq {\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(B).$$

e l' eguaglianza si verifica se e solo se A e B sono omoteteici, i.e. se e solo se esiste $\lambda > 0$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che $B = \lambda A + \mathbf{a}$.

Dimostrazione. La diseguaglianza segue chiaramente dal Teorema 2.44. Dimostriamo quindi l' asserto, solo per quanto riguarda l' uguaglianza.
Se A e B sono omoteteici, diciamo $B = \mu A + \mathbf{a}$, dove $\mu > 0$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, allora l' asserto é verificato, in quanto ciascun membro della diseguaglianza del Teorema é uguale a $(1+\mu){\nu_n}^{1/n}(A)$.
Supponiamo adesso, che A e B verificano il nostro Teorema. Scegliamo $\lambda > 0$ tale che λB e A hanno lo stesso volume. Il secondo asserto del Teorema 2.46 + la linearitá dei volumi misti (vedi [37] pag.289), mostrano che $A, \lambda B$ verificano l' eguaglianza, nella diseguaglianza di Brunn (Teorema 2.44), i.e.

$${\nu_n}^{1/n}(A+\lambda B) = {\nu_n}^{1/n}(A) + {\nu_n}^{1/n}(\lambda B).$$

Sia un S un n-simplessso contenuto in A. Allora $S = J_0 \cap \cdots \cap J_n$ per qualche semispazi chiusi $J_0, ..., J_n$ in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con K_0 il traslato di J_0 che rende

uguali i volumi di $A \cap J_0$ e $(\lambda B) \cap K_0$.
Vogliamo mostrare che gli insiemi $A \cap J_0$ e $(\lambda B) \cap K_0$ verificano l' eguaglianza nella diseguaglianza di Brunn. Infatti, consideriamo gli insiemi
$A^- = A \cap J_0, A^+ = A \backslash A^-, B^- = (\lambda B) \cap K_0, B^+ = (\lambda B) \backslash B^-$. Supponiamo che A^-, B^- non verificano l' uguaglianza nella diseguaglianza di Brunn, allora:

$$\nu_n{}^{1/n}(A^- + B^-) > \nu_n{}^{1/n}(A^-) + \nu_n{}^{1/n}(B^-).$$

Gli insiemi $A^- + B^-$, $A^+ + B^+$ sono disgiunti e sono contenuti in $A + \lambda B$, quindi dalla diseguaglianza di Brunn e dalle eguaglianze $\nu_n(A^-) = \nu_n(B^-), \nu_n(A^+) = \nu_n(B^+)$, si ha:

$$\begin{aligned}
\nu_n{}^{1/n}(A + \lambda B) &\geq [\nu_n(A^- + B^-) + \nu_n(A^+ + B^+)]^{1/n} \\
&> \{[\nu_n{}^{1/n}(A^-) + \nu_n{}^{1/n}(B^-)]^n + [\nu_n{}^{1/n}(A^+) + \nu_n{}^{1/n}(B^+)]^n\}^{1/n} \\
&= \nu_n{}^{1/n}(A) + \nu_n{}^{1/n}(\lambda B).
\end{aligned}$$

Questo contraddice la nostra assunzione che $A, \lambda B$ diano l' eguaglianza nella diseguaglianza di Brunn. Allora i corpi convessi $A \cap J_0$ e $(\lambda B) \cap K_0$ verificano l' eguaglianza nella diseguaglianza di Brunn. Ripetiamo cosí, l' argomento appena svolto n piú volte, per ottenere l' esistenza di n semispazi chiusi $K_1, ..., K_n$ in $\mathbb{R}^n$ tali che i corpi convessi:

$$S = A \cap J_0 \cap \cdots \cap J_n, \qquad T = (\lambda B) \cap K_0 \cap \cdots \cap K_n$$

hanno lo stesso volume e verificano l' eguaglianza nella diseguaglianza di Brunn. Ora, dal secondo asserto del Teorema 2.46 e dalla prima parte del Lemma 2.47, segue che T deve essere il traslato di S. Per simmetria inoltre, per ogni n-simplesso contenuto in A o λB ne esiste un altro contenuto nell' altro. Allora dalla seconda parte del Lemma 2.47 si ha che A é il traslato di B e quindi A e B sono omotetici. ■

Teorema 2.49. *Siano A, B corpi convessi in $\mathbb{R}^n$. Allora:*

$$\nu(\underbrace{A, ..., A}_{n-1}, B) \geq \nu_n{}^{(n-1)/n}(A)\nu_n{}^{1/n}(B),$$

e l' eguaglianza si verifica se e solo se A e B sono omotetici.

Dimostrazione. Segue immediatamente dai Teoremi 2.46 e 2.48. ■

Arriviamo finalmente alla *diseguaglianza isoperimetrica* per corpi convessi.

Teorema 2.50. (Teorema Isoperimetrico)
Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$\boxed{s^n(A) \geq \omega_n n^n {\nu_n}^{n-1}(A)} \tag{2.21}$$

e l' eguaglianza si verifica se solo se A é una palla chiusa, (ω_n é il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$).

Dimostrazione. Sia B la palla chiusa unitaria U, ed applichiamo il Teorema 2.49. Allora otteniamo:

$$s(A) = n\nu(\underbrace{A, ..., A}_{n-1}, U) \geq n{\nu_n}^{(n-1)/n}(A){\nu_n}^{1/n}(U) = n{\nu_n}^{(n-1)/n}(A){\omega_n}^{1/n},$$

e quindi:

$$s^n(A) \geq \omega_n n^n {\nu_n}^{n-1}(A),$$

e l' eguaglianza si verifica se solo se A é omotetico a U, i.e. se e solo se A é una palla chiusa. ■

2.2.5 Simmetrizzazione di Steiner ed applicazioni.

Alla luce dei risultati fino ad ora ottenuti, in questo paragrafo riproporremo (vedi pag.20 della presente tesi) la costruzione geometrica (*simmetrizzazione*) inventata dal matematico svizzero Jakob Steiner (1796-1863), che oltre ad avere un'importanza storica risulterá utile per dimostrare *alla Steiner* la (2.21), in modo rigoroso,([37] Cap. 6).
Sia A un insieme non vuoto compatto e convesso e π un iperpiano in $\mathbb{R}^n$. La

simmetrizzazione di Steiner dato A e π, produce un insieme convesso in $\mathbb{R}^n$, che denoteremo con A_π.
L'idea di tale costruzione puó essere la seguente: per ogni punto $\mathbf{a} \in A$, denotiamo con $r_\mathbf{a}$ la retta attraverso $\mathbf{a}$ perpendicolare all' iperpiano π; si trasli successivamente la corda $A \cap r_\mathbf{a}$ di A lungo $r_\mathbf{a}$ fino a che il suo punto medio appartenga a π, allora l' unione di tutte queste corde traslate é appunto A_π.
Questa costruzione é rappresentata nella seguente figura:

Prima di dare una descrizione formale di A_π, considereremo una funzione concava che denoteremo γ definita sulla proiezione $p_\pi(A)$ di A su π. Sostanzialmente γ misurerá la lunghezza delle corde di A perpendicolari a π.
Sia $\mathbf{n}$ il versore normale a π. Allora la proiezione $p_\pi(A)$ di A su π é il sottoinsieme di π definito dall' equazione:

$$p_\pi(A) = \{\mathbf{p} \in \pi : \mathbf{p} + \theta\mathbf{n} \in A, \quad \text{per qualche } \theta \in \mathbb{R}\}$$

Mostriamo che $p_\pi(A)$ é convesso. Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in p_\pi(A)$ e siano $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Allora esistono $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{p} + \theta\mathbf{n}, \mathbf{q} + \phi\mathbf{n} \in A$. Poiché A é convesso,

$$\lambda(\mathbf{p} + \theta\mathbf{n}) + \mu(\mathbf{q} + \phi\mathbf{n}) = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} + (\lambda\theta + \mu\phi)\mathbf{n} \in A.$$

Quindi $\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} \in p_\pi(A)$ e cosí $p_\pi(A)$ é convesso. Per ogni $\mathbf{p} \in p_\pi(A)$, ora dentiamo con $I_\mathbf{p}$ l' intervallo non vuoto e compatto di $\mathbb{R}$ cosi definito:

$$I_\mathbf{p} = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathbf{p} + \theta\mathbf{n} \in A\}.$$

Definiamo le funzioni $\alpha, \beta, \gamma : p_\pi(A) \to \mathbb{R}$ come segue:

$$\alpha(\mathbf{p}) = \min I_\mathbf{p}, \quad \beta(\mathbf{p}) = \max I_\mathbf{p}, \quad \gamma(\mathbf{p}) = \beta(\mathbf{p}) - \alpha(\mathbf{p}), \qquad \mathit{per} \quad \mathbf{p} \in A.$$

Nel resto del paragrafo, $A, \pi, \mathbf{n}, \alpha, \beta, \gamma$ rappresenteranno le stesse entitá e funzioni appena definite.

Teorema 2.51. *La funzione $\gamma : p_\pi(A) \to \mathbb{R}$ é concava.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in p_\pi(A)$ e siano $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Allora $\mathbf{p} + \alpha(\mathbf{p})\mathbf{n}, \mathbf{q} + \alpha(\mathbf{q})\mathbf{n} \in A$. La convessitá di A mostra:

$$\lambda(\mathbf{p} + \alpha(\mathbf{p})\mathbf{n}) + \mu(\mathbf{q} + \alpha(\mathbf{q})\mathbf{n}) = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q} + (\lambda\alpha(\mathbf{p}) + \mu\alpha(\mathbf{q}))\mathbf{n} \in A,$$

quindi:

$$\alpha(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) \leq \lambda\alpha(\mathbf{p}) + \mu\alpha(\mathbf{q}).$$

In modo simile inoltre:

$$\beta(\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}) \geq \lambda\beta(\mathbf{p}) + \mu\beta(\mathbf{q}).$$

Allora:

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}) &= \beta(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q})-\alpha(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q})\\ &\geq \lambda(\beta(\mathbf{p})-\alpha(\mathbf{p}))+\mu(\beta(\mathbf{p})-\alpha(\mathbf{p}))\\ &= \lambda\gamma(\mathbf{p})+\mu\gamma(\mathbf{q}),\end{aligned}$$

mostrando appunto che γ é concava. ■

Possiamo finalmente definire in modo formale, la *simmetrizzazione* A_π di A dato π, nel seguente modo:

$$A_\pi = \{\mathbf{p}+\theta\mathbf{n} : \mathbf{p}\in p_\pi(A) \quad e \quad |\theta| \leq \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{p})\}.$$

Dalla definizione possiamo dedurre i seguenti risultati:

$$A_\pi \text{ é simmetrico rispetto a } \pi; \tag{i}$$

$$\text{se } B \text{ é una palla chiusa con centro su } \pi, \text{ allora } B_\pi = B; \tag{ii}$$

$$\text{se } C \text{ é insieme compatto tale che } A\subseteq C, \text{ allora } A_\pi \subseteq C_\pi. \tag{iii}$$

Teorema 2.52. *Sia A un insieme non vuoto compatto e convesso e π un' iperpiano in $\mathbb{R}^n$. Allora A_π é un insieme non vuoto compatto e convesso, ed un corpo convesso se lo é anche A.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{a},\mathbf{b}\in A_\pi$. Allora esistono $\mathbf{p},\mathbf{q}\in p_\pi(A)$ e scalari θ,ϕ tali che $\mathbf{a}=\mathbf{p}+\theta\mathbf{n}$, $\mathbf{b}=\mathbf{q}+\phi\mathbf{n}$ dove $|\theta|\leq\frac{1}{2}\gamma(\mathbf{p})$, $|\phi|\leq\frac{1}{2}\gamma(\mathbf{q})$. Sia $\lambda,\mu\geq 0$ con $\lambda+\mu=1$. Allora:

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}+(\lambda\theta+\mu\phi)\mathbf{n}.$$

Dalla concavitá di γ si ha:

$$|\lambda\theta+\mu\phi|\leq\lambda|\theta|+\mu|\phi|\leq\frac{1}{2}\lambda\gamma(\mathbf{p})+\frac{1}{2}\mu\gamma(\mathbf{q})\leq\frac{1}{2}\gamma(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}).$$

Allora $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}\in A_\pi$, e quindi A_π é convesso.
Mostriamo ora che A_π é chiuso. Sia $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k,\dots$ una successione di punti di A_π, convergente ad un punto $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. Per ogni $k=1,2,\dots$ esistono $\mathbf{p}_k\in p_\pi(A)$, $\theta_k\in\mathbb{R}$ tali che:

$$\mathbf{x}_k=\mathbf{p}_k+\theta_k\mathbf{n} \quad e \quad |\theta_k|\leq\frac{1}{2}\gamma(\mathbf{p}_k).$$

Osserviamo che $\mathbf{x}$ puó essere scritto nella forma $\mathbf{p} + \theta\mathbf{n}$, dove $\mathbf{p} \in \pi$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Inoltre $\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|$ e $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ per $k \to \infty$, $\mathbf{p}_k \to \mathbf{p}$ per $k \to \infty$. Ora consideriamo i punti

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{p}_k + \alpha(\mathbf{p}_k)\mathbf{n}, \qquad \mathbf{z}_k = \mathbf{p}_k + \beta(\mathbf{p}_k)\mathbf{n}$$

che appartengono all' insieme compatto A, quindi esiste una sottosuccessione $i_1, ..., i_k, ...$ di $1, ..., k, ...$ e $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$ tali che:

$$\mathbf{y}_{i_k} \to \mathbf{y}, \qquad \mathbf{z}_{i_k} \to \mathbf{z} \quad \textit{per} \quad k \to \infty$$

Semplici argomenti, mostrano che $\mathbf{y} = \mathbf{p} + a\mathbf{n}$, $\mathbf{z} = \mathbf{p} + b\mathbf{n}$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono tali che $a \leq b$ e:

$$\alpha(\mathbf{p}_{i_k}) \to a, \qquad \beta(\mathbf{p}_{i_k}) \to b \quad \textit{per} \quad k \to \infty$$

Dunque $\mathbf{p} \in p_\pi(A)$ e:

$$|\theta| = \lim_{k\to\infty} |\theta_{i_k}| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}(\beta(\mathbf{p}_{i_k}) - \alpha(\mathbf{p}_{i_k})) = \frac{1}{2}(b-a) \leq \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{p})$$

quindi $\mathbf{x} \in A_\pi$, cioé A_π é chiuso.
Poiché A é limitato, esiste una palla chiusa C che lo contiene, quindi $A_\pi \subseteq C_\pi$. Ma C_π é chiaramente una palla chiusa, e quindi anche A_π é limitato. Abbiamo mostrato dunque che A_π é chiuso e limitato, i.e. compatto.
Infine, se A é un corpo convesso, allora contiene una palla chiusa B e cosí $B_\pi \subseteq A_\pi$. Ma B_π é una palla chiusa, e cosí l' insieme compatto e convesso A_π ha interno non vuoto, i.e. A_π é un corpo convesso. ∎

Teorema 2.53. *In $\mathbb{R}^n$ siano A, B insiemi non vuoti compatti e convessi e sia π l' iperpiano passante per l' origine. Allora:*

$$A_\pi + B_\pi \subseteq (A+B)_\pi.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in A_\pi + B_\pi$. Allora $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ per qualche $\mathbf{a} \in A_\pi$, $\mathbf{b} \in B_\pi$. Possiamo ora scrivere, utilizzando l' ormai usuale notazione: $\mathbf{a} = \mathbf{p} + \theta\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{q} + \phi\mathbf{n}$, dove $\mathbf{p} \in p_\pi(A)$, $\mathbf{q} \in p_\pi(B)$ e $|\theta| \leq \frac{1}{2}\gamma_A(\mathbf{p})$, $|\phi| \leq \frac{1}{2}\gamma_B(\mathbf{q})$. Poiché π é un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in \pi$, allora segue facilmente

che: $\mathbf{p}+\mathbf{q} \in p_\pi(A+B)$.
Chiaramente:

$$\gamma_{A+B}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) \geq \gamma_A(\mathbf{p}) + \gamma_B(\mathbf{q}),$$

quindi:

$$|\theta+\phi| \leq |\theta| + |\phi| \leq \frac{1}{2}\gamma_A(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\gamma_B(\mathbf{q}) \leq \frac{1}{2}\gamma_{A+B}(\mathbf{p}+\mathbf{q})$$

ed infine:

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}+\mathbf{q}+(\theta+\phi)\mathbf{n} \in (A+B)_\pi, \quad \text{e cosí } A_\pi + B_\pi \subseteq (A+B)_\pi.$$

■

Ora seguirá il risultato chiave per il processo di *simmetrizzazione*, ([37] pag.310).

Teorema 2.54. *In $\mathbb{R}^n$, sia A un insieme non vuoto compatto e convesso e sia π un iperpiano. Allora*

$$\nu_n(A_\pi) = \nu_n(A), \qquad s(A_\pi) \leq s(A).$$

Dimostrazione. Senza perpendere di generalitá possiamo supporre che π contenga l' origine.
Mostriamo per induzione su n che $\nu_n(A_\pi) = \nu_n(A)$. Il caso $n=1$ é banale. Supponiamo che $n \geq 2$ e che l' asserto é vero in $\mathbb{R}^{n-1}$. Sia $\mathbf{n}$ un vettore unitario contenuto in π. La Proposizione 2.35 mostra che:

$$\nu_n(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_{n-1}(A_x)\,dx \qquad e \qquad \nu_n(A_\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_{n-1}((A_\pi)_x)\,dx.$$

Si verifica facilmente che $(A_\pi)_x = (A_x)_\pi$, e quindi dall' ipotesi induttiva che $\nu_{n-1}((A_\pi)_x) = \nu_{n-1}(A_x)$. Dunque $\nu_n(A) = \nu_n(A_\pi)$ e la dimostrazione per induzione é completata.
Il Teorema 2.53 mostra che per ogni $\lambda > 0$,

$$A_\pi + \lambda U = A_\pi + (\lambda U)_\pi \subseteq (A+\lambda U)_\pi.$$

inoltre da quanto appena dimostrato, segue che:

$$\nu_n(A_\pi + \lambda U) \leq \nu_n((A+\lambda U)_\pi) = \nu_n(A+\lambda U).$$

Quindi:

$$\lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n(A_\pi + \lambda U) - \nu_n(A_\pi)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda\to 0_+} \frac{\nu_n(A + \lambda U) - \nu_n(A)}{\lambda},$$

i.e. $s(A_\pi) \leq s(A)$. ■

Un' importante proprietá della *simmetrizzazione di Steiner* é quella di essere continua sulla classe di tutti i corpi convessi, come afferma appunto il seguente Teorema (per approfondimenti si puó fare riferimento a [37] pag.310):

Teorema 2.55. *Sia $A_1, ..., A_k, ...$ una successione di corpi convessi, convergenti ad un corpo convesso A in $\mathbb{R}^n$. Allora la successione $(A_1)_\pi, ..., (A_k)_\pi, ...$ dei relativi* simmetrizzati *rispetto ad un iperpiano π di $\mathbb{R}^n$, converge al* simmetrizzato *A_π di A rispetto a π.*

Dimostrazione. Assumiamo che l' origine sia un punto interno di A e che l' iperpiano π passi per l' origine stessa.
Allora esistono $r, s > 0$ ed un intero positivo N_1 tale che:

$$rU \subseteq A \subseteq sU, \quad e \quad rU \subseteq A_k \subseteq sU \quad per\ k > N_1.$$

Quindi:

$$rU \subseteq A_\pi \subseteq sU, \quad e \quad rU \subseteq (A_k)_\pi \subseteq sU \quad per\ k > N_1.$$

Sia ora, $\varepsilon > 0$. Poiché $A_k \to A$ per $k \to \infty$, esiste un intero positivo N_2 tale che, per $k > N_2$,

$$A_k \subseteq A + \frac{r\varepsilon}{s}U \quad e \quad A \subseteq A_k + \frac{r\varepsilon}{s}U.$$

Sia $k > \max\{N_1, N_2\}$. Allora:

$$A_k \subseteq A + \frac{r\varepsilon}{s}U \subseteq A + \frac{\varepsilon}{s}A = \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) A,$$

e cosí:

$$(A_k)_\pi \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) A_\pi = A_\pi + \frac{\varepsilon}{s}A_\pi \subseteq A_\pi + \varepsilon U.$$

In modo simile, si ha che:

$$A_\pi \subseteq (A_k)_\pi + \varepsilon U.$$

Abbiamo quindi:

$$\rho((A_k)_\pi, A_\pi) \leq \varepsilon \quad e \quad (A_k)_\pi \to A_\pi \quad per\ k \to \infty.$$

■

Il prossimo Teorema, risolve la critica (piú volte ricordata), che K. Weierstrass pose a J. Steiner, utilizzando in modo sostanziale il *Principio di selezione di Blaschke* (Teorema 2.26).
Prima di passare all' enunciato, stabiliamo alcune notazioni.
Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$. Allora denotiamo con $\mathcal{S}(A)$ la famiglia di tutti i corpi convessi che possono essere ottenuti da A attraverso un numero finito di *simmetrizzazioni* rispetto un iperpiano passante per l' origine.

Teorema 2.56. *Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una successione di membri di $\mathcal{S}(A)$ convergente alla palla chiusa di volume $\nu_n(A)$ centrata nell' origine.*

Dimostrazione. Sia

$$r_0 = \inf\{r > 0 :\ \exists C \ \in \ \mathcal{S}(A)\ con\ C \subseteq rU\}.$$

Allora, per ogni $k = 1, 2, ...$, esiste A_k in $\mathcal{S}(A)$ tale che $A_k \subseteq (r_0 + k^{-1})U$.
Ora, per il *Principio di selezione di Blaschke* (Teorema 2.26) esiste una sottosuccessione di $A_1, A_2, ...$ convergente a qualche corpo convesso, diciamo B. Assumiamo che tutta la successione converga a B. Chiaramente $B \subseteq r_0 U$ e $\nu_n(B) = \nu_n(A)$.
Completiamo dunque la dimostrazione, mostrando che $B = r_0 U$.
Supponiamo che $B \neq r_0 U$. Allora esiste $\mathbf{x}_0 \in Fr\ (r_0 U)$ e $s > 0$ tale che $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0; s) \cap B = \varnothing$. Poiché $Fr(r_0 U)$ é compatto, esistono punti distinti $\mathbf{x}_0, \cdots, \mathbf{x}_m$, $(m \geq 1)$ della $Fr(r_0 U)$ tali che:

$$Fr(r_0 U) \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{x}_0; s) \cup \cdots \cup \mathcal{B}(\mathbf{x}_m; s).$$

Per $i = 0, ..., m$ denotiamo con C_i la *calotta* $\mathcal{B}(\mathbf{x}_i; s) \cap Fr\ (r_0 U)$.
Allora
$$Fr(r_0 U) = C_0 \cup \cdots \cup C_m.$$

Per $i = 1, ..., m$, sia π_i l' iperpiano passante per l' origine tale che $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ sia un vettore normale a π_i stesso. Allora C_0 e C_i sono simmetriche rispetto a π_i.

Segue cosí, dal fatto che $\mathcal{B}(\mathbf{x}_0; s) \cap B = \varnothing$ e dalla definizione di simmetrizzazione di Steiner che, B_{π_1} é disgiunto da $C_0 \cup C_1$. In modo simile poi, $(B_{\pi_1})_{\pi_2}$ é disgiunto da $C_0 \cup C_1 \cup C_2$.

Continuando in questo modo, si ha che il corpo convesso $B^\diamond$ ottenuto da B per successive *simmetrizzazione* rispetto a $\pi_1, ..., \pi_m$ é disgiunto da $C_0 \cup \cdots \cup C_m$ e quindi dalla $Fr\ (r_0 U)$.

Poiché $B^\diamond$ é un corpo convesso contenuto in $r_0 U$, esiste un ε con $0 < \varepsilon < r_0$ tale che
$$B^\diamond \subseteq (r_0 - \varepsilon) U.$$

Ora, per $k = 1, 2, ...$ denotiamo con ${A_k}^\diamond$ il corpo convesso ottenuto da A_k per successive *simmetrizzazione* rispetto a $\pi_1, ..., \pi_m$. Allora ${A_k}^\diamond \in \mathcal{S}(A)$ e dal Teorema 2.55, si ha che ${A_k}^\diamond \to B^\diamond$ per $k \to \infty$.

Ma $B^{\diamond} \subseteq (r_0 - \varepsilon)U$, ed allora esiste un k tale che:

$$A_k{}^{\diamond} \subseteq (r_0 - \frac{1}{2}\varepsilon)U,$$

che contraddice la definizione di r_0.
Quindi $B = r_0 U$. ■

Possiamo dare adesso, utilizzando l' ultimo Teorema, una nuova dimostrazione *alla Steiner* della diseguaglianza isoperimetrica.

Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$, e sia r il raggio della palla avente lo stesso volume di A i.e. $\omega_n r^n = \nu_n(A)$.
Il Teorema precedente mostra l' esistenza di una successione di corpi convessi A_i convergenti a rU, i cui membri hanno *area superficiale* non maggiore di $s(A)$, quindi:

$$s(A_i) \to s(rU) \ per\ i \to \infty, \qquad \nu_n(A_i) = \nu_n(rU),\ \forall i$$

e

$$s(rU) = n\omega_n r^{n-1} \leq s(A).$$

Possiamo allora dedurre facilmente che (ricordiamo che abbiamo posto $\omega_n r^n = \nu_n(A)$):

$$s(A)^n \geq \omega_n n^n {\nu_n}^{n-1}(A).$$

Come ultima applicazione della *simmetrizzazione di Steiner*, diamo un nuova dimostrazione della diseguaglianza di Brunn, ([37] pag.314).

Siano A, B corpi convessi in $\mathbb{R}^n$ e siano $r, s > 0$ tali che $\nu_n(A) = \omega_n r^n$, e $\nu_n(B) = \omega_n s^n$. Sia $0 < k < 1$. Applicando il Teorema precedente, segue che esistono due successioni finite di simmetrizzazioni rispetto ad iperpiani passanti per l' origine, che mandano A, B nei corpi convessi $A^{\diamond}, B^{\diamond}$ rispettivamente, tali che $A^{\diamond} \supseteq krU, B^{\diamond} \supseteq ksU$.
Il Teorema 2.53 mostra che per ogni iperpiano π passante per l' origine:

$$\nu_n(A_\pi + B_\pi) \leq \nu_n((A+B)_\pi) = \nu_n(A+B).$$

Possiamo dedurre, applicando ripetutamente quest' ultimo risultato che:

$$\omega_n k^n (r+s)^n = \nu_n(k(r+s)U) \leq \nu_n(A^\diamond + B^\diamond) \leq \nu_n(A+B).$$

Mandando infine $k \to 1_-$, otteniamo che

$$\omega_n (r+s)^n \leq \nu_n(A+B)$$

e quindi:

$$\nu_n{}^{1/n}(A+B) \geq \nu_n{}^{1/n}(A) + \nu_n{}^{1/n}(B).$$

Per concludere il paragrafo, descriviamo un' altra *simmetrizzazione* inventata da H. A. Schwarz (1843 - 1921) allievo di Weierstrass,([8] pag. 78, [37] pag. 304).

Limiteremo la nostra attenzione ai soli corpi convessi in $\mathbb{R}^n$. La costruzione associa ad un corpo convesso A ed una retta r dati in $\mathbb{R}^n$ un altro corpo convesso con lo stesso *volume* di A ed avente come asse di rotazione la retta r.

Formalizziamo quanto appena affermato. Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$, dove $n \geq 2$. Per semplicitá di notazione, supponiamo che la retta r sia l' asse coordinato x_1 e che A sia contenuto tra gli iperpiani supporto $x_1 = a$ e $x_1 = b$, dove $a < b$. Per ogni x con $a \leq x \leq b$, denotiamo con A_x l' intersezione di A con l' iperpiano $x_1 = x$, e definiamo r_x dall' equazione:

$$\omega_{n-1} r_x^{n-1} = \nu_{n-1}(A_x).$$

Cosí, per $a < x < b$, r_x é il raggio di una palla $(n-1)$-dimensionale il cui volume ν_{n-1} é lo stesso di quello di A_x.

Adesso, per ogni x con $a \leq x \leq b$, definiamo un insieme convesso C_x nel modo seguente:

$$C_x = \{(x, x_2, ..., x_n) : x_2^2 + ... + x_n^2 \leq r_x^2\}.$$

Definiamo allora la *simmetrizzazione di Schwarz* dell' insieme A rispetto all' asse x_1, l' insieme $C_{\mathcal{S}}$ cosí definito:

$$C_{\mathcal{S}} = \bigcup \{C_x : a \leq x \leq b\}.$$

Teorema 2.57. *Sia A un corpo convesso in $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, la cui simmetrizzazione di Schwarz rispetto all' asse x_1 é $C_{\mathcal{S}}$. Allora $C_{\mathcal{S}}$ é un corpo convesso avente lo stesso volume di A.*

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che $r_{\cdot} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é un funzione concava. Siano $x, y \in [a,b]$ e siano $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Dalla convessitá di A si ha che:

$$A_{\lambda x + \mu y} \supseteq \lambda A_x + \mu A_y.$$

Applicando la Diseguaglianza di Brunn in $\mathbb{R}^{n-1}$, abbiamo che:

$$\nu_{n-1}^{1/(n-1)}(A_{\lambda x+\mu y}) \geq \nu_{n-1}^{1/(n-1)}(\lambda A_x + \mu A_y) \geq \lambda \nu_{n-1}^{1/(n-1)}(A_x) + \mu \nu_{n-1}^{1/(n-1)}(A_y)$$

quindi

$$r_{\lambda x+\mu y} \geq \lambda r_x + \mu r_y.$$

Ora verifichiamo la convessitá di $C_{\mathcal{S}}$.
Siano $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C_{\mathcal{S}}$ e siano $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Allora $\mathbf{u} \in C_x, \mathbf{v} \in C_y$, per qualche $x, y \in [a,b]$.
Inoltre:

$$\|\mathbf{u} - (x, 0, ..., 0)\| \leq r_x, \qquad \|\mathbf{v} - (y, 0, ..., 0)\| \leq r_y.$$

Adesso $a \leq \lambda x + \mu y \leq b$ e:

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} - (\lambda x + \mu y, 0, ..., 0)\| &\leq \lambda \|\mathbf{u} - (x, 0, ..., 0)\| + \mu \|\mathbf{v} - (y, 0, ..., 0)\| \\ &\leq \lambda r_x + \mu r_y \\ &\leq r_{\lambda x + \mu y}. \end{aligned}$$

Quindi $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in C_{\lambda x + \mu y}$, ed allora $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in C_{\mathcal{S}}$, i.e. $C_{\mathcal{S}}$ é convesso.
Per concludere, dalla Proposizione 2.35 si ha:

$$\nu_n(A) = \int_a^b \nu_{n-1}(A_x)\, dx = \int_a^b \nu_{n-1}(C_x)\, dx = \nu_n(C_{\mathcal{S}}).$$

■

Concludiamo il capitolo, elencando alcune diseguaglianze di particolare interesse:

Teorema 2.58. *(Bieberbach-Urysohn)*
Sia $A \subset \mathbf{R}^n$, allora:

$$\boxed{V(conv(A)) \leq \frac{\omega_n}{2^n}(diam(A))^n}$$

dove $V(conv(A))$ é la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ dell' inviluppo convesso di A e $diam(A)$ il diametro di A. L' uguaglianza si verifica se e solo se A é una palla (in $\mathbf{R}^n$) dalla quale puó essere rimosso un insieme zero-dimensionale.

(vedi [8] pag. 93)

e per quanto riguarda la *teoria dei volumi misti*[1]:

Teorema 2.59. *(Alexandrov-Fenchel)*
Siano $A_1, \ldots, A_n$ insiemi non vuoti compatti e convessi in $\mathbf{R}^n$. Allora:

$$\boxed{V^2(A_1, A_2, \ldots, A_n) \geq V(A_1, A_1, A_3, \ldots, A_n)\ V(A_2, A_2, A_3, \ldots, A_n)}$$

(vedi [8] Cap. 4, §20.1)

Quando $n = 3$, come conseguenza della precedente diseguaglianza (vedi [8] pag. 143) si hanno le seguenti diseguaglianze per corpi convessi:

$$\boxed{S^3 \geq 36\pi V^2} \quad \text{(diseg. isoper.)}$$

$$\boxed{M^3 \geq 48\pi^2 V}$$

$$\boxed{M^2 \geq 4\pi S}$$

$$\boxed{S^2 \geq 3VM}$$

$$\boxed{V \leq \frac{\pi}{6}d^3}$$

[1]la misura *volume* sará rappresentata con la lettera maiuscola V, denotando appunto la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ e non piú quella di Peano-Jordan v.

$$\boxed{S \leq \pi d^2}$$

dove S é la misura della frontiera (*area superficiale*) del corpo convesso, V suo il volume, d il suo diametro e se denotiamo con A il corpo convesso, $M(A) = nV(U, U, \underbrace{A, ..., A}_{n-2})$ rappresenta la *curvatura media totale* di ∂A (vedi [8] pag.140,145).

2.3 Cenni sulla diseguaglianza isoperimetrica su superfici

In questo paragrafo verranno presentati alcuni risultati (senza dimostrazioni) riguardanti la diseguaglianza isoperimetrica su superfici in $\mathbb{R}^3$.
Analizziamo per cominciare, cosa succede sulla superficie sferica .
Sia $\mathcal{S}$ una calotta sferica: vogliamo trovare la relazione che lega la sua area con la lunghezza della sua frontiera circolare.
Per quanto concerne l'area, bisogna ricordare che su una sfera data, l'area A di una zona (di superficie sferica) tagliata da una coppia di piani paralleli, dipende solo dalla distanza h tra i piani ([25] pag.1198); scriviamo dunque $A = \alpha \cdot h$, ($\alpha = costante$).
Se la sfera ha raggio R, allora quando $h = 2R$ (e considerando un piano tangente alla sfera) otteniamo tutta l'area della superficie sferica: $A = 4\pi R^2$. Allora $c = 2\pi R$, ottenendo dunque: $A = 2\pi Rh$. Ora considerando uno dei due piani paralleli, tangente alla sfera, la calotta sferica precedentemente introdotta, potrá essere contenuta tra i piani ed avere la frontiera circolare $\mathcal{C}$, appartenente ad un piano.
Osserviamo che il raggio r di tale frontiera é uguale alla media proporzionale tra h e $2R - h$, cioé vale:

$$\frac{2R-h}{r} = \frac{r}{h}.$$

Abbiamo dunque per la lunghezza L di $\mathcal{C}$ la seguente espressione:

$$L = 2\ \pi \sqrt{h(2R-h)}$$

ed inoltre seguirá, che:

$$L^2 = 4\ \pi A - \frac{A^2}{R^2} \tag{2.22}$$

Quindi la quantitá $L^2 - 4\ \pi A$ sulla superficie sferica *non é* piú non-negativa.

L.Bernstein (*Uber die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberflache und in der Ebene*, Math.Ann., **60**, pp.117-136, 1905) provó la seguente diseguaglianza:

$$L^2 - 4\ \pi A + \frac{A^2}{R^2} \geq (2R\ g(R))^2 \left(2\pi + g(R)^2\right) \tag{2.23}$$

valida per curve chiuse convesse sulla sfera di raggio R, dove:

$$g(R) = \sin\left[\frac{d}{4(1+2\pi R)}\right]$$

e d é la minima ampiezza dell'anello circolare sulla sfera, contenente la curva data.

Dunque poiché la parte destra della diseguaglianza (2.23) é positiva, segue facilmente che:

$$L^2 \geq 4\ \pi A - \frac{A^2}{R^2} \tag{2.24}$$

e l'uguaglianza si verifica solo per la circonferenza.

La diseguaglianza (2.23) provata da Bernstein e le considerazioni iniziali mettono in luce dunque, che sulla superficie sferica non vale piú la diseguaglianza isoperimetrica nella sua formulazione *classica*: $L^2 \geq 4\pi A$.

Analizziamo allora alcune classi di superfici e domini su essi, per le quali $L^2 \geq 4\pi A$ rimane ancora valido.

Un primo risultato é dovuto a T.Carleman (*Zur Theorie der Minimalflachen*, Math.Z., **9**, pp.154-160, 1921) il quale mostró che $L^2 \geq 4\pi A$ rimane valida

per domini semplicemente connessi su superfici minime ([33] pag.296, [11] pag.54) in $\mathbb{R}^3$, per approfondimenti si puó fare riferimento a [25] pag.1201.
Un risultato successivo che estende il precedente, é dovuto a E.F.Beckenbach e T.Radó (*Subharmonic functions and surfaces of negative curvature*, Trans. Amer.Math.Soc., **35**, pp.662-674,1933) che dimostrarono appunto il seguente teorema:

Teorema 2.60. *(Beckenbach e Radó)*
Sia $\mathcal{S}$ una superficie in $\mathbb{R}^3$.
Allora la diseguaglianza $L^2 - 4\pi A \geq 0$ si verifica per tutti i domini Ω semplicemente connessi in $\mathcal{S}$ ($A = area\Omega$, $L = lungh\partial\Omega$) se e solo se la curvatura gaussiana $K(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$.

Per *curvatura gaussiana* $K(\mathbf{x})$, si intende naturalmente il prodotto delle curvature principali di $\mathcal{S}$ in $\mathbf{x}$.
Osserviamo che la proprietá richiesta al dominio Ω di essere semplicemente connesso gioca un ruolo cruciale. Basta considerare, a titolo di esempio il caso di un dominio cilindrico; allora avremo $K \equiv 0$, e se il raggio del cilindro é r e l'altezza h sará : $L = 4\pi r$ e $A = 2\pi r h$.
Adesso peró, fissando L si puó aumentare arbitrariamente A aumentando h.

Dunque possiamo affermare che su superfici minime e piú in generale per superfici a curvatura gaussiana $K(\mathbf{x}) \leq 0$ (per ogni punto $\mathbf{x}$ della superficie), continua a valere, per domini semplicemente connessi la diseguaglianza isoperimetrica nella sua formulazione classica.

Ora mostreremo un altro risultato generalizzando quanto ottenuto all'inizio del paragrafo.
Infatti:

$$L^2 \geq 4\,\pi A - \frac{A^2}{R^2}$$

valida sulla superficie sferica (per domini semplicemente connessi), puó essere riscritta, tenendo presente che nel caso della sfera la curvatura gaussiana $K \equiv 1/R^2$, come:

$$L^2 \geq 4\,\pi A - KA^2. \tag{2.25}$$

Osserviamo allora che (2.25) rimane valida nel caso del piano ed un risultato di E.Schmidt (*Die isoperimetrischen Ungleichungen in der hyperbolischen Ebene*, Math.Z., **46**, pp.204-230, 1940) ci dá conferma anche nel caso del piano iperbolico ($K \equiv -1$), [25] pag.1206.
La (2.25) rappresenta in ultima analisi la generalizzazione della diseguaglianza isoperimetrica per domini semplicemente connessi, su superfici a curvatura gaussiana K costante.

Capitolo 3

Aspetti analitici

3.1 L' approccio di Eulero al problema isoperimetrico

In questo paragrafo, dopo rapidi cenni di *Calcolo delle Variazioni*, riproporremo in chiave analitica, il problema di esistenza per la soluzione del problema isoperimetrico.
Analizzando metodi classici ed un originale approccio di Eulero (*Methodus inveniendi*, Lausannae et Genevae, 1774, O.O. Ser. I. vol.24), giungeremo in modo elementare a mostrare l'esistenza ed unicitá della soluzione del problema in questione, risolvendo dunque, anche analiticamente la critica mossa da K. Weierstrass a J. Steiner piú volte ricordata (per approfondimenti si puó fare riferimento a [14] pag.248, [27] pag.592).

Denotiamo con $\mathcal{A}$ un insieme di funzioni, che chiamiamo *funzioni ammissibili* e definiamo *funzionale* un' applicazione:

$$J : \mathcal{A} \to \mathbb{R}.$$

Cercare dei minimi (ad esempio) per il funzionale J, significherá cercare di determinare $\hat{u} \in \mathcal{A}$ in modo che:

$$J[\hat{u}] \leq J[u], \qquad \forall u \in \mathcal{A},$$

se $\hat{u}$ verifica la precedente diseguaglianza, si dirá *estremante* di J o, piú precisamente, *minimizzante* di J.
I funzionali tipici del Calcolo delle Variazioni sono espressi mediante integrali; ad esempio se $u = u(x)$ é funzione di una variabile reale x:

$$J[u] = \int_a^b f(x, u, u')\, dx$$

un altro esempio, che consideremo piú avanti é anche il seguente:

$$J[u_1, ..., u_n] = \int_a^b f(x, u_1, ..., u_n, {u_1}', ..., {u_n}')\, dx$$

nei problemi isoperimetrici poi va ricordato che le funzioni di $\mathcal{A}$ sono soggette a vincoli integrali del tipo:

$$\int_a^b g(x, u, u')\, dx = const.$$

Non abbiamo definito volutamente la natura delle precedenti funzioni integrande f, g in quanto d' ora in poi restringeremo la nostra analisi su funzionali, e funzioni ammissibili, come meglio chiarito di seguito.
Ci occuperemo infatti del seguente problema:
data $f : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathbf{C}^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, minimizzare (o massimizzare) il funzionale:

$$J[u] = \int_a^b f(x, u, u')\, dx$$

al variare di u nella classe delle funzioni ammissibili:

$$\mathcal{A} = \{u \in \mathbf{C}^1([a, b]) : u(a) = A, u(b) = B\},$$

dove A e B sono numeri reali assegnati.

Cerchiamo ora, ad esempio, le condizioni necessarie che un minimizzante $\hat{u}$ di J deve soddisfare. Sia dunque

$$J[\hat{u}] \leq J[u], \qquad \forall u \in \mathcal{A},$$

e consideriamo ogni funzione $u \in \mathcal{A}$ scritta nella forma

$$u(x) = \hat{u}(x) + h(x)$$

dove $h \in \mathbf{C}^1([a,b])$ e $h(a) = h(b) = 0$.
La funzione h, chiamata *variazione* di $\hat{u}$ e denotata con il simbolo $\delta\hat{u}$, puó essere interpretata come una "perturbazione" di $\hat{u}$ che lascia invariato il valore di u agli estremi a e b.
Definiamo inoltre il funzionale:

$$\delta J = \int_a^b \{f_u(x,u,u')h + f_{u'}(x,u,u')h'\}\, dx.$$

che prende il nome di *variazione prima* di J.
Un primo risultato che si puó ottenere facilmente a questo punto, é che:

Se $\hat{u}$ é un minimante per $J[u]$ allora $\delta J[\hat{u}] = 0$.

Dunque se $\delta J[\hat{u}] = 0$, $\hat{u}$ si dice *critico* o *stazionario* per J. ([27] pag.567, [14] pag.11).
L' annullarsi della variazione prima $\delta J[\hat{u}]$ peró, non é condizione sufficiente affinché $\hat{u}$ sia effettivamente un minimizzante di J. La ricerca di condizioni sufficienti é un capitolo molto importante e delicato del *Calcolo delle Variazioni*, per la natura introduttuva ed elementare della presente sintesi quindi, ci limitiamo ad analizzare solo la piú semplice ed immediata: quella basata sulla convessitá di f e sulla *variazione seconda* di J che definiamo di seguito.
Se $f \in \mathbf{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{A}$ si definisce *variazione seconda* di J in u e si indica con $\delta^2 J(u)[h]$, o piú semplicemente $\delta^2 J$ il funzionale seguente quadratico in h:

$$\delta^2 J = \int_a^b \{f_{uu}(x,u,u')h^2 + 2f_{u'u}(x,u,u')hh' + f_{u'u'}(x,u,u')h'^2\}\, dx.$$

Si noti che se f é convessa rispetto a u, u' la variazione seconda é non negativa.

Proposizione 3.1. *Sia $f = f(x,u,u')$ di classe $\mathbf{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e sia $\hat{u}$ un punto critico per J i.e. $\delta J[\hat{u}] = 0$. Se f é convessa rispetto ad u, u', allora $\hat{u}$ é minimizzante per J. Se é strettamente convessa $\hat{u}$ é l' unico minimizzante.*

Dimostrazione. Sia h una *variazione* ammissibile $\delta\hat{u}$. Usando la formula di

Taylor per f rispetto a u e u' si puó scrivere:

$$
\begin{aligned}
f(x, \hat{u}+h, \hat{u}'+h') - f(x, \hat{u}, \hat{u}') = {} & f_u(x, \hat{u}, \hat{u}')h + f_{u'}(x, \hat{u}, \hat{u}')h' + \\
& + \frac{1}{2}\{f_{uu}(x, \hat{u}+\hat{h}, \hat{u}'+\hat{h}')h^2 + \\
& + 2f_{u'u}(x, \hat{u}+\hat{h}, \hat{u}'+\hat{h}')hh' + \\
& + f_{u'u'}(x, \hat{u}+\hat{h}, \hat{u}'+\hat{h}')h'^2\}
\end{aligned}
$$

dove $\hat{h}$ é una *variazione* opportuna tra 0 ed h.
Essendo f convessa rispetto ad u e u', si ha $\delta^2 J(u)[h] \geq 0$ per ogni $u \in \mathcal{A}$ ed ogni *variazione* h e quindi:

$$
J[\hat{u}+h] - J[\hat{u}] = \delta J(\hat{u})[h] + \frac{1}{2}\delta^2 J(\hat{u}+\hat{h})[h] = \frac{1}{2}\delta^2 J(\hat{u}+\hat{h})[h] \geq 0
$$

cioé $\hat{u}$ é minimizzante per J.

Sia infine f strettamente convessa e, per assurdo esista un' altra minimizzante $\hat{v}$. Poniamo

$$
J[\hat{u}] = J[\hat{v}] = \mu
$$

e consideriamo

$$
w = \frac{\hat{u}+\hat{v}}{2}.
$$

Per la convessitá stretta di f, si ha:

$$
f(x, w, w') < \frac{f(x, \hat{u}, \hat{u}') + (x, \hat{v}, \hat{v}')}{2}, \qquad \forall x : \hat{u}(x) \neq \hat{v}(x). \tag{3.1}
$$

Per continuitá, deve esistere un intervallo in $\mathbb{R}$ in cui la precedente diseguaglianza é verifica.
Denotando con a e b gli estremi di tale intervallo, possiamo integrare la (3.1) (su tale intervallo) ed ottenere che:

$$
J[w] < \frac{1}{2}J[\hat{u}] + \frac{1}{2}J[\hat{v}] = \mu
$$

contro l' ipotesi che μ é il minimo di J. ■

Ricordiamo ora un risultato, che ci limitiamo solo ad enunciare ([27] pag.570, [14] pag.16, [21] pag.39):

Teorema 3.2. *Siano $f \in \mathbf{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e $J[u] = \int_a^b f(x,u,u')\,dx$. Una funzione $\hat{u} \in \mathcal{A}$ é stazionaria per J se e solo se $f_{u'}(x, \hat{u}(x), \hat{u}'(x))$ é di classe $\mathbf{C}^1([a,b])$ e vale la seguente equazione, detta* equazione di Eulero-Lagrange*:*

$$\frac{d}{dx} f_{u'}(x, \hat{u}(x), \hat{u}'(x)) - f_u(x, \hat{u}(x), \hat{u}'(x)) = 0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Ora dopo questa breve introduzione, ci occuperemo piú specificatamente del problema isoperimetrico, utilizzando gli strumenti appena introdotti ed un particolare approccio dato al problema da Eulero.

Ricordiamo brevemente che il problema (nella formulazione classica), richiede di determinare la *figura* piana di perimetro assegnato L e di area massima, (per *figure* intendiamo regioni del piano semplicemente connesse, la cui frontiera sia una curva regolare di Jordan rettificabile, [1] pag.341).
Analiticamente, si tratterá di massimizzare un funzionale

$$J[u] = \int_a^b f(x,u,u')\,dx$$

al variare di u in $\mathbf{C}^1([a,b])$ tale che $u(a) = A,\ \ u(b) = B$ ed inoltre soggette al vincolo:

$$K[u] = \int_a^b g(x,u,u')\,dx = L$$

dove si considerano $f, g \in \mathbf{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Lo strumento operativo per risolvere il nostro problema é il seguente risultato di carattere generale (per la dimostrazione si puó fare riferimento a [27] pag.584, [14] pag.90):

Teorema 3.3. *Siano f e g di classe $\mathbf{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ed $\hat{u} \in \mathbf{C}^2([a,b])$ massimizzante per J con la condizione $K[u] = L$. Se $\hat{u}$ non é estremale per K, allora esiste un numero reale $\hat{\lambda}$ tale che $\hat{u}$ é estremale per il funzionale:*

$$I[u] = \int_a^b (f + \hat{\lambda} g)\,dx,$$

ossia $\hat{u}$ soddisfa l' equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dx} f_{u'} - f_u + \hat{\lambda} \left(\frac{d}{dx} g_{u'} - g_u \right) = 0. \tag{3.2}$$

Applichiamo quindi il precedente Teorema al nostro problema, e con l' aiuto della seguente figura, formalizziamo la questione come segue (si veda pag. 7 della presente tesi):

supponiamo che esista una curva semplice, rettificabile e di lunghezza fissata L: $u(x) \in \mathbf{C}^2([-a, a])$ tale da massimizzare il funzionale:

$$J[u] = \int_{-a}^{a} u(x)\, dx, \qquad u(-a) = u(a) = 0$$

con la condizione

$$K[u] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + u'^2(x)}\, dx = L, \qquad (L > 2a) \tag{3.3}$$

Per determinare l'equazione esplicita per $u(x)$, consideriamo dunque il funzionale ausiliario:

$$I[u] = \int_{-a}^{a} (u(x) + \lambda\sqrt{1 + u'^2(x)})\, dx.$$

Per la (3.2) abbiamo:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda u'}{\sqrt{1 + u'^2(x)}}\right) = 1$$

da cui

$$\frac{\lambda u'}{\sqrt{1 + u'^2(x)}} = x + C_1.$$

Quindi

$$\frac{du}{dx} = \frac{x + C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x + C_1)^2}}$$

ed integrando, otteniamo:

$$(x + C_1)^2 + (u + C_2)^2 = \lambda^2$$

che é una circonferenza di raggio λ con centro nel punto $(-C_1, -C_2)$.
Definiamo le costanti C_1 e C_2 ed il parametro λ dalle condizioni al contorno $u(-a) = u(a) = 0$ e dalla condizione isoperimetrica (3.3).
Abbiamo dunque:

$$\begin{cases} C_2^2 = \lambda^2 - (C_1 - a)^2, \\ C_2^2 = \lambda^2 - (C_1 + a)^2 \end{cases} \tag{3.4}$$

da cui

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \sqrt{\lambda^2 - a^2},$$

in modo che:

$$u = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2}, \qquad e \quad u' = -\frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}.$$

Allora la condizione (3.3) dá:

$$L = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}\, dx = 2\lambda \arcsin \frac{a}{\lambda}$$

ossia

$$\frac{a}{\lambda} = \sin \frac{L}{2\lambda}.$$

Risolvendo infine questa equazione (che ammette almeno un soluzione [21] pag.84), troviamo un certo valore $\lambda = \hat{\lambda}$ ed in seguito $C_2 = \sqrt{\hat{\lambda}^2 - a^2}$.

Possiamo quindi affermare, che se esiste una soluzione del problema isoperimetrico, allora deve essere una circonferenza. Il procedimento appena proposto infatti, presuppone l' esistenza della soluzione (di classe $\mathbf{C}^2([a,b])$ del problema stesso. Vediamo ora, come utilizzando un altro approccio dovuto ad Eulero, si possa sempre con semplici strumenti mutuati dal Calcolo delle Variazioni dimostrare l' esistenza della soluzione.

Consideriamo la versione duale del problema isoperimetrico ([14] pag.248): *tra tutte le curve regolari che racchiudono una data area, trovare quella di*

lunghezza minima.
Siano t, z le coordinate cartesiane sul piano ($z \geq 0$), consideriamo curve $u(t)$, semplici, rettificabili di classe di $\mathbf{C}^1([t_1, t_2])$ di equazione $z = u(t)$, (in effetti é sufficiente che $u(t)$ sia assolutamente continua, [14] pag.249).
Introduciamo dunque, l'area:

$$\xi(t) = \int_{t_1}^{t} u(\hat{t})\, d\hat{t},$$

sotto l' arco $z = u(\hat{t}), \quad t_1 \leq \hat{t} \leq t$, come una nuova variabile indipendente x, ponendo $x = \xi(t)$ e considerando la funzione inversa $t = \tau(x)$.
Se definiamo $v(x)$ nel seguente modo:

$$v(x) := u(\tau(x)),$$

la curva é ora data da $z = v(x)$ come una funzione della area x sottostante il grafico $z = u(\hat{t}), \quad t_1 \leq \hat{t} \leq t$.
L' elemento di curva ds ha la forma:

$$ds = \sqrt{dt^2 + dz^2} = \sqrt{1 + u'^2}dt.$$

Osserviamo che abbiamo anche:

$$\xi'(t) = u(t) = v(x), \qquad \tau'(x) = \frac{1}{\xi'(t)}$$

e

$$u'(t) = v'(x)\xi'(t).$$

Poiché

$$ds = \sqrt{1 + u'^2}dt = \sqrt{1 + v'^2\xi'^2}\tau' dx,$$

otteniamo che:

$$ds = \sqrt{\frac{1}{v^2} + v'^2}dx.$$

Siamo giunti cosí a poter formalizzare il nostro problema nella ricerca del minimizzante per il funzionale:

$$L[v] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1}{v^2} + v'^2}\, dx, \qquad x_1 = 0, \tag{3.5}$$

senza adesso condizioni aggiuntive.
Questo approccio quindi ci ha permesso di passare da un problema vincolato ad uno piú semplice senza piú condizioni supplementari, inoltre va osservato, che poiché l' integrando in (3.5) é strettamente convesso rispetto a v e v', non appena avremo trovato gli estremali per $L[v]$, la Proposizione 3.1 ci assicurerá l' esistenza ed unicitá della soluzione del nostro problema.
Cerchiamo dunque, gli estremali di $L[v]$. Osserviamo che l' integrando

$$f(v, v') = \sqrt{\frac{1}{v^2} + v'^2}$$

non dipende dalla variabile indipendente x, allora l' espressione $f - v' f_{v'}$ forma un integrale primo degli estremali $z = v(x)$ di L, dunque otteniamo:

$$\frac{1}{v^2 \sqrt{\frac{1}{v^2} + v'^2}} = costante,$$

cioé (v é positiva per ipotesi):

$$v\sqrt{1 + v^2 v'^2} = b$$

per qualche costante $b \in \mathbb{R}$.
Ponendo ora, $u(t) = v(x)$ e

$$v'(x) = \frac{u'(t)}{u(t)},$$

otteniamo per gli estremali $z = u(t)$ l' equazione:

$$uu' = \sqrt{b^2 - u^2}.$$

Integrando quindi l' ultima equazione si ha:

$$(t - c)^2 + z^2 = c^2, \qquad z = u(t)$$

che é ovviamente una circonferenza.

Prima di concludere il paragrafo, va comunque osservato, che le nostre ultime considerazioni, circa la convessitá del funzionale, erano del tutto ignote ad Eulero. Basti pensare che nel XVIII sec. epoca in cui visse appunto il grande matematico, la differenza tra *estremale* e *minimizzante* (come la intendiamo noi), era ancora poco chiara (vedi [14] pag. 249).

3.2 L' approccio di A. Hurwitz al problema isoperimetrico

In questo paragrafo verrá presentata la dimostrazione della diseguaglianza isoperimetrica nel piano dovuta a A. Hurwitz ([16], [17]), che attraverso solo strumenti analitici riuscí appunto a dimostrare che fra tutte le curve planari semplici, chiuse e rettificabili e di lunghezza fissata, la circonferenza é la sola a racchiudere maggior area (*problema isoperimetrico*).

Teorema 3.4. *Sia $\mathcal{C}$ una curva planare chiusa, semplice e rettificabile. Se L é la lunghezza di $\mathcal{C}$ e A l'area della regione racchiusa da $\mathcal{C}$ allora:*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0$$

L'uguaglianza si verifica se e solo se $\mathcal{C}$ é una circonferenza.

Dimostrazione. Formalizziamo la curva $\mathcal{C}$ nel seguente modo:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

dove $f(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue $BV[a,b]$ (ovvero a variazione limitata in $[a,b]$) tali che:

$$f(a) = f(b), \qquad g(a) = g(b), \quad (i.e.\ \mathcal{C}\ e'\ chiusa)$$

$$(f(t_1), g(t_1)) \neq (f(t_2), g(t_2)),\ \forall t_1 \neq t_2 \in (a,b], \quad (i.e.\ \mathcal{C}\ e'\ semplice)$$

Ora riparametrizziamo la curva in funzione della lunghezza d' arco s, (ovviamente $s \in [0, L]$).

Si dimostra facilmente che $x(s)$ e $y(s)$ cosí ottenute sono lipschitziane (vedi [20] pag.117)(quindi sono derivabili q.o. [36] pag.313) ed inoltre si ha che:

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1, \quad q.o.$$

L' idea ora é di esprimere $x(s)$ e $y(s)$ in serie di Fourier e dopo utilizzare la formula di Parseval ([9] pag. 228).
Sostituiamo il parametro s con uno nuovo $u = 2\pi s/L$, ottenendo cosí:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = \phi(u) := x(Lu/2\pi) \\ y = \psi(u) := y(Lu/2\pi) \end{cases} \tag{3.7}$$

con

$$0 \leq u \leq 2\pi; \qquad \phi(0) = \phi(2\pi); \qquad \psi(0) = \psi(2\pi),$$

(ovviamente $\phi'(u), \psi'(u) \in L^2([0, \pi])$).
Osserviamo che:

$$[\phi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 ([x'(s)]^2 + [y'(s)]^2) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2, \quad q.o.$$

allora:

$$\int_0^{2\pi} ([\phi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2)\, dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

Ora, dal Teorema di Gauss-Green l'area A racchiusa da $\mathcal{C}$ puó essere espressa come segue:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(u)\psi'(u)\, du$$

.

Per giungere alla diseguaglianza isoperimetrica, esprimiamo A in termini dei coefficienti di Fourier di $\phi(u)$ e $\psi(u)$.
Scriviamo dunque $\phi(u), \phi'(u)$ e $\psi(u), \psi'(u)$ come somme (nel senso di L^2) delle proprie serie di Fourier:

$$\phi(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ku + b_k \sin ku)$$

$$\psi(u) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos ku + B_k \sin ku)$$

e

$$\phi'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos ku - a_k \sin ku)$$

$$\psi'(u) = \sum_{k=1}^{\infty} k(B_k \cos ku - A_k \sin ku)$$

Dalla formula di Parseval, otteniamo per l'area A la seguente relazione:

$$A = \int_0^{2\pi} \phi(u)\psi'(u)\, du = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k B_k - b_k A_k)$$

e per quanto riguarda $\frac{L^2}{2\pi}$, si ha che:

$$\frac{L^2}{2\pi} = \int_0^{2\pi} ([\phi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2)\, du = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2({a_k}^2 + {b_k}^2 + {A_k}^2 + {B_k}^2)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [k^2({a_k}^2 + {b_k}^2 + {A_k}^2 + {B_k}^2) - 2k(a_k B_k - b_k A_k)] \\ &= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} [(ka_k - B_k)^2 + (kb_k + A_k)^2 + (k^2 - 1)({A_k}^2 + {B_k}^2)] \end{aligned} \tag{3.8}$$

cosí possiamo affermare che:

$$L^2 - 4\pi A \geq 0.$$

Osserviamo che se $\mathcal{C}$ é una circonferenza é ovvio che:

$$L^2 - 4\pi A = 0.$$

Se $L^2 - 4\pi A = 0$, osserviamo che:

$$ka_k - B_k = 0, \qquad kb_k + A_k = 0, \qquad (k^2 - 1)({A_k}^2 + {B_k}^2) = 0,$$

e quindi:

$$a_k = b_k = A_k = B_k = 0, \quad \forall k > 1; \qquad B_1 = a_1, \qquad A_1 = -b_1.$$

Dunque abbiamo:

$$\begin{cases} \phi(u) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos u + b_1 \sin u \\ \psi(u) = \frac{A_0}{2} - b_1 \cos u + a_1 \sin u \end{cases}$$

che é appunto l'equazione parametrica della circonferenza di centro $(\frac{a_0}{2}, \frac{A_0}{2})$, raggio $r^2 = a_1^2 + b_1^2$, con lunghezza $L^2 = 4\pi^2(a_1^2 + b_1^2)$ ed area $A = \pi(a_1^2 + b_1^2)$.
■

3.3 Relazione tra la diseguaglianza isoperimetrica e la diseguaglianza di Sobolev

In questo paragrafo mostreremo come esista una stretta connessione tra la diseguaglianza isoperimetrica e quella di Sobolev (vedremo appunto quando sono equivalenti).
Storicamente questo fatto fu messo in evidenza indipendentemente da Federer e Fleming (*Normal and integral currents*, Ann. of Math., **72** pag.487,1960) e da V.G.Maz'ya (*Classes of domains and imbedding theorems for function spaces*, Soviet Math. Dokl., **1**, pag.884-885, 1960).

Nel seguito, ci limiteremo a considerare funzioni $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Richiamiamo la *diseguaglianza di Sobolev* esplicitandone la migliore costante.

Teorema 3.5. *Sia $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $1 < p < n$. Allora:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^p \, dx\right)^{1/p}, \tag{3.9}$$

dove $q = np/(n-p)$ e:

$$C = \pi^{-1/2} n^{-1/2} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-(1/p)} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{1/n} \tag{3.10}$$

(per la dimostrazione si puó far riferimento a [34] pag.353)
Federer, Fleming e Mazýa (nei lavori precedentemente ricordati) ricavarono il valore della migliore costante C nel caso $p = 1$, cioé:

$$C = n^{-1} \omega_n^{-1/n}$$

dimostrando appunto l'equivalenza tra:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/(n-1)} \, dx\right)^{(n-1)/n} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \, dx$$

e la diseguaglianza isoperimetrica per insiemi compatti con frontiera regolare in $\mathbb{R}^n$.

Prima di dimostrare il precedente risultato, inizieremo, tramite argomentazioni euristiche nel piano (riprese da [25] pag. 1192), a mettere in evidenza gli aspetti essenziali che legano la *diseguaglianza isoperimetrica* con la *diseguaglianza di Sobolev* ($p = 1$).

La *diseguaglianza di Sobolev* (sul piano) stabilisce dunque che:

$$f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2) \;\Rightarrow \left(\iint |\nabla f| \right)^2 \geq 4\pi \iint f^2. \tag{3.11}$$

Teorema 3.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio planare di area A, la cui frontiera sia una curva semplice, chiusa, regolare e di lunghezza L.*
La diseguaglianza di Sobolev (3.11) *é equivalente alla diseguaglianza isoperimetrica :*

$$L^2 \geq 4\pi A$$

Dimostrazione. Si tratterá dunque di dimostrare che (3.11) $\Leftrightarrow L^2 \geq 4\pi A^2$.
Cominciamo col provare che la *diseguaglianza di Sobolev* (3.11) implica la diseguaglianza isoperimetrica.
Sia infatti Ω il dominio precedentemente definito e la curva $\mathcal{C}$ la sua frontiera, per $\varepsilon > 0$ piccolo, e $\forall p \in \Omega$:

$$f_\varepsilon(p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \rho(p, \mathcal{C}) \geq \varepsilon, \\ \rho(p, \mathcal{C})/\varepsilon & \text{se} \quad \rho(p, \mathcal{C}) < \varepsilon. \end{cases} \tag{3.12}$$

dove $\rho(p, \mathcal{C})$ é la distanza fra $p \in \Omega$ e $\mathcal{C}$, i.e. $\rho(p, \mathcal{C}) = \inf\{|p - y| : y \in \mathcal{C}, p \in \Omega\}$.

Siccome si puó approssimare f_ε con funzioni regolari a supporto in Ω, la (3.11)

continua a valere per f_ε.
Inoltre $f_\varepsilon \longrightarrow \chi_\Omega$ per $\varepsilon \to 0$, (χ_Ω é la funzione caratteristica di Ω) e quindi:

$$\iint f_\varepsilon^2 \longrightarrow A.$$

Otteniamo allora:

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\int |\nabla f_\varepsilon| \right)^2 \geq 4\pi A.$$

La diseguaglianza $L^2 \geq 4\pi A$ é cosí conseguenza del fatto, non banale, che $\liminf_{\varepsilon\to 0} \left(\int |\nabla f_\varepsilon|\right)$ é la misura della frontiera di Ω. Per convincersi meglio di questo fatto, osserviamo che:

$$\iint |\nabla f_\varepsilon| = \frac{|\Omega \cap (\mathcal{C})_\varepsilon|}{\varepsilon} \tag{3.13}$$

giacché:

$$|\nabla f_\varepsilon| = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{in } \Omega \cap (\mathcal{C})_\varepsilon, \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus (\mathcal{C})_\varepsilon. \end{cases} \tag{3.14}$$

dove $(\mathcal{C})_\varepsilon = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ \rho(p, \mathcal{C}) < \varepsilon\}$.

Ora, che sia $\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{|\Omega\cap(\mathcal{C})_\varepsilon|}{\varepsilon} = L$, é conseguenza delle proprietá, non banali, del *contenuto (interno) di Minkowski*. Per approfondimenti si rinvia a H.Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969, §3.2.37, §3.2.39, e §3.2.26) e [15] pag. 184.

Abbiamo cosí provato che (3.11) $\Longrightarrow L^2 \geq 4\pi A$.
Ora proviamo che la *diseguaglianza isoperimetrica* implica la *diseguaglianza di Sobolev* (3.11) .
Sia $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Scriviamo:

$$D(t) = \{(x,y) \in \Omega : |f(x,y)| > t\}, \qquad A(t) = Area(D(t)).$$

$$\mathcal{C}(t) = \{(x,y) \in \Omega : |f(x,y)| = t\}, \qquad L(t) = lungh(\mathcal{C}(t)).$$

$$s = \text{lunghezza d'arco lungo } \mathcal{C}(t)$$

$$\ell = \text{lunghezza d'arco lungo le traiettorie ortogonali}$$
$$\text{alla famiglia } \{\mathcal{C}(t)\}, \text{ crescente con } t.$$

.

Osserviamo che da un risultato ben noto di A.Sard ([32]: Teorema 7.2 pag. 889), l'insieme dei valori singolari t per i quali $\nabla f = 0$ su $\mathcal{C}(t)$ ha misura uguale a zero. Per tutti gli altri valori di t, $\mathcal{C}(t)$ é un insieme di livello regolare consistente di un numero finito di curve regolari che limitano il dominio $D(t)$. Ora faremo ricorso ad argomentazioni non proprio rigorose (riprese da [25] pag. 1193) per giungere in modo rapido alla *formula di co-area* nel piano. Scriviamo:

$$|\nabla f| = |\partial f/\partial \ell| = \frac{dt}{d\ell}$$

e per l'elemento d'area in Ω:

$$dx\ dy = ds\ d\ell = |\nabla f|^{-1} ds\ dt$$

in un intorno di ogni punto su una curva regolare $\mathcal{C}(t)$.
Otteniamo dunque:

$$\iint |\nabla f| \, dx \; dy = \int_0^\infty (\int_0^{L(t)} ds) \, dt = \int_0^\infty L(t) \, dt \tag{3.15}$$

La (3.15) é la versione sul piano della cosidetta *formula di coarea*, che dimostreremo rigorosamente piú avanti (Teorema 3.13).

Applichiamo adesso, la diseguaglianza isoperimetrica ad ogni dominio $D(t)$:

$$L^2(t) \geq 4\pi A(t)$$

e cosí avremo:

$$\iint |\nabla f| \, dx \; dy \geq 2\sqrt{\pi} \int_0^\infty \sqrt{A(t)} \, dt \tag{3.16}$$

Adesso cercheremo di relazionare la parte destra di (3.16) con quella destra della (3.11).
Consideriamo il dominio $3-$*dimensionale* x, y, t definito da $0 \leq t \leq |f(x,y)|$, avremo:

$$\begin{aligned} \iint f^2 \, dx \; dy &= \iint (\int_0^{|f(x,y)|} 2t \, dt) \, dx \; dy \\ &= \int_0^\infty 2t(\iint_{t \leq |f(x,y)|} 1 \, dx \; dy) \, dt \\ &= \int_0^\infty 2tA(t) \, dt \end{aligned} \tag{3.17}$$

Osserviamo adesso che poiché $A(t)$ é una funzione decrescente di t, avremo:

$$\begin{aligned} t\sqrt{A(t)} &\leq \int_0^t \sqrt{A(\tau)} \, d\tau, \\ tA(t) &\leq \sqrt{A(t)} \int_0^t \sqrt{A(\tau)} \, d\tau = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \sqrt{A(\tau)} \, d\tau \right)^2 \\ \int_0^\infty 2tA(t) \, dt &\leq \left(\int_0^\infty \sqrt{A(t)} \, dt \right)^2 \end{aligned}$$

e quindi da (3.17) e (3.16) verifichiamo facilmente che:

$$4\pi \iint f^2 \, dxdy \leq 4\pi \left(\int_0^\infty \sqrt{A(t)} \, dt \right)^2 \leq \left(\iint |\nabla f| \, dxdy \right)^2$$

■

Segue dal Teorema precedente, il seguente Corollario (vedi [25] pag. 1194):

Corollario 3.7.
$$\inf_{f\in\mathcal{F}_0}\frac{\left(\int\limits_\Omega |\nabla f|\right)^2}{\int\limits_\Omega f^2}=4\pi,$$
dove $\mathcal{F}_0$ é la famiglia delle funzioni regolari a supporto compatto in Ω.

Vediamo adesso, come gli argomenti appena trattati si possano estendere a tutto $\mathbb{R}^n$.
Prima di tutto, precisiamo alcuni concetti ed alcune notazioni.

Ricordiamo che il *diametro* di un insieme $A\subset\mathbb{R}^n$ é definito nel seguente modo:
$$diam(A):=\sup\{\|x-y\|:x,y\in A\}.$$

Definizione 3.8. *La* misura di Lebesgue $\mathcal{L}^1$ *(1-dimensionale) in* $\mathbb{R}^1$ *é definita come:*
$$\mathcal{L}^1(A):=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{diam}(C_i):A\subset\cup_{i=1}^{\infty}C_i,\ C_i\subset\mathbb{R}\},$$
per ogni $A\subset\mathbb{R}$.

Definizione 3.9. *Definiamo induttivamente la* misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ *(n-dimensionale) in* $\mathbb{R}^n$ *come:*
$$\mathcal{L}^n:=\mathcal{L}^{n-1}\times\mathcal{L}^1=\mathcal{L}^1\times\cdots\times\mathcal{L}^1\ (n\ volte).$$

Osservazione 3.10. *La notazione alternativa a $\mathcal{L}^n(A)$ usualmente utilizzata é:*
$$|A|$$
noi per comoditá espositiva nel corso delle prossime dimostrazioni ne faremo largo uso.

Per le principali proprietá di $\mathcal{L}^n$ si rimanda a [38] (pag.3), inoltre é importante ricordare che la necessitá di disporre di una *misura* che "rispetti" la geometria intrinseca dell' insieme da misurare (vedi [23] pag.9), conduce all' introduzione della cosidetta *misura di Hausdorff* cosí definita:

Definizione 3.11. *i) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. Definiamo:*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam} C_i}{2}\right)^s : \ A \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i, \ \mathrm{diam} C_i \leq \delta, \ C_i \subset \mathbb{R}^n\},$$

dove

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)},$$

e $\Gamma(s) = \int_0^\infty \exp^{-x} \ x^{s-1}\, dx$, $(0 < s < \infty)$ *é l'usuale funzione gamma.*
ii) Per A ed s definiti in i), definiamo

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Chiamiamo $\mathcal{H}^s$ misura di Hausdorff *s-dimensionale in* $\mathbb{R}^n$*.*

Ora elenchiamo di seguito alcune proprietá importanti riguardanti la *misura di Hausdorff*; per le relative dimostrazioni si puó fare riferimento a [13] pp. 63,70.

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1 \ in \ \mathbb{R}^1, \tag{i}$$

$$\mathcal{H}^s = 0 \ in \ \mathbb{R}^n \ per \ \forall s > n, \tag{ii}$$

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A), \ \forall \lambda > 0, \ A \subset \mathbb{R}^n, \tag{iii}$$

$$\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A), \forall \ congruenza \ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \ A \subset \mathbb{R}^n, \tag{iv}$$

$$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n \ in \ \mathbb{R}^n \tag{v}$$

Ora enunciamo, a completezza delle successive argomentazioni, un risultato (vedi [13] pag.112) a cui abbiamo fatto riferimento anche nella prima parte del presente paragrafo.

Teorema 3.12. *(Teorema di Morse-Sard)*
Sia $f \in \mathbf{C}^k(\mathbb{R}^n)$, con $k \geq n$. Allora:

$$\{\nabla f = 0\} \cap f^{-1}(t) = \varnothing \quad \mathcal{L}^n \ q.o.\ t$$

Stabiliamo adesso la *formula di co-area* per funzioni $f \in \mathbf{C}_0^n(\mathbb{R}^n)$, strumento indispensabile per le prossime dimostrazioni.

Teorema 3.13. *(formula di co-area)*
Sia $f \in \mathbf{C}_0^n(\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora

$$\int_\Omega |\nabla f|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t) \cap \Omega]\, dt. \tag{3.18}$$

Nella dimostrazione del precedente Teorema, faremo uso del seguente Lemma, che ci limitiamo ad enunciare, (per la dimostrazione si puó fare riferimento a [38] pag.77).

Lemma 3.14. *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é un insieme aperto e limitato con frontiera $\partial U \in \mathbf{C}^2$, allora*

$$\sup\{\int_U \operatorname{div} \varphi\, dx : \ \varphi \in \mathbf{C}_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \sup|\varphi| \leq 1\} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial U).$$

Dimostrazione. (del Teorema 3.13, *formula di co-area*) La dimostrazione é ripresa da [38] pag. 77.
Consideriamo prima il caso per applicazioni lineari $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Allora esiste un trasformazione ortogonale $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ed una trasformazione non singolare g tale che $h(N^\perp) = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$, $h(N) = (\mathbb{R}\mathbf{e}_1)^\perp$, $(N = kerL)$ e

$$L = g \circ p \circ h$$

dove $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\mathbf{e}_1$ é la proiezione, (vedi [13] pag.87). Per ogni $y \in \mathbb{R}$, $p^{-1}(y)$ é un iperpiano che é il traslato del sottospazio $p^{-1}(0)$. Le immagini inverse $p^{-1}(y)$ al variare di y, decompongono dunque $\mathbb{R}^n$ in iperpiani paralleli. Dal Teorema di Fubini segue allora

$$|E| = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[E \cap p^{-1}(y)]\, dy$$

per ogni sottoinsieme misurabile E di $\mathbb{R}^n$. Quindi

$$\begin{aligned} |h(E)| = |E| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[E \cap p^{-1}(y)]\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[h(E) \cap p^{-1}(y)]\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[E \cap h^{-1}((p^{-1}(y))]\, dy \end{aligned}$$

Adesso tramite il cambio di variabile $z = g(y)$ l' ultimo integrale diventa

$$\begin{aligned} |g^{'}||E| &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[E \cap h^{-1}(p^{-1}(g^{-1}(z)))]\, dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[E \cap L^{-1}(z)]\, dz. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ma osserviamo che $|g^{'}| = |\nabla L|$ e dunque l' ultimo risultato dimostra il Teorema 3.18 per applicazioni lineari.

Passiamo adesso al caso piú generale stabilito dal Teorema: $f \in \mathbf{C}_0^n(\mathbb{R}^n)$. Sia $N = \{x : \nabla f(x) = 0\}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo:

$$E_t = \mathbb{R}^n \cap \{x : f(x) > t\}$$

e definiamo $\xi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\xi_t = \begin{cases} \chi_{E_t} & \text{se } t \geq 0, \\ -\chi_{\mathbb{R}^n \setminus E_t} & \text{se } t < 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Allora (vedi [22] Teorema 1.13):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_t \, dt, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Sia $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus N; \mathbb{R}^n)$, dal Teorema della Divergenza, abbiamo che:

$$\int_{E_t} div\ \varphi \, dx = \int_{(\partial E_t)\cap(\mathbb{R}^n \setminus N)} \varphi(x) \cdot \nu(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

dove $\nu(x)$ é il versore normale esterno a ∂E_t.
Se adesso consideriamo $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash N; \mathbb{R}^n)$ con $\sup|\varphi| \leq 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \varphi \, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f \cdot div \ \varphi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_t div \ \varphi \, dx dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{(\partial E_t) \cap (\mathbb{R}^n \backslash N)} \varphi(x) \cdot \nu(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t) \cap \mathbb{R}^n \backslash N] \, dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)] \, dt.
\end{aligned}$$

e quindi, cambiando φ in $-\varphi$:

$$|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \varphi \, dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)] \, dt,$$

$$\forall \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash N; \mathbb{R}^n), \quad \sup|\varphi| \leq 1, \ supp \ \varphi \subset \mathbb{R}^n \backslash N.$$

Ma

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n \backslash N} |\nabla f| \, dx \\
&= \sup\{|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \varphi \, dx| : \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash N; \mathbb{R}^n), \ \sup|\varphi| \leq 1, \}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)] \, dt.$$

Per provare ora, la diseguaglianza opposta, consideriamo applicazioni lineari a tratti $L_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |L_k - f| \, dx = 0 \tag{3.21}$$

e

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla L_k| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| \, dx. \tag{3.22}$$

Sia

$$E_t^k = \mathbb{R}^n \cap \{x : L_k(x) > t\},$$

$$\chi_t^k = \chi_{E_t^k}, \qquad \chi_t = \chi_{E_t}.$$

Ora, dalla (3.21) e poiché:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |L_k - f| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_t^k - \chi_t| \, dx \, dt,$$

si ha, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_t^k - \chi_t| \, dx = 0 \quad q.o \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$

Chiamiamo $S \subset \mathbb{R}$ l' insieme di misura nulla tale che $\forall t \notin S$ sia verifica l' uguaglianza in (3.23).

Osserviamo che $T := f(N)$ ha misura nulla per il Teorema di Morse-Sard (Teorema 3.12), inoltre per il Teorema della Funzione Implicita $f^{-1}(t)$ é una varietá $\mathbf{C}^n$, $\forall t \notin T$.

Ora per $t \notin S \cup T$, e $\varepsilon > 0$, dal Lemma 3.14 segue che

$$\mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)] - \int_{E_t} div \ \varphi \, dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.24}$$

dove $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e $|\varphi| \leq 1$.

Sia adesso $M = \int_{\mathbb{R}^n} |div \ \varphi| \, dx$ e scegliamo k_0 tale che per $k \geq k_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_t^k - \chi_t| \, dx < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Abbiamo allora per $k \geq k_0$,

$$|\int_{E_t} div \ \varphi \, dx - \int_{E_t^k} div \ \varphi \, dx| \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_t^k - \chi_t| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.25}$$

Quindi, da (3.24) e (3.25) segue che:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)] &\leq \int_{E_t} div \ \varphi \, dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_{E_t^k} div \ \varphi \, dx + \varepsilon \\ &= \int_{\partial E_t^k} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} + \varepsilon \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}[L_k^{-1}(t)] + \varepsilon. \end{aligned}$$

Cosí per $t \notin S \cup T$, si ha:

$$\mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)] \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^{n-1}[L_k^{-1}(t)].$$

Dal Lemma di Fatou, dalla 3.19 e dalla 3.22, concludiamo che:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[f^{-1}(t)]\, dt &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}[L_k^{-1}(t)]\, dt \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla L_k|\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|\, dx.
\end{aligned}$$

■

Dimostriamo adesso la diseguaglianza di Sobolev nel caso $p = 1$ come conseguenza della validitá della diseguaglianza isoperimetrica. Osserviamo inoltre che procedendo in questo modo, si otterrá direttamente la migliore costante nel caso $p = 1$, come giá ricordato all' inizio del paragrafo.

Teorema 3.15. *(Diseguaglianza di Sobolev (p=1))*
Se $f \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Allora*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/(n-1)}\, dx\right)^{(n-1)/n} \leq n^{-1}\omega_n^{-1/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|\, dx.$$

Dimostrazione. Per $t \geq 0$, sia:

$$A_t = \{x : |f(x)| > t\}, \qquad B_t = \{x : |f(x)| = t\}$$

e denotiamo con f_t la funzione ottenuta "troncando" f alle altezze t e $-t$, cioé:

$$f_t(x) := \begin{cases} t & \text{se } f(x) \geq t, \\ f(x) & \text{se } -t < f(x) < t, \\ -t & \text{se } f(x) \leq -t. \end{cases}$$

Adesso, se

$$g(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_t|^{n/(n-1)}\, dx\right)^{(n-1)/n},$$

da:

$$|f_{t+\delta}| \leq |f_t| + \delta \chi_{A_t},$$

e dalla monotonia di g, segue che:

$$0 \leq g(t+\delta) - g(t) \leq \delta |A_t|^{n/(n-1)} \tag{3.26}$$

per $\delta > 0$.
In particolare g é assolutamente continua e:

$$0 \leq g^{'}(t) \leq |A_t|^{(n-1)/n} \quad q.o.$$

Osserviamo che per il Teorema di Morse-Sard piú volte citato (Teorema 3.12), l' insieme dei valori singolari t per i quali $\nabla f = 0$ ha misura nulla. Inoltre per tutti gli altri valori di t, B_t rappresenta una varietá $(n-1)$-dimensionale di classe $\mathbf{C}^\infty$ e quindi la diseguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{R}^n$ stabilisce che:

$$|A_t|^{(n-1)/n} \leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} \mathcal{H}^{n-1}[B_t]. \tag{3.27}$$

Per concludere quindi, facendo riferimento alla (3.27) ed al Teorema 3.13 (formula di co-area) abbiamo:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{n/(n-1)}\, dx \right)^{(n-1)/n} &= g(\infty) - g(0) \\
&= \int_0^\infty g^{'}(t)\, dt \\
&\leq n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}[B_t]\, dt \\
&= n^{-1} \omega_n^{-1/n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|\, dx.
\end{aligned}$$

■

Come abbiamo fatto nel caso planare, si puó dimostrare anche in dimensione n, che la diseguaglianza di Sobolev nel caso $p = 1$ implica la diseguaglianza isoperimetrica.
All' atto della dimostrazione peró, dovremo utilizzare la formula di co-area (Teorema 3.13) per applicazioni lipschitziane ed il Teorema di Rademacher che ci limitiamo ad enunciare di seguito, (per la dimostrazione si puó fare riferimento a [13] pag. 112 e [38] pag. 50 rispettivamente).

Teorema 3.16. *(formula di co-area per applicazioni lipschitziane)*
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *applicazione lipschitziana,* $n \geq m$*. Allora per ogni insieme* $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$*-misurabile,*

$$\int_A Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))\, dy.$$

dove $Jf(x)$ *denota la radice quadrata delle somme dei quadrati dei determinanti dei minori* $m \times m$ *della matrice Jacobiana di* f *in* x*.*

Teorema 3.17. *(di Rademacher)*
Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *é lipschitziana, allora é differenziabile quasi ovunque, i.e.*

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - \nabla f(x) \cdot y}{|y|} = 0,$$

q.o. $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Dimostriamo adesso il seguente Teorema:

Teorema 3.18. (Teorema Isoperimetrico)
Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme compatto con frontiera* ∂K *regolare (di classe* $\mathbf{C}^n$*). Allora:*

$$(\mathcal{H}^{n-1}[\partial K])^n \geq n^n \omega_n (|K|)^{n-1}.$$

Dimostrazione. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto con frontiera regolare. Denotiamo con $d_K(x)$ la distanza di $x \in \mathbb{R}^n$ da K, definita nel seguente modo:

$$d_K(x) = \inf\{|x - y| : y \in K\}.$$

Osserviamo che se $x, x' \in \mathbb{R}^n$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z \in K$ tale che:

$$|x - z| < d_K(x) + \varepsilon$$

e dalla diseguaglianza triangolare si ha:

$$d_K(x') \leq |x' - z| \leq |x' - x| + |x - z| < |x' - x| + d_K(x) + \varepsilon.$$

Poiché $\varepsilon > 0$ é arbitrario, abbiamo:

$$d_K(x') \leq |x' - x| + d_K(x).$$

Scambiando adesso, x con x' nell' ultima diseguaglianza, abbiamo:

$$d_K(x) \leq |x - x'| + d_K(x')$$

e quindi:

$$|d_K(x) - d_K(x')| \leq |x - x'|$$

cioé $d_K(x)$ é lipschitziana con costante di Lipschizt 1.
Inoltre dal Teorema di Rademacher (teorema 3.17) si ha che d_K é differenziabile q.o. Inoltre $|\nabla d_K(x)| = 1$ q.o..
Per ogni $h > 0$, poi, definiamo:

$$F_h(x) = 1 - \frac{\min\{d_K(x), h\}}{h}$$

ed osserviamo che $F_h(x)$ é una funzione di Lipschitz tale che

$$F_h(x) = 1 \ se \ x \in K \tag{i}$$

$$F_h(x) = 0 \ se \ d_K(x) \geq h \tag{ii}$$

$$|\nabla F_h(x)| \leq h^{-1} \ q.o.. \tag{iii}$$

Da tecniche standard di approssimazione, il Teorema 3.15 rimane valido per F_h, perché F_h é lipschitziana. Abbiamo allora:

$$(|K|)^{(n-1)/n} \leq n^{-1} \omega_n^{(-1/n)} \frac{|\{x : 0 < d_K(x) < h\}|}{h}.$$

Poiché $|\nabla d_K(x)| = 1$ q.o., la formula di co-area per applicazioni di Lipschitz (Teorema 3.16), implica:

$$\begin{aligned}\frac{|\{x : 0 < d_K(x) < h\}|}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\{0 < d_K(x) < h\}} |\nabla d_K(x)| \, dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{H}^{n-1}[d_K^{-1}(t)] \, dt \\ &= \mathcal{H}^{n-1}[d_K^{-1}(t_h)]\end{aligned}$$

dove $0 < t_h < h$. Dalla regolaritá della frontiera segue inoltre che:

$$\mathcal{H}^{n-1}[d_K^{-1}(t_h)] \to \mathcal{H}^{n-1}[\partial K] \qquad per \quad h \to 0,$$

e dunque otteniamo la diseguaglianza isoperimetrica per insiemi compatti con frontiera regolare in $\mathbb{R}^n$:

$$(|K|)^{(n-1)/n} \leq n^{-1}\omega_n^{(-1/n)}\mathcal{H}^{n-1}[\partial K].$$

■

Concludiamo il paragrafo con una diseguaglianza dovuta a Federer e Fleming (*Normal and integral currents*, Ann. of Math., **72**, 1960)

Teorema 3.19. *(Federer-Fleming)*
Per ogni funzione $f \in BV(\mathbf{R}^n)$ esiste una costante c tale che:

$$\boxed{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)-c|^{n/(n-1)}\,dx\right)^{(n-1)/n} \leq n^{-1}\omega_n^{-1/n}\|f\|_{BV}}$$

dove la costante c é unica e se il supp (f) é compatto si ha $c = 0$.

(vedi [8] pag. 133)

3.4 Cenni sulle *diseguaglianze isoperimetriche* in ambito fisico-matematico

La *diseguaglianza isoperimetrica* é sostanzialmente, come abbiamo visto, una relazione tra il *volume* e la *misura (n-1)-dimensionale della frontiera* di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.
In ambito fisico-matematico, é possibile, come vedremo, "estendere" tale forma di relazione ad alcune quantitá d'interpretazione fisica.

Sicuramente le questioni che storicamente hanno dato il via alla ricerca in questo campo sono: la cosiddetta *congettura di Saint-Venant* (1856) e la *congettura di Rayleigh* (1877).
L' ingegner A.J.C. Barré de Saint-Venant (1797-1886) studiando infatti la torsione di prismi elastici, congetturó che:

Tra tutte le sezioni trasversali di data area, il cerchio deve avere massima rigiditá torsionale.

Il fisico J.W.S. Lord Rayleigh (1842-1919) congetturó invece che:

Tra tutte le membrane di data area e bordo fissato, il cerchio ha la minima frequenza principale.

Ora passeremo a formalizzare velocemente, le questioni appena introdotte.
Consideriamo un prisma elastico, omogeneo ed isotropo,la cui sezione trasversale uniforme, sia un dominio planare Ω.
Quando il prisma é sottoposto a torsione lungo l'asse perpendicolare a Ω tramite un momento $\vec{M}$ si ha che:

$$M = \theta \mu P,$$

dove θ denota l' angolo di rotazione per unitá di lunghezza , μ il modulo di rigiditá, e P una costante geometrica, dipendente dalla forma e dimensioni di Ω.
P viene usualmente chiamata *rigiditá torsionale* della sezione Ω (μP viene chiamata *rigiditá torsionale del prisma*).

Sia $f(x,y)$ un'arbitraria funzione (sufficientemente regolare in Ω) tale che:

$$f(x,y) = 0 \qquad su\ \partial\Omega.$$

Allora

$$\frac{\iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 \, dx \, dy}{4\left(\iint\limits_{\Omega} f \, dx \, dy\right)^2} \geq \frac{1}{P} \tag{3.28}$$

l'uguaglianza é ottenuta se e solo se $f(x,y)$ é proporzionale alla funzione di Prandtl Φ (*stress-function*) i.e. $f = c\Phi$, dove Φ risolve il seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = -2 & \text{in } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.29}$$

(per approfondimenti si veda [31] pag.162)

La precedente caratterizzazione di P é dovuta a G. Pólya ([29] pag.272) ed equivale alla seguente piú usuale in *teoria dell'elasticitá* ([31] pag 157):

$$P = 2\iint\limits_{\Omega} \Phi \, dx \, dy = \iint\limits_{\Omega} |\nabla\Phi|^2 \, dx \, dy.$$

Il vantaggio della prima caratterizzazione stá proprio nel poter dimostrare attraverso solo la simmetrizzazione di Steiner la *congettura di Saint-Venant*. Questa dimostrazione che di seguito accenniamo, é dovuta a G. Pólya, che fu il primo dopo quasi 100 anni a risolvere la questione (per approfondimenti si veda [29] e [28]).

Dimostrazione. (della congettura di Saint-Venant)
Primo passo. Con il procedimento della *simmetrizzazione* si simmetrizza la funzione $f(x,y)$ ed il dominio Ω precedentemente introdotti (vedi [2] pag.47):

$$f(x,y) \rightsquigarrow f^*(x,y), \qquad \Omega \rightsquigarrow \Omega^*.$$

Secondo passo. Si osserva che la *simmetrizzazione* lascia invariato il volume:

$$\iint\limits_{\Omega} f \, dx \, dy = \iint\limits_{\Omega^*} f^* \, dx \, dy$$

e che l'area superficiale é diminuita (vedi [29] pag.269):

$$\iint\limits_{\Omega} (1 + |\nabla f|^2)^{1/2}\, dx\, dy \geq \iint\limits_{\Omega^*} (1 + |\nabla f^*|^2)^{1/2}\, dx\, dy$$

Terzo passo. Dall' ultima relazione si passa a:

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\, dx\, dy \geq \iint\limits_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2\, dx\, dy$$

Quarto passo. Si considera $f = \Phi$ (Φ funzione di Prandtl), allora:

$$\frac{1}{P} = \frac{\iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2\, dx\, dy}{4\left(\iint\limits_{\Omega} f\, dx\, dy\right)^2} \geq \frac{\iint\limits_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2\, dx\, dy}{4\left(\iint\limits_{\Omega^*} f^*\, dx\, dy\right)^2}$$

Quinto passo. Si caratterizza per il dominio Ω^* la *rigiditá torsionale* P^*, come é stato fatto per il dominio Ω in precedenza:

$$\frac{\iint\limits_{\Omega^*} |\nabla f^*|^2\, dx\, dy}{4\left(\iint\limits_{\Omega^*} f^*\, dx\, dy\right)^2} \geq \frac{1}{P^*}$$

concludendo dunque, che:

$$\frac{1}{P} \geq \frac{1}{P^*}$$

o equivalentemante:

$$P^* \geq P.$$

Ora, dalle ormai note proprietá di cui gode il cerchio rispetto alla simmetrizzazione, si puó affermare che i prismi a sezione circolare hanno massima *rigiditá torsionale.* ■

La *congettura di Saint-Venant* (ormai risolta), é stata poi sintetizzata dallo stesso G.Pólya con G.Szegö ([30] Cap.V) nel seguente modo (tipo appunto *diseguaglianza isoperimetrica*):

$$\frac{A^2}{2\pi}\left[1 - 2\delta(1 + \delta \log \frac{\delta}{1+\delta})\right] \leq P \leq \frac{A^2}{2\pi},$$

dove

$$\delta = \frac{L^2}{4\pi A} - 1$$

misura la deviazione del dominio Ω dal cerchio, e A,L sono l'area di Ω e la lunghezza della frontiera $\partial\Omega$.

Per quanto riguarda l'altra congettura quella di Rayleigh, la prima dimostrazione é dovuta a C. Faber (*Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleichen Flache und gleicher Spannung die Kreisformige den tiefsten Grundton gibt*, Bayer,Akad.der Wiss. Math.-Phys, Munich, pp. 169-172, 1923) seguita poco dopo da un' altra di E. Krahn (*Uber eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math.Ann. **94**, 1925) entrambe fondate su tecniche di simmetrizzazione, é interessante comunque notare come la congettura possa essere derivata dal seguente teorema (per la dimostrazione si puó fare riferimento a P. G. Garabedian, *Partial differential equation*, Wiley, New York, 1964, Cap. 11.)

Teorema 3.20. *Se*

$$\inf_{f \in \mathcal{F}_1} \frac{\iint\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 \, dx \, dy}{\iint\limits_{\Omega} f^2 \, dx \, dy} = \lambda_1, \tag{3.30}$$

dove $\mathcal{F}_1$ é l'insieme delle funzioni regolari a tratti in Ω e nulle sulla frontiera $\partial\Omega$, allora λ_1 é il piú piccolo autovalore dell' equazione:

$$\Delta f + \lambda f = 0 \tag{3.31}$$

per soluzioni che si annullano su $\partial\Omega$.

Notiamo adesso, che a differenza del quoziente presente nel Corollario 3.7, quello in (3.30) (chiamato *quoziente di Rayleigh*), non é dimensionalmente invariante. Allora, fissando ad esempio l' area di Ω si ritorna al nostro problema in forma equivalente:

Teorema 3.21. *(congettura di Rayleigh)*
Tra tutti i domini Ω di area fissata, in (3.30) *si ottiene un minimo se e solo se Ω é un cerchio.*

La quantitá λ_1 in effetti ha un' interpretazione fisica. Infatti se consideriamo una membrana omogenea della stessa forma di Ω e fissata lungo la frontiera $\partial\Omega$, le soluzioni di (3.31) nulle su $\partial\Omega$ rappresentano le ampiezze delle vibrazioni della membrana con frequenza $\sqrt{\lambda}$. Gli autovalori λ_n sono cosí i quadrati delle frequenze di vibrazione della membrana e la quantitá λ_1 é la *frequenza principale* o "tono fondamentale" della membrana.
Come giá accennato la prima dimostrazione della *congettura* fu data da C.Faber e E.Krahn i quali sintetizzarono il problema nel modo seguente, tipo diseguaglianza isoperimetrica:

$$\frac{\pi j^2}{A} \leq \lambda_1 \leq \frac{\pi j^2}{A}[1 + (2,8)\delta]$$

dove j é il primo zero positivo della funzione di Bessel J_0 , A é l'area di Ω e δ come definito in precedenza.
Una diseguaglianza dovuta G.Pólya e G.Szegö ([30] pag. 91), lega infine le grandezze precedentemente definite, nel modo seguente:

$$P\lambda_1 < 4A.$$

Molte altre diseguaglianze sono state dimostrate (riguardanti tra l'altro anche la *capacitá elettrostatica*) per le quali si rimanda ai fondamentali testi sull' argomento : [30] e [2].
Per concludere é interessante ricordare brevemente un problema recentemente (anni '70) molto studiato, che si lega tra l'altro al teorema di Rayleigh. Si tratta del cosiddetto *problema isospettrale*:

Possono due differenti domini planari Ω (membrane vibranti) avere lo stesso insieme di λ_n, o equivalentemente lo stesso insieme di frequenze ?

Il titolo dell'articolo che ha storicamente iniziato le ricerche, sintetizza il problema nel modo seguente: *"Can you hear the shape of a drum?"*
Un' approccio é quello di trovare espressioni per proprietá geometriche di Ω in termini delle λ_n, come ad esempio per la connessione di Ω, per la lunghezza di $\partial\Omega$ e l' area di Ω.
Ne segue allora, per esempio, che dall' insieme delle frequenze si potrebbe immediatamente determinare, se la membrana vibrante (il tamburo) é circolare, infatti calcolando L e A solo per il cerchio vale $L^2 = 4\pi A$! Sfortunatamente,

questo é l'unico caso "banale".

Per maggiori dettagli e approfondimenti si veda : Kac, M.: *Can you hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly 73, pp. 1-23, 1966.

Berger, M.: *Geometry of the spectrum.* I, pp. 129-152 di Differential Geometry, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 27, parte II, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

Bibliografia

[1] Apostol, T.M. *Calcolo Vol.3* Bollati Boringhieri, Torino, 1990.

[2] Bandle, C. *Isoperimetric Inequalities and Applications* Pitman, Boston, 1980

[3] Berger, M. *Geometry I*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[4] Berger, M. *Geometry II*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[5] Blaschke, W. *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1916.

[6] Bogomolny, A. *Isoperimetric Theorem and Inequality*, htpp://www.cut-the-knot.com/do-you-know/isoperimetric.html

[7] Bottazzini, U. *Il flauto di Hilbert: storia della matamatica moderna e contemporanea*, UTET, Torino, 1990.

[8] Burago, Yu.D. e Zalgaller V.A. *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[9] Chae, S.B. *Lebesgue Integration (2nd ed.)*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[10] Chisini, O. *Sulla teoria elementare degli isoperimetri*, Questioni riguardanti le matematiche elementari, vol. 3, Bologna, 1927, pp. 201-310.

[11] Dierkes, D. Hildebrandt, S. Kster, A. Wohlrab, O. *Minimal Surfaces I: Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[12] Enriques, F. *Massimi e Minimi nell' Analisi moderna*, Questioni riguardanti le matematiche elementari, vol. 3, Bologna, 1927, pp. 424-468.

[13] Evans, L.C. Gariepy, R.F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[14] Giaquinta, M. Hildebrandt, S. *Calculus of Variations I: The Lagrangian Formalism*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[15] Hadwiger, H. *Vorlesungen ber Inhalt, Oberfiche and Isoperimetrie*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.

[16] Hurwitz, A. Sur le probléme des isopérimétres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **132**, pp. 401-403, 1901.

[17] Hurwitz, A. Sur quelques applications géométriques des series de Fourier, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **19**, pp. 392-394, 1902.

[18] Janich, K. *Topologia*, Zanichelli, Bologna, 1994.

[19] Kazarinoff, N.D. *Disuguaglianze geometriche*, Zanichelli, Bologna, 1972.

[20] Kolmogorov, A.N. Fomin, S.V. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionali*, Editori Riuniti Edizioni Mir, Roma, 1980.

[21] Krasnov, M.L. Makarenko, G.I. Kiselev, A.I. *Calcolo delle Variazioni* Editori Riuniti Edizioni Mir, Roma, 1984.

[22] Lieb, E.H. Loss, M. *Analysis* American Mathematical Society, GSM vol. 14, 1997.

[23] Morgan, F. *Geometric Measure Theory: A Beginners Guide*, Academic Press, Boston, 1988.

[24] Morse, A.P. The behaviour of a function on its critical set, *Ann.Math.*, **40**, pp.62-70, 1939.

[25] Osserman, R. Isoperimetric Inequalities, *Bull. Amer.Math. Soc.*, **84**, pp. 1182-1238, 1978.

[26] Osserman, R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities, *Amer. Math. Monthly*, **86**, pp. 1-29, 1979.

[27] Pagani, C.D. Salsa, S. *Analisi Matematica vol.2*, Masson, Milano, 1991.

[28] Payne, L.E. Weinberger, H.F. Some Isoperimetric Inequalities for Membrane Frequencies and Torsional Rigidity *J. Math. Anal. Appl.*, 2, pp. 210-216, 1961.

[29] Pólya, G. Torsional rigidity, principal frequency, electostatic capacity and symmetrization, *Quart. Appl. Math.*, 6, pp. 267-277, 1948.

[30] Pólya, G. Szegö, G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* Princeton University Press, Princeton, 1951.

[31] Russo, E. Mathematical Problems in Elasticity World Scientific, Singapore, 1996

[32] Sard, A. The measure of the critical value of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48**, pp. 883-890, 1942.

[33] Sernesi, E. *Geomtria 2*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[34] Talenti, G. Best constant in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **110**, pp. 353-372, 1976.

[35] Talenti, G. The Standard Isoperimetric Theorem, in *Handbook of convex geometry*, Volume A, pp.75-123, North-Holland, 1993.

[36] Tesei, A. *Istituzioni di analisi superiore*, Bollati Boringhieri, Torino, 1997.

[37] Webster, R. *Convexity*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[38] Ziemer, W. *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, New York, 1989.