

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di

Filippo Morera

Opzioni Americane: l'algoritmo di Longstaff-Schwartz per la determinazione del prezzo

Relatore

Prof. Sergio Scarlatti

Correlatore

Prof. Alessandro Ramponi

Il Candidato

ANNO ACCADEMICO 2002 - 2003

LUGLIO 2003

Classificazione AMS: 60G40, 62J07, 91B24, 93E24,94A12

Parole chiave: opzioni Americane, tempo di arresto ottimale, metodo Monte Carlo, regressione, minimi quadrati, wavelet.

I contratti d'opzione sono oggi giorno strumenti finanziari diffusi ed usati da moltissimi operatori del mercato mobiliare (investitori istituzionali, banche, assicurazioni, singoli risparmiatori, etc.). Il contratto d'opzione più semplice è la cosiddetta opzione Europea che se è di tipo “call” dà il diritto, ma non l'obbligo, alla scadenza del contratto (*maturità*), di acquistare un'asset finanziario (*sottostante*) ad un certo prezzo prefissato (*prezzo strike*). L'opzione “put” dá invece il diritto a vendere quell'asset ad un prezzo prefissato. I contratti d'opzione possono assumere però caratteristiche più articolate. Ad esempio questo è il caso delle opzioni Americane che incorporano l'ulteriore possibilità di esercitare il diritto d'opzione anche prima della scadenza.

Il prezzo “equo” di vendita (e/o d'acquisto) di un'opzione Europea è stato determinato in modo esplicito all'inizio degli anni settanta dagli economisti F. Black e M. Scholes, [BS73], sotto particolari assunzioni sulla dinamica del prezzo dell'asset sottostante e considerando un mercato privo di frizioni, ipotesi che verranno spiegate più in dettaglio nella Sezione 1.2 di questa tesi. La medesima modellizzazione, applicata al caso della put Americana, non permette però una determinazione analitica esplicita del prezzo di questo contratto ed è inevitabile in questo caso ricorrere a metodi di approssimazione o simulativi. Per una rassegna delle diverse tecniche a tal fine sviluppate da metà degli anni settanta fino ad ora, rimandiamo alla Sezione 1.6. Il metodo che verà invece preso in considerazione in questo lavoro di tesi è un algoritmo (stocastico) sviluppato da F.A. Longstaff e E. Schwartz, [LS01], noto con il nome di Least Squares Monte Carlo (LSM). Tale algoritmo propone un'approssimazione per il calcolo del prezzo di una put Americana basata sul metodo di regressione e sulla simulazione Monte Carlo. Vedremo più avanti come questo algoritmo riesca a tener conto del diritto del sottoscrittore di esercitare il contratto in un qualsiasi istante antecedente la scadenza stabilita T .

Formalmente un contratto put (Europeo e/o Americano) è definito dal

suo pay-off a scadenza

$$\psi(S_T) = \max(K - S_T, 0)$$

dove K è il prezzo strike. Per ogni $t \in [0, T]$ sia $\rho(t, T)$ il coefficiente d'attualizzazione (fattore di sconto) di 1 euro nell'intervallo di tempo $[t, T]$. Allora non è difficile provare che, in assenza di arbitraggio, il prezzo al tempo t di una put Americana con scadenza T è dato da

$$u(t, S_t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}[\rho(t, \tau)\psi(S_\tau)]$$

dove $\mathcal{T}_{t,T}$ rappresenta l'insieme di tutti i tempi di arresto con valori in $[0, T]$, e l'aspettazione è presa rispetto ad una misura di martingala equivalente (vedi appendice B) che supporremo unica. Per maggiori dettagli si rimanda al Teorema 1.3.10 della Sezione 1.2.1. In particolare denotando con P_0 il prezzo al tempo $t = 0$ di una put Americana, avremo:

$$P_0 = u(0, S_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[\rho(0, \tau)\psi(S_\tau)]. \quad (1)$$

È interessante osservare subito che, sebbene a causa del “sup” la determinazione esatta del valore P_0 risulti complicata, limiti dall'alto e dal basso per tale quantità possono essere ottenuti in forma esplicita. Infatti, valgono le seguenti disequazioni:

$$P_0^{eur} = \mathbb{E}[\rho(0, T)\psi(S_T)] \leq P_0 \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,\infty}} \mathbb{E}[\rho(0, \tau)\psi(S_\tau)] = P_0^\infty.$$

Dove P_0^{eur} è il prezzo Black-Scholes di una put Europea mentre P_0^∞ è quello di una put Americana *perpetua*, tale cioè da poter essere esercitata per ogni $t > 0$ senza alcun vincolo di scadenza.

L'algoritmo di Longstaff e Schwartz per il calcolo di (1) si basa inizialmente sull'introduzione di una griglia di tempi finita in $[0, T]$. In altri termini il contratto put iniziale viene approssimato da un'opzione Americana di

tipo *bermudiano* che conti, quindi, solo un numero finito di date d'esercizio $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$.

Con tale scadenziario di date il problema dell'esercizio ottimale si riduce al confronto ad ogni data tra il valore di un'esercizio immediato e un'aspettazione condizionata data dal valore di non esercizio del contratto: quando il primo risulta essere positivo e maggiore della seconda, allora è il momento giusto per esercitare. Nel seguito, con un leggero abuso di notazione, seguiremo a denotare con P_0 il prezzo iniziale dell'opzione put Americana di tipo bermudiano.

Assumendo (S_t) markoviano, introduciamo, al fine di calcolare P_0 , il processo backward dinamico per la put Americana, definito da

$$\begin{cases} P_N &= \psi(S_{t_N}) \\ P_j &= \max(\psi(S_{t_j}), \mathbb{E}[\rho(t_j, t_{j+1})P_{j+1}|S_{t_j}]) \quad 0 \leq j \leq N-1. \end{cases} \quad (2)$$

Ponendo

$$\tau_j = \min(t_k : k \geq j, \psi(S_{t_k}) = P_k),$$

otteniamo

$$P_j = \mathbb{E}[\rho(t_j, \tau_j)\psi(S_{\tau_j})|S_{t_j}].$$

In particolare $\mathbb{E}[P_0] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}[\rho(0, \tau)\psi(S_\tau)] = \mathbb{E}[\rho(0, \tau_0)\psi(S_{\tau_0})]$.

Un passo chiave dell'approccio di Longstaff e Schwartz è quello di introdurre un processo backward anche per i tempi di arresto τ_j descritto da

$$\begin{cases} \tau_N &= T \\ \tau_j &= t_j \mathbf{1}_{A_j} + \tau_{j+1} \mathbf{1}_{A_j^c} \quad 0 \leq j \leq N-1 \end{cases}$$

dove

$$A_j = \{\psi(S_{t_j}) \geq \mathbb{E}[\rho(t_j, \tau_{j+1})\psi(S_{\tau_{j+1}})|S_{t_j}]\}.$$

Passiamo ora a descrivere il passo fondamentale dell'algoritmo LSM, ossia il fatto che l'aspettazione condizionata può essere approssimata, ad ogni tempo t_j , tramite l'applicazione del metodo di regressione, come proiezione ortonormale su uno spazio generato da un numero finito di funzioni di S_t . Consideriamo dunque funzioni misurabili a valori reali date da $(e_k(\cdot))_{k \geq 1}$ soddisfacenti le seguenti condizioni:

A: Per $j = 1, \dots, N - 1$ la sequenza $(e_k(S_{t_j}))_{k \geq 1}$ è totale in $L^2(\sigma(S_{t_j}))$.

B: Per $j = 1, \dots, N - 1$ e $M \geq 1$, se $\sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(S_{t_j}) = 0$ q.c. allora $\alpha_k = 0$ per tutti i k .

Tali ipotesi sono necessarie per i risultati di convergenza richiamati nel paragrafo 1.4.3 di questa tesi. L'aspettazione condizionata che appare in (2) può dunque essere espressa, per ogni t_j , tramite la sua proiezione ortonormale da L^2 sullo spazio vettoriale generato da $\{e_1(S_{t_j}), \dots, e_M(S_{t_j})\}$

$$F(\omega, t_j) = \sum_{k=1}^M \alpha_k e_k(S_{t_j}(\omega)), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Inizializzando $\tau_N^{[M]} = T$ e definendo con e il vettore delle basi e con α_{t_j} il vettore dei coefficienti α_k al tempo t_j otteniamo la seguente struttura backward per i tempi di arresto

$$\tau_j^{[M]} = t_j \mathbf{1}_{A_j} + \tau_{j+1}^{[M]} \mathbf{1}_{A_j^c}$$

dove

$$A_j = \{\psi(S_{t_j}) \geq \alpha_{t_j} \cdot e(S_{t_j})\},$$

e $\alpha_{t_j} \cdot e(S_{t_j})$ è il classico prodotto scalare in \mathbb{R}^M che in questo caso rappresenta la proiezione del processo $\rho(t_j, \tau_{j+1}^{[M]})\psi(S_{\tau_{j+1}^{[M]}})$ sullo spazio in questione. Da tale definizione otteniamo un'approssimazione della funzione del prezzo:

$$P_0^{[M]} = \max\{\psi(S_0), \mathbb{E}[\rho(0, \tau_1^{[M]})\psi(S_{\tau_1^{[M]}})]\}, \quad (4)$$

dove, per costruzione, $\psi(S_0)$ è deterministico.

Il secondo livello di approssimazione passa attraverso la stima con una procedura Monte Carlo del valore $\mathbb{E}[\rho(0, \tau_1^{[M]})\psi(S_{\tau_1^{[M]}})]$. Supponiamo ora di simulare solo un numero limitato L di percorsi indipendenti $\{S_{t_0}^{(l)}, \dots, S_{t_N}^{(l)}\}$ con $l = 1, \dots, L$. Per ogni percorso l stimiamo ricorsivamente $\tau_j^{[M]}$ con

$$\begin{cases} \tau_{N,l}^{[M]} = T \\ \tau_{j,l}^{[M]} = t_j \mathbf{1}_{A_{j,l}} + \tau_{j+1,l}^{[M]} \mathbf{1}_{A_{j,l}^c} \end{cases}$$

dove in linea con quanto detto per i casi precedenti

$$A_{j,l} = \{\psi(S_{t_j}^{(l)}) \geq \hat{\alpha}_{t_j} \cdot e(S_{t_j}^{(l)})\}.$$

Nella formula precedente $\hat{\alpha}_{t_j}$ è il vettore dei coefficienti di regressione per ogni istante t_j definito da

$$\arg \min_{a \in \mathbb{R}^M} \sum_{l=1}^L \left(\rho(t_j, \tau_{j+1,l}^{[M]}) \psi(S_{\tau_{j+1,l}^{[M]}}^{(l)}) - a \cdot e(S_{t_j}^{(l)}) \right)^2.$$

L'implementazione di tale passo dell'algoritmo LSM, consiste dunque nella soluzione mediante il metodo dei minimi quadrati del problema di regressione in cui il vettore delle variabili dipendenti $Y = \{Y_l^j\}_{l=1,\dots,L}$, è dato dai cash-flow scontati al tempo t_j , mentre quello delle covariate $X = \{X_l^j\}_{l=1,\dots,L}$ è determinato tramite la base e calcolata sui valori del prezzo simulati.

Il prezzo di una put Americana può, a questo punto essere stimato tramite la seguente quantità

$$P_0^{[M,L]} = \max \left(\psi(S_0), \frac{1}{L} \sum_{1 \leq l \leq L} \rho(0, \tau_{1,l}^{[M]}) \psi(S_{\tau_{1,l}^{[M]}}^{(l)}) \right). \quad (5)$$

L'algoritmo LSM propone come vettore e basi di tipo potenze o di tipo polinomi come quelli di Laguerre, Legendre, Hermite, Chebyshev e così via. L'idea sviluppata in questa tesi è stata quella di sostituire tali basi con un sistema Wavelet ortonormale opportuno.

Uno dei motivi che hanno suggerito una tale scelta è il grande successo che negli ultimi anni hanno avuto in Statistica i metodi di regressione wavelet, grazie anche ai lavori di Donoho e Johnstone.

Si è resa dunque necessaria l'introduzione di una analisi a più livelli di risoluzione (multiresolution analysis), in seguito indicata con l'acronimo MRA, [Mal89], che è un approccio formale generale alla costruzione di basi ortonormali in $L_2(\mathbb{R})$. L'idea è quella di rappresentare una funzione f come limite di successive approssimazioni ognuna delle quali è una versione più regolare di f . Tali approssimazioni corrispondono a differenti livelli di risoluzione.

In generale, dunque, una MRA in $L_2(\mathbb{R})$, è una successione di sotto-spazi lineari e chiusi $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ di $L_2(\mathbb{R})$ tale che

i) $V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$

ii) $\overline{\cup_j V_j} = L_2(\mathbb{R})$

iii) $\cap_j V_j = \{0\}$

iv) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, f(x) \in V_j \Rightarrow f(x+k) \in V_j$

v) Esiste una funzione $\phi \in V_0$ tale che la famiglia $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale in V_0 .

Definite le funzioni

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad (6)$$

allora, per le proprietà (iv) e (v), la famiglia $\{\phi_{j,k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$ è una base ortonormale in V_j . La costante $2^{\frac{j}{2}}$ è quella di normalizzazione. Poichè $\phi \in V_0$ e $V_0 \subset V_1$, si ha

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_l h_l \phi(2x - l). \quad (7)$$

La funzione ϕ è detta *funzione di scala*. L'equazione (7) è detta *equazione di dilatazione* e i coefficienti h_l , dati da $h_l = \langle \phi, \phi_{1,l} \rangle$, sono detti *coefficienti di filtro*. Sia inoltre W_j il complemento ortogonale di V_j in V_{j+1} , ovvero $V_j \oplus W_j = V_{j+1}$ e $W_j \perp W_{j'}$ per $j \neq j'$. E' possibile dimostrare che

$$L_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad (8)$$

Definita $\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$ per una *wavelet madre* opportuna, la famiglia $\{\psi_{j,k}(x) : k \in \mathbb{Z}\}$ costituisce una base ortonormale per W_j e dunque per la (8),

$$\{\psi_{j,k}(x) : j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (9)$$

è una base ortonormale per $L_2(\mathbb{R})$.

Nel passare quindi dalla scala j alla $j + 1$, si ha

$$P_{j+1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

dove con P_j abbiamo inteso l'operatore di proiezione in V_j . Inoltre, poichè $W_0 \subset V_1$, la wavelet madre può essere espressa nella forma

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_l g_l \phi(2x - l) \quad (10)$$

dove i coefficienti g_l sono scelti come $g_l = (-1)^l \overline{h_{1-l}}$.

L'importanza di una struttura di MRA è costituita dal fatto che, utilizzando le basi ortonormali wavelet, ogni funzione $f \in L_2(\mathbb{R})$ può essere rappresentata in *serie wavelet* come

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x). \quad (11)$$

Data la struttura degli spazi V_j e W_j , è possibile esprimere la (11) come

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (12)$$

Quest'ultima relazione può essere vista come una proiezione ortogonale di f in V_{j_0} , cioè una approssimazione di f , più un insieme di proiezioni di f in W_j , per $j > j_0$, che aggiungono dettagli su f a questa approssimazione.

A livello di implementazione, al fine di usare tali risultati, abbiamo rivisitato l'algoritmo LSM utilizzando le wavelet per approssimare la media scontata del valore dei cash-flow futuri. L'idea principale per determinare una stima di regressione wavelet, è quella di costruire un problema a disegno fissato (*fixed-design*), ovvero dove le covariate X abbiano una struttura equispaziata.

Più precisamente i passi fondamentali della procedura si possono riassumere in:

- i) Trasformare le coppie di dati (X, Y) del problema di regressione nella struttura definita da (Xb, Yb) , dove le Xb sono appunto equispaziate,

usando una procedura di *binning*: per ogni segmento i si definisce quindi

$$Yb(i) = \frac{\sum\{Y(j) \text{ tali che } X(j) \text{ appartenga al segmento } i\}}{\#\{Y(j) \text{ tali che } X(j) \text{ appartiene al segmento } i\}}$$

con la convenzione $\frac{0}{0} = 0$.

- ii) Sviluppo di una decomposizione discreta wavelet delle Yb viste come un segnale f tramite l'algoritmo FWT (*Fast Wavelet Transform*). Le Xb assumono i valori $1, 2, \dots, nb$, dove nb rappresenta il numero dei nodi considerati.
- iii) Filtro dei coefficienti wavelet tramite una delle procedure standard descritte per il de-noise.
- iv) Ricostruzione di una funzione di stima \hat{f} utilizzando i coefficienti filtrati ottenuti al passo (iii) ed il FWT.
- v) Riscalaggio della funzione risultante \hat{f} trasformando i nodi $1, 2, \dots, nb$ nelle X d'origine tramite un'operazione di interpolazione.

I passi (ii) (iii) e (iv) sono operazioni standard per l'applicazione della teoria delle basi wavelet, il primo invece dipende sistematicamente dal numero dei nodi impiegati nel riordinamento di X , che può essere interpretato come una sorta di parametro supplementare per l'ampiezza di banda. Generalmente tale valore nb non viene scelto mai troppo piccolo in relazione al numero delle osservazioni, essendo l'operazione di binning già di per se un filtro che tende a rendere tutto più liscio.

Per l'implementazione della regressione wavelet (figura 1), ci siamo basati sostanzialmente su i due comandi Matlab `ddencmp` e `wdencmp`. Il primo in particolare definisce i parametri ottimali per un dato segnale ed effettua decomposizione wavelet e processo di de-noise, basandosi proprio su tali parametri. Il secondo si occupa invece di ricostruire la stima del segnale originale usando le informazioni già elaborate con il precedente passaggio.

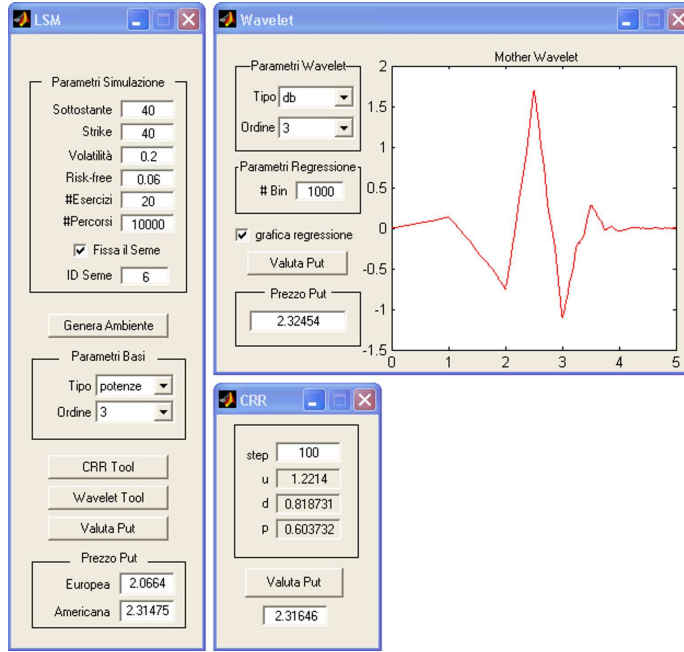


Figura 1: Interfaccia grafica LSM/Wavelet

I risultati ottenuti con le varie procedure, sono riportati nelle tabelle seguenti dove definiamo anche una lista delle famiglie usate per le implementazioni.

nome	simbolo	famiglia	acronimo
Potenze	W_x	Daubechies	db#
Hermite	$H_n(x)$	Symlets	sym#
Legendre	$P_n(x)$	Coiflets	coif#
Laguerre	$L_n(x)$	Biorthogonal	bior#
Chebyshec	$T_n(x)$	Reverse Biorthogonal	rbior#

Ciò che si può osservare facilmente, è una certa stabilità nei valori calcolati tramite l'algoritmo di Longstaff e Schwartz al variare sia del polinomio sia del suo ordine.

Nel caso wavelet invece, come si può notare dai dati riportati in tabella (3), abbiamo riscontrato che questa stabilità viene parzialmente a mancare.

ordine \ tipo	W(x)	H _n (x)	P _n (x)	T _n (x)	L _n (x)
1	2,17939	2,17939	2,17939	2,17939	2,17939
2	2,30303	2,30303	2,30303	2,30303	2,30303
3	2,31475	2,31475	2,31475	2,31475	2,31475
4	2,31459	2,31459	2,31459	2,31459	2,31459
5	2,30963	2,30963	2,30963	2,30963	2,30963
6	2,3121	2,3121	2,3121	2,3121	2,3121
7	2,31087	2,31087	2,31087	2,31087	2,31087
8	2,31689	2,31689	2,31689	2,31689	2,31689
9	2,31578	2,31578	2,31578	2,31578	2,31578

Tabella 1: prezzo per una put Americana (LSM)

ordine \ tipo	W(x)	H _n (x)	P _n (x)	T _n (x)	L _n (x)
1	52"	59"	1' 1"	53"	1' 0"
2	1' 2"	1' 15"	1' 17"	1' 8"	1' 22"
3	1' 11"	1' 34"	1' 45"	1' 30"	1' 56"
4	1' 21"	1' 49"	2' 4"	1' 46"	2' 29"
5	1' 28"	2' 17"	2' 44"	2' 20"	3' 20"
6	1' 38"	2' 43"	3' 20"	2' 6"	4' 17"
7	1' 48"	3' 3"	3' 49"	3' 12"	5' 9"
8	1' 51"	3' 22"	4' 28"	3' 44"	6' 13"
9	1' 54"	3' 56"	5' 17"	4' 26"	7' 28"

Tabella 2: tempi di elaborazione (LSM)





ordine \ tipo	db	sym	coif	ordine \ tipo	bior	rbio
1	2,25835	2,25835	2,33548	1,1	2,25835	2,25835
2	2,30999	2,30999	2,31916	1,3	2,2518	2,32872
3	2,32454	2,32454	2,33074	1,5	2,24589	2,32694
4	2,31936	2,32296	2,3184	2,2	2,34701	2,28606
5	2,31705	2,34238	2,32238	2,4	2,34309	2,27886
6	2,3105	2,32491		2,6	2,3506	2,31475
7	2,33045	2,32266		2,8	2,34781	2,34604
8	2,33908	2,33177		3,1	2,26542	1,88004
9	2,32734	2,32734		3,3	2,34933	2,20748

Tabella 3: prezzo per una put Americana (Wavelet)

tipo ordine	db	sym	coif	tipo ordine	bior	rbio
1	50"	50"	50"	1,1	50"	50"
2	50"	50"	51"	1,3	51"	51"
3	50"	50"	50"	1,5	51"	51"
4	50"	51"	50"	2,2	50"	50"
5	50"	50"	52"	2,4	51"	50"
6	50"	50"	51"	2,6	51"	50"
7	51"	50"	50"	2,8	50"	51"
8	50"	50"	50"	3,1	50"	51"
9	50"	50"	50"	3,3	51"	50"

Tabella 4: tempi di elaborazione (Wavelet)

Va osservato però che a differenza dei risultati prodotti dall'LSM, nel caso wavelet la dipendenza dalla scelta della base è essenziale per il comportamento dell'algoritmo. Selezionare l'una o l'altra onda madre significa soprattutto scegliere come approssimare e quindi filtrare ogni singola oscillazione del segnale analizzato. Una scelta opportuna sembra comunque garantire stabilità e convergenza.

Va invece rimarcato, confrontando i dati della tabella (2) con quelli della tabella (4), come i tempi di esecuzione dell'algoritmo wavelet siano decisamente migliori di quelli ottenuti usando basi polinomiali. L'origine di tale miglioramento va ricercata in quella dipendenza dell'algoritmo di regressione dal parametro di binning. Fissato il numero dei nodi infatti i cicli si stabilizzano e il processo scende di complessità poichè sostituisce ad una buona percentuale di iterazioni complete il più semplice e veloce riordinamento vettoriale.

Bibliografia

- [AO95] Antoniadis, A. e Oppenheim, G. editori (1995). *Wavelets and Statistics*. Proceedings of the Villard de Lans Conferende November 1994. Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag.
- [BC49] Bochner, S. e Chandrashekhara, K. (1949). *Fourier Transforms*. Princeton University, Princeton.
- [BG95] Burrus, C. S. e Gopinath, R. A. (1995). *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms*. Lecture Notes, Rice University, Houston, Texas.
- [BG97] Broadie, M. e Glasserman, P. (1997). *Pricing American-Style Securities using Simulations*. Journal of Economic Dynamics and Control, 21, 1323-1352.
- [BD96] Broadie, M. e Detemple, J. (1996). *American Option Valuation: New Bounds, Approximations and a Comparison of Existing Methods*. Review of Financial Studies, 9, 1211-1250.
- [BJ92] Bunch, D. e Johnson, H.E. (1992). *A simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach*. Journal of Finance, 47, 2, 809-816.
- [BM95] Barraquand, J. e Martineau, D. (1995). *Numerical Valuation of High Dimensional Multivariate American Securities*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 30, 383-405.

- [Boy88] Boyle, P. (1988). *A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22, 1-12.
- [Bre91] Breen, R. (1991). *The Accelerated Binomial Option Pricing Model*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 26, 153-164.
- [Bro97] Broadie, M. (1997). *A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options*. working paper, Columbia University.
- [BS73] Balck, F e Scholes, M (1973). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, 81, 637-59.
- [Chu92] Chui, C. K. (1992). *An introduction to Wavelets*. Accademic Press, New York.
- [CJM92] Carr, P., Jarrow, R. e Mynemi, R. (1992). *Alternative Characterization of American Puts*. Mathematical Finance, 2, 87-106.
- [Coh89] Cohen, L. (1989). *Time-Frequency Distribution-A Review*. Proc. IEEE 77(7), 941-981.
- [CRR79] Cox, J. C., Ross, S.A. e Rubinstein M. (1979). *Option Pricing: A simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 7, 3. 229-263.
- [Dau88] Daubechies, I. (1988). *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets*. Communications on Pure and Applied Mathematics, XLI, 909-996.
- [Dau92] Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, CBMS-NSF Conference Series 61.
- [Dau93] Daubechies, I. (1993). *Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on the theme*. SIAM, J. Math. Anal., 24, 499-519.

- [DJ90] Donoho, D. L. e Johnstone, I. M. (1990). *Minimax Risk over l_p -balls*. Technical Report, Statistic, University of California, Berkeley.
- [DJ92] Donoho, D. L. e Johnstone, I. M. (1992). *Minimax Estimation via Wavelet Shrinkage*. Technical Report 402, Statistic, Stanford University.
- [DJ95] Donoho, D. L. e Johnstone, I. M. (1995). *Adapting to Unknown Smoothness by Wavelet Shrinkage*. Journal of the American Statistical Association, 90, 1200-1224.
- [DJKP95] Donoho, D. L., Johnstone, I. M., Kerkyacharian, G. e Picard, D. (1995). *Wavelet shrinkage: Asymptopia?*. J. R. Statis. Soc. B, 57(2), 301-369.
- [ElK97] El Karoui, N (1997). *Backward Stochastic Differential Equations*. CRC Press.
- [FGK94] Foufoula-Georgiou, E. e Kumar, P., editori, (1994). *Wavelets in Geophisics*. Academic Press.
- [Gab46] Gabor, D. (1946). *Theory of Communication*. J. Inst. Elec. Eng. 93, 429-441.
- [GM84] Grossmann, A. e Morlet, J. (1984). *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*. SIAM j. Math. 15, 723-736.
- [GV95] Goel, P. e Vidakovic, B. (1995). *Wavelets Transformations as Diversity Enhancers*. Discussion Paper, 95-04, ISDS, Duke University.
- [Haa10] Haar, A. (1910). *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme*. Math. Ann. 69, 331-371.
- [HSY96] Huang, J.Z, Subrahmanyam, M.G. e Yu, G.G. (1996). *Pricing and Hedging American Options: A recursive Integration Method*. Review of Financial Studies, 9, 1, 277-300.

- [IZ98] Ibañez, A. e Zapatero, F. (1998). *Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier*. Journal of Finance, 49, 3, 851-886.
- [Jac91] Jacka, S.D. (1991). *Optimal Stopping and the American Put*. Mathematical Finance, 1, 1-14.
- [JR83] Jarrow, R. e Rudd, A. (1983). *Option Pricing*. Dow Jones-Irwin, Homewood, Illinois.
- [JS94] Jawerth, B. e Sweldens, W. (1994). *An Overview of Wavelet Based Multiresolution Analyses*. SIAM Review, 36(3), 377-412.
- [Ju98] Ju, N. (1998). *Pricing American Option by Approximating its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function*. Review of Financial Studies, 11, 3, 627-646.
- [Kar88] Karatzas, I. (1988). *On Pricing of American Options*. Applied Mathematics and Optimization, 17, 37-60.
- [Kim90] Kim, I.J. (1990). *The Analytical Valuation of American Options*. Review of Financial Studies, 3, 547-572.
- [Kus01] Kushner, H. J. e Dupuis, P (2001). *Numerical Methods for Stochastic Problems in Continuous Time (Applications of Mathematics, Vol. 24)*. Springer Verlag.
- [Lam] Lamberton, D.. *Brownian optimal stopping and random walks*. Appl. Math Optimization (forth-coming)
- [LL96] Lamberton, D e Lapeyre, B (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. CRC Press.
- [LS01] Longstaff, F.A. e Schwartz (2001). *Valuing American Options by Simulations: a Simple Least-Squares Approach*. Review of Financial Studies, 14, 1, 113-147.

- [Mal89] Mallat, S. G. (1989). *Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L_2(\mathbb{R})$* . Transactions of the American Mathematical Society 315 (1), 69-87.
- [May92] Mayer, Y. (1992). *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press.
- [MJ94] Motard, R. L. e Joseph, B., editori, (1994). *Wavelet Applications in Chemical Engineering*. Kluwer Academic Publishers.
- [Nas94] Nason, G. P. (1994). *Wavelet Regression by Cross-Validation*. Technical report 447, Statistics, Stanford University.
- [Par77] Parkinson, M. (1977). *Option Pricing: the American Put*. Journal of Business, 50, 21-36.
- [Pro02] Protter, P. (2002). *An analysis of a least squares regression method for American option pricing*. Finance Stochastic. 6, 449-471.
- [RB79] Rendleman, R. e Bartter, B. (1979). *Two-State Option Pricing*. Journal of Finance, 34, 1093-1110.
- [RV91] Rioul, O. e Vetterli, M. (1991). *Wavelet and Signal Processing*. IEEE Signal Processing Magazine, October, 14-38.
- [Spec93] *Special issue on Wavelet and Signal Processing*. IEEE Transactions on Signal Processing, 41 (12), Dec. 1993.
- [Spec92] *Special issue on Wavelet Transform and Multiresolution Signal Analysis*. IEEE Transactions on Information Theory, 38 (2), March 1992.
- [Ste81] Stein, C. (1981). *Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution*. Annals of Statistics, 9 (6), 1135-1151.
- [Str89] Strang, G. (1989). *Wavelets and Dilation Equations: a Brief Introduction*. SIAM Review, 31(4), 614-627.

- [Til93] Tilley, J. (1993). *Valuing American Options in a Path Simulation Model*. Transactions of the Society of Actuaries, 45, 83-104.
- [VH92] Vitterli, M e Herley, C (1992). *Wavelets and Filter Banks: Theory and Design*. IEEE Transaction on Signal Processing, 40, 2207-2232.
- [VM94] Vidakovic, B. e Müller, P. (1994). *Wavelets for kids*. Discussion Paper 94-13, ISDS, Duke University.
- [You93] Young, R. K. (1993). *Wavelet Theory and its Applications*. Kluwer Academic Publishers.