UNIVERSITÁ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÁ DI SCIENZE M. F. N.

Tesi di Laurea in Matematica

presentata da
Michela Notaristefano

IDEALI DIVISORIALI NEI DOMINI DI PRÜFER

Relatore
Prof.ssa Stefania Gabelli

Il Candidato   Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2007-2008
Luglio 2008

Ai miei genitori,
a Davide e a Michela.

Indice

Introduzione

A partire dal diciottesimo secolo, molti matematici tentarono di dimostrare inutilmente quello che è passato alla storia come l'Ultimo Teorema di Fermat, teorema formulato da Pierre de Fermat nel 1637 secondo cui non esistono soluzioni intere positive all'equazione $a^n + b^n = c^n$, con $n > 2$. Tale Teorema venne dimostrato solo nel 1994 da Andrew Wiles e l'argomentazione della dimostrazione sfrutta una serie di nuove tecniche e nuovi strumenti matematici che sono nati a seguito dei fallimenti delle precedenti dimostrazioni e che hanno portato grande ricchezza alla matematica moderna favorendone lo sviluppo e la diversificazione.
Nel 1847 Gabriel Lamè (1795-1870) presentò all'Accademia di Parigi una dimostrazione del Teorema di Fermat la quale si basava sulla supposizione che nell'anello degli interi ciclotomici $\mathbb{Z}[\xi]$, con $\xi \neq 1$ radice complessa p-esima dell'unità, i fattori fossero univocamente determinati. Fu Joseph Liouville (1809-1882) ad osservare l'infondatezza di tale ipotesi ed Eduard Kummer (1810-1893) a mostrare che era del tutto falsa, indicando che già per il numero primo 23, c'era il fallimento del teorema di fattorizzazione per gli interi ciclotomici. Inoltre lo stesso Kummer dimostrò che tale teorema in certi casi poteva essere ripristinato, introducendo così il concetto dei *'numeri ideali'*. Fu questo il primo passo verso la nascita dei domini di Dedekind.
La teoria dei numeri ideali venne trasformata nella moderna teoria degli ideali da Richard Dedekind (1831-1916), il quale osservò che la funzione dei numeri ideali di Kummer poteva essere svolta più generalmente in tutti gli anelli di interi algebrici da particolari sottoinsiemi che egli chiamò, in onore dell'opera svolta dal suo collega, *'ideali'* e dimostrò che in ogni anello di interi algebrici un ideale si può sempre fattorizzare in modo unico nel prodotto di ideali primi. La fattorizzazione unica per gli ideali venne estesa, nel 1919 da Emmy Noether (1882-1935) a tutti quegli anelli soddisfacenti i così detti *'postulati di Noether'* ovvero la stazionarità delle catene ascendenti di ideali, la chiusura integrale e la massimalità degli ideali primi non nulli. Questi anelli vengono oggi chiamati *domini di Dedekind*.
La classe dei domini di Dedekind è l'intersezione di due classi fondamentali

di anelli, gli anelli Noetheriani e i domini di Prüfer. I primi che prendono il nome da Emmy Noether, hanno come modello gli anelli di funzioni algebriche mentre i secondi il cui nome è dovuto a Heinz Prüfer (1896-1934), hanno come prototipo i domini di valutazione.
I domini di Dedekind sono di grande importanza in teoria dei numeri, infatti la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in un campo dei numeri è un dominio di Dedekind. Inoltre essi sono in relazione con le curve algebriche non singolari, in quanto la rappresentazione geometrica della condizione di Dedekind è quella di varietà irriducibili non singolari di dimensione 1. Proprio nell'ambito della geometria algebrica, per studiare le varietà integralmente chiuse, nascono gli *ideali divisoriali*, che sono l'oggetto di questa tesi.
Mentre la struttura degli ideali divisoriali nel caso degli anelli noetheriani integralmente chiusi è ben nota, lo studio degli ideali divisoriali nei domini di Prüfer risale agli anni '80 ed è ancora incompleta. Tuttavia una importante classe dei domini di Prüfer, quella dei domini di Dedekind generalizzati, può essere caratterizzata attraverso buone proprietà di fattorizzazione degli ideali divisoriali. Questa classe coincide con i Domini di Dedekind in dimensione 1.
In questa tesi sono raccolti tutti i risultati noti sugli ideali divisoriali nei domini di Prüfer e sono stati utilizzati nell'ultima parte per lo studio dei domini di Dedekind generalizzati.

La definizione di *ideale divisoriale* per un dominio integro, viene data nel Capitolo 1 nel quale abbiamo anche definito gli *A-moduli*, gli *ideali frazionari* e gli *ideali invertibili*. Abbiamo poi caratterizzato, nel Teorema 1 pag. 18, gli ideali divisoriali di un dominio integro come l'intersezione di ideali invertibili.

Nel Capitolo 2 abbiamo introdotto e sviluppato la nozione di *anello di valutazione*. Ci siamo poi soffermati sullo studio dei suoi sopranelli, mostrando che esiste una corrispondenza biunivoca che inverte l'ordine tra l'insieme dei sopranelli di un dominio di valutazione e l'insieme dei suoi ideali primi.
Abbiamo inoltre definito e caratterizzato gli *ideali primi ramificati* e gli *non ramificati* e abbiamo utilizzato queste nozioni per definire gli *anelli di valutazione discreta* e gli *anelli di valutazione fortemente discreta*. In particolare abbiamo mostrato che in dimensione finita tali classi coincidono ed in dimensione 1 un dominio di valutazione discreta è noetheriano, cioè un DVR.

Nel Capitolo 3 abbiamo introdotto i *domini di Prüfer*, caratterizzati dalla proprietà di essere localmente di valutazione. Abbiamo quindi esteso i risultati dimostrati nel Capitolo 2 a questi domini.

Per i nostri scopi è stato di grande importanza lo studio dei sopranelli dei domini di Prüfer. A questo riguardo abbiamo dimostrato che tali sopranelli sono tutti rappresentabili come intersezione di localizzazioni rispetto ad un particolare insieme di ideali primi. Abbiamo poi stabilito quando il duale di un ideale è un anello e ci siamo occupati del *Trasformato di Nagata*. Lo studio di questo particolare sopranello ci ha permesso di trovare delle condizioni affinché un ideale primo in un dominio di Prüfer o una sua potenza sia divisoriale.
Inoltre analogamente a quanto fatto per gli anelli di valutazione, abbiamo caratterizzato gli ideali primi ramificati nei domini di Prüfer e abbiamo introdotto la nozione di *dominio di Prüfer discreto* e di *dominio di Prüfer fortemente discreto*, concetto, quest'ultimo, che ci ha permesso di definire i domini di Dedekind generalizzati.

All'inizio del Capitolo 4, che conclude la tesi, abbiamo richiamato le proprietà dei *domini di Dedekind*. Ma la nostra attenzione si è diretta soprattutto verso lo studio dei *domini di Dedekind generalizzati*.
Per arrivare a caratterizzare tali domini mediante il concetto di ideale divisoriale, abbiamo dovuto introdurre diverse nozioni. Abbiamo dunque definito gli *ideali traccia*, i domini con la proprietà della traccia (*TP-domini*) e con la proprietà della traccia radicale (*RTP-domini*), dimostrando nel Teorema 52 pag. 70, che un dominio di Dedekind generalizzato D è un RTP-dominio e che inoltre, un ideale di D è un ideale traccia se e solo se si può scrivere come prodotto finito di ideali primi non nulli e non massimali di D.
Abbiamo poi caratterizzato i domini di Dedekind generalizzati mediante il concetto di $\sharp$*-proprietà* e di $\sharp\sharp$*-proprietà* e successivamente abbiamo definito i *sistemi localizzanti*, gli *anelli generalizzati di frazioni* e gli *ideali stabili*, caratterizzando, nel Teorema 21 pag. 77, i domini di Dedekind generalizzati come domini di Prüfer in cui ciascun sistema localizzante di ideali è finitamente generato e, nel Teorema 23 pag. 79, come domini di Prüfer in cui ogni ideale primo non nullo è divisoriale e ogni ideale divisoriale è stabile. Grazie a tutti questi risultati ottenuti, siamo riusciti a fornire la seguente caratterizzazione dei domini di Dedekind generalizzati mediante il concetto di ideale divisoriale

Teorema 25 *Per un dominio R le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *R è un dominio di Prüfer fortemente discreto e ogni prodotto finito di ideali primi non nulli è divisoriale;*

(iii) *R è un dominio di Prüfer e un ideale I di R è divisoriale se e solo se*

$I = JQ_1 \dots Q_n$ con J ideale frazionario invertibile e $\{Q_i\}_{i=1}^n$ collezione non banale di ideali primi a due a due comassimali se $n > 1$.

Capitolo 1

Ideali divisoriali

In questo capitolo trattiamo il concetto di ideale divisoriale in un dominio integro e ne vediamo le principali proprietà. Introduciamo la nozione di A-modulo grazie alla quale oltra a caratterizzare gli elementi interi, definiamo gli ideali frazionari. Ci occupiamo, poi, degli ideali frazionari invertibili vedendo come questi sono legati agli ideali divisoriali.

1.1 A-moduli

Iniziamo con l'introdurre gli A-moduli. Poiché questa nozione ci permette di caratterizzare gli elementi interi, ricordiamo la definizione di questi ultimi.

Definizione 1 *Sia B un anello commutativo unitario e sia A un sottoanello di B. Un elemento x di B si dice **intero su A** se x è radice di un polinomio monico a coefficienti in A, ossia x soddisfa un'equazione della forma*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

dove gli a_i sono elementi di A.

Definizione 2 *Sia B un anello commutativo e unitario. Un suo sottoanello A si dice **integralmente chiuso in B** se*

$$A = \bar{A}^B := \{x \in B \text{ tale che } x \text{ è intero su } A\}$$

*Inoltre se $B = Qz(A)$, allora A è detto **integralmente chiuso**.*

A questo punto definiamo un A-modulo.

Definizione 3 *Sia A un anello commutativo unitario e sia $(M, +)$ un gruppo additivo abeliano. Si dice che M è un **A-modulo** se l'applicazione così definita, detta **moltiplicazione scalare**,*

$$\theta : A \times M \longrightarrow M$$

$$(a, m) \longrightarrow am$$

è lineare, associativa su A e tale che $\theta(1, m) = 1m = m$.

Ad un A-modulo M si estendono le nozioni di sottogruppo, gruppo quoziente e omomorfismo di gruppo nel modo seguente:

Definizione 4 *Sia A un anello commutativo e unitario, un **sotto A-modulo** M' di M è un sottogruppo di M chiuso rispetto alla moltiplicazione per gli elementi di A.*

Definizione 5 *Sia A è un anello commutativo unitario e M un A-modulo, se x è un elemento di M, l'insieme di tutti i multipli ax con $a \in A$ è un sottomodulo di M, denotato con Ax oppure (x) ed detto sotto A-modulo **ciclico**. Inoltre se $M = \sum_{i \in I} ax_i$, si dice che gli elementi x_i formano un **sistema di generatori**.*

Notiamo che nelle ipotesi della Definizione 5, se gli x_i formano un sistema di generatori, ogni elemento di M può venire espresso come una combinazione lineare finita degli x_i a coefficienti in A che non è necessariamente unica.

Definizione 6 *Sia A è un anello commutativo unitario, un A-modulo M si dice **finitamente generato** se possiede un sistema finito di generatori.*

Definizione 7 *Sia A un anello commutativo e unitario, M un A-modulo e N un sotto A-modulo. Allora N è normale in quanto M è abeliano ed il **gruppo quoziente** $\frac{M}{N}$ è un A-modulo rispetto alla moltiplicazione scalare*

$$A \times \frac{A}{M} \longrightarrow \frac{A}{M}$$

$$(a, m + N) \rightarrow am + N$$

Definizione 8 *Sia A un anello commutativo e unitario, siano inoltre M ed N due A-moduli. Un'applicazione*

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

*è un **omomorfismo tra A-moduli** , se*

$$\varphi\left(am_1 + bm_2\right) = a\varphi\left(m_1\right) + b\varphi\left(m_2\right)$$

per ogni $a,\, b \in A$ e per ogni coppia di elementi $m_1,\, m_2 \in M$.

L'insieme di tutti gli omomorfismi di A-moduli da M a N può venir dotato di una struttura di A-modulo definendo

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(af)(x) = af(x).$$

per ogni $x \in M$ e per ogni f, g omomorfismi da M in N. Tale A-modulo si denota con il simbolo $\mathrm{Hom}(M,\, N)$.

Definizione 9 *Sia A un anello commutativo unitario e sia M un A-modulo. L'insieme*

$$Ann_A(M) := \{a \in A \text{ tale che } aM = 0\}$$

*è detto l'**annullatore** di M. Se l'annullatore di M è nullo, allora si dice che M è un A-modulo **fedele**.*

La prossima Proposizione, è quella che ci permette di caratterizzare gli elementi interi mediante il concetto appena introdotto di A-modulo e di A-modulo fedele.

Proposizione 1 *Sia B un anello commutativo unitario e A un suo sottoanello. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *$x \in B$ è intero su A;*

(ii) *$A[x]$ è un A-modulo finitamente generato;*

(iii) *Esiste C sottoanello di A, finitamente generato come A-modulo tale che $A[x] \subseteq C$;*

(iv) *Esiste un $A[x]$-modulo fedele M che è finitamente generato come A-modulo.*

Dimostrazione.

(i)⇒(ii) Per ipotesi, x è intero su A, quindi esistono degli elementi a_0, a_1, …, $a_n \in A$ tali che

$$x^n = -\left(a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0\right)$$

e dunque

$$A[x] = A + xA + x^2A + \ldots + x^{n-1}A$$

(ii)⇒(iii) Basta considerare $C = A[x]$.

(iii)⇒(iv) Basta prendere $M = C$, il quale è un $A[x]$-modulo fedele.

(iv)⇒(i) Consideriamo l'applicazione

$$\varphi : M \to M$$

$$m \to xm$$

allora, poiché φ è un endomorfismo A-moduli, ovvero $\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$ e poiché M un $A[x]$-modulo fedele, φ è un endomorfismo di A-moduli tale che $\varphi(M) \subseteq IM$ dove $I = A$ è un ideale di A.
Sono quindi soddisfatte le ipotesi del *Lemma di Nakajama* (cfr. [1], Proposizione 2.4, pag. 44), dunque esistono a_0, a_1, …, $a_n \in A$ tali che $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, cioè x è intero.

1.2 Ideali frazionari

In questa sezione, definiamo il concetto di 'ideale frazionario' e ne vediamo le principali proprietà. Utilizzeremo questa nozione anche nei prossimi capitoli, in particolare riusciremo a caratterizzare i domini di Dedekind generalizzati attraverso gli ideali frazionari non nulli invertibili.

Definizione 10 *Sia A un dominio di integrità e K il suo campo dei quozienti. Un sotto A-modulo I di K si dice un **ideale frazionario** di A se esiste $a \in A - \{0\}$ tale che $aI \subseteq A$*

Osservazione 1 Notiamo che:

1. Ogni ideale intero di A è frazionario ottenuto ponendo $a = 1$.

2. Posto $J := aI$, abbiamo che questo è un ideale di A essendo I un A-modulo. Quindi ogni ideale frazionario è del tipo $I = a^{-1}J$ con J ideale intero di A e $a^{-1} \in K$.

3. Ogni sotto A-modulo di un ideale frazionario, è un ideale frazionario.

La prossima proposizione ci fornisce una condizione sufficiente affinché un ideale in un dominio integro sia frazionario.

Proposizione 2 *Sia A un dominio integro e K il suo campo dei quozienti. Ogni sotto A-modulo I di K finitamente generato è un ideale frazionario.*

DIMOSTRAZIONE. Se I è generato da $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementi di K, possiamo scrivere per ogni i, $x_i = a_i/b_i$ con a_i, $b_i \in A$ e $b_i \neq 0$. Dunque posto $a := b_1 b_2 \ldots . b_n$ si ha $aI \subseteq A$ e perciò I è un ideale frazionario.

Quindi tutti i sotto A-moduli ciclici di K sono ideali frazionari e sono detti **ideali frazionari principali**.

Sia A un domino integro, indichiamo con $\mathcal{F}(A)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di A. Come per gli ideali interi, anche per gli ideali frazioneri possiamo definire delle operazioni. Siano I, J due ideali frazionari di A, consideriamo

- $I \cap J := \{x \in A$ tale che $x \in I$ e $x \in J\}$
- $I + J := \{x + y$ tale che $x \in I$, $y \in J\}$
- $IJ := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ tale che $x_i \in I$, $y_i \in J$, $n \in \mathbb{N}\}$

Notiamo che $\mathcal{F}(A)$ è chiuso rispetto alle operazioni sopra descritte, infatti essendo I, J ideali frazionari, esistono a, $b \in A - \{0\}$ tali che $aI \subseteq A$ e $bI \subseteq A$, allora risulta che

- $ab(I + J) \subseteq A$
- $ab(IJ) \subseteq A$
- $a(I \cap J) \subseteq A$ e $b(I \cap J) \subseteq A$

In particolare abbiamo rispetto alla moltiplicazione, $\mathcal{F}(A)$ è un semigruppo unitario, la cui unità è A.
Inoltre $\mathcal{F}(A)$ è un semigruppo parzialmente ordinato rispetto alla relazione di inclusione, cioè la moltiplicazione è un'operazione compatibile con tale relazione: se $I,\ J,\ H \in \mathcal{F}(A)$ e $I \subseteq J$ allora $IH \subseteq JH$.

Definiamo ora il concetto di 'conduttore' e ne vediamo le principali proprietà.

Definizione 11 *Sia A un dominio integro con campo dei quozienti K e siano $I,\ J \in \mathcal{F}(A)$. Il **conduttore di** J **in** A è il seguente sotto A-modulo di K*

$$(I :_K J) := (I : J) := \{x \in K \text{ tale che } xJ \subseteq I\}.$$

Poniamo, inoltre

$$(I : xA) = (I : x) := x^{-1}I$$
$$(xA : J) := (x : J)$$
$$(I :_A J) := (I : J) \cap A$$

Proposizione 3 *Sia A un dominio integro con campo dei quozienti K. Per ogni $I,\ J,\ H \in \mathcal{F}(A)$ e per ogni famiglia di ideali frazionari $\{I_l\}_{l \in L}$, valgono le seguenti proprietà:*

(1) $(I : J) \in \mathcal{F}(A)$;

(2) *Se $J \subseteq A$, allora $I \subseteq (I : J)$;*

(3) *Se $H \subseteq J$, allora $(I : J) \subseteq (I : H)$ e $(H : I) \subseteq (J : I)$;*

(4) $(I : J)J \subseteq I$;

(5) $((I : J) : H) = (I : JH) = ((I : H) : J)$;

(6) $(\bigcap_{l \in L} I_l : J) = \bigcap_{l \in L}(I_l : J)$;

(7) $(J : \sum_{l \in L} I_l) = \bigcap_{l \in L}(J : I_l)$.

Dimostrazione.

(1) Abbiamo che $(I : J)$ è un sotto A-modulo di K. Bisogna, quindi, mostrare che esiste un elemento $a \in A - \{0\}$ tale che $a(I : J) \subseteq A$.
Per ipotesi abbiamo che $I,\ J \in \mathcal{F}(A)$, perciò esistono $s,\ t \in A - \{0\}$ tali che $sI \subseteq A$ e $tI \subseteq A$
Ora per ogni $j \in J \cap A$ si ha $j(I : J) \subseteq I$ dunque $stj(I : J) \subseteq stI \subseteq A$ con $a := stj \in A - \{0\}$.

(2) Segue dalla definizione.

(3) Segue dalla definizione.

(4) Sia $x \in (I : J)J$, vogliamo verificare che $x \in I$.
Possiamo scrivere $x = \sum_i a_i b_i$ dove $a_i \in (I : J)$ e $b_i \in J$.
Ora $a_i \in (I : J)$, quindi $a_i J \subseteq I$ dunque $a_i b_i \subseteq I$. Ma questo significa che $x \in I$.

(5) Notiamo che se $x \in (I : JH)$, allora $xJH \subseteq I$ e quindi $xJ \subseteq (I : H)$ da cui segue che $x \in ((I : H) : J)$ e dunque $((I : H) : J) \supseteq (I : JH)$.
Perciò basta verificare l'altra inclusione.

$$((I : H) : J) = \{x \in K \mid xJ \subseteq (I : H)\} = \{x \in K \mid xJ \subseteq \{y \in K \mid yH \subseteq I\}\}$$

$$\subseteq \{x \in K \mid xJH \subseteq I\} = (I : JH).$$

In modo del tutto analogo si dimostra l'altra ugualianza.

(6) Abbiamo che

$$x \in (\bigcap_{l \in L} I_l : J) \Leftrightarrow xJ \subseteq \bigcap_{l \in L} I_l \Leftrightarrow xJ \subseteq I_l \text{ per ogni } l \in L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (I_l : J) \text{ per ogni } l \in L \Leftrightarrow x \in \bigcap_{l \in L} (I_l : J).$$

(7) Abbiamo che

$$x \in (J : \sum_{l \in L} I_l) \Leftrightarrow x \sum_{l \in L} I_l \subseteq J \Leftrightarrow xI_l \subseteq J \text{ per ogni } l \in L \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (J : I_l) \text{ per ogni } l \in L \Leftrightarrow x \in \bigcap_{l \in L} (J : I_l).$$

1.3 Ideali frazionari invertibili

Ora definiamo gli 'ideali frazionari invertibili' e vediamo come questi sono legati al concetto di 'conduttore'.

Definizione 12 *Un ideale frazionario I di un dominio integro A, si dice* ***ideale frazionario invertibile*** *se esiste $J \in \mathcal{F}(A)$ tale che $IJ = A$.*

Proposizione 4 *Sia A un dominio integro e $I \in \mathcal{F}(A)$. Se esiste J tale che $JI = A$, allora J è unico e si ha $J = (A : I)$.*

Dimostrazione. Se esiste J tale che $IJ = A$, allora $J \subseteq (A : I)$. Quindi abbiamo che $A = IJ \subseteq (A : I)I \subseteq A$ perciò $IJ = (A : I)I$ da cui $J = (A : I)$.

Denotiamo l'inverso di I con I^{-1}. Osserviamo che in generale si ha $II^{-1} \subseteq A$ e l'ugualianza vale nel caso di ideali frazionari invertibili.

Vediamo ora le principali proprietà degli ideali frazionari invertibili.

Proposizione 5 *Sia A un dominio integro e $I \in \mathcal{F}(A)$ invertibile. Allora si hanno le seguenti proprietà:*

(1) *I è finitamente generato;*

(2) *Se $H \subseteq I$, allora $H = IJ$ con $J \subseteq A$;*

(3) *Se $H,\ J \in \mathcal{F}(A)$, allora $(IJ : H) = I(J : H)$;*

(4) *Se $H,\ J \in \mathcal{F}(A)$, allora $(H : IJ) = (A : I)(H : J)$.*

Dimostrazione.

(1) Poiché I è invertibile $II^{-1} = A$, quindi

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ con } x_i \in I \text{ e } y_i \in I^{-1}.$$

Consideriamo $a \in I$ allora

$$a = a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(ay_i) \text{ dove } ay_i \in II^{-1} = A.$$

Dunque I è generato da $x_1,\ \ldots,\ x_n$.

(2) Scegliamo $J := HI^{-1} = H(A : I)$. In questo modo, abbiamo che $H = JI$ e $J = H(A : I) \subseteq I(A : I) \subseteq A$.

(3) Per mostrare l'ugualianza, osserviamo che

$$x \in (IJ : H) \Leftrightarrow xH \subseteq IJ \Leftrightarrow xHI^{-1} \subseteq IJI^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xI^{-1}H \subseteq J \Leftrightarrow xI^{-1} \subseteq (J : H).$$

Ma essendo I invertibile, abbiamo che $x \in I(I : H)$ da cui la tesi.

(4) Come per il punto (3), anche in questo caso per mostrare l'ugualianza notiamo che

$$x \in (H : IJ) \Leftrightarrow xIJ \subseteq H \Leftrightarrow xI \subseteq (H : J) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xII^{-1} \subseteq I^{-1}(H : J) \Leftrightarrow x \in I^{-1}(H : J) = (A : I)(H : J).$$

Corollario 1 *Sia A un dominio integro e $I,\ J,\ H \in \mathcal{F}(A)$. Allora si ha*

1. $x\,(J : H) = (xJ : H) = (J : x^{-1}H)$;
2. $(xI : xI) = (I : I)$;
3. *Se I è invertibile, allora $(I : I) = A$.*

Nel caso di anelli locali, possiamo caratterizzare gli ideali frazionari invertibili. A tale proposito ricordiamo la definizione di anello locale:

Definizione 13 *Un anello commutativo unitario A si dice* ***anello locale*** *se ha un unico ideale massimale.*

Osservazione 2 Spesso un anello locale A si indica con la scrittura (A, M) o anche (A, M, k) dove M è l'unico ideale massimale e $k := A/M$ è detto **campo residuo** dell'anello locale A.

Possimo caratterizzare gli anelli locali mediante la seguente proposizione:

Proposizione 6 *Sia A un anello commutativo unitario e sia $U(A)$ l'insieme dei suoi elementi invertibili. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *A è un anello locale;*

(ii) *$A - U(A)$ è un ideale;*

(iii) *$A - U(A)$ è un ideale massimale.*

Dimostrazione. **(i)$\Rightarrow$(ii)** Sia M l'unico ideale massimale di A. Vogliamo dimostrare che $M = A - U(A)$.
Ovviamente $A - U(A) \supseteq M$, quindi per concludere la dimostrazione, basta dimostrare l'altra inclusione.
Sia $x \in A - M$. Allora $x \in U(A)$, altrimenti l'ideale xA non sarebbe contenuto in alcun ideale massimale di A, cosa non possibile per il *Lemma di Zorn*. Dunque $A - U(A) \subseteq M$. Da cui la tesi.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Per ipotesi, sappiamo che $A - U(A)$ è un ideale. Sia M un ideale massimale di A tale che $A - U(A) \subseteq M$. Vogliamo dimostrare che vale l'ugualianza. Ma questo segue dal fatto che l'intersezione tra M e $U(A)$ è vuota.

(iii)$\Rightarrow$(i) Sia M un ideale massimale di A. Allora $M \subseteq A - U(A)$. Ma per ipotesi $A - U(A)$ è massimale, quindi $M = A - U(A)$.

Osservazione 3 Per la Proposizione 6, l'unico ideale massimale in un anello locale A è esattamente l'ideale $M := A - U(A)$.

Con la prossima proposizione caratteriziamo gli ideali frazionari invertibili in un anello locale:

Proposizione 7 *Sia A un anello locale con ideale massimale M. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *$I \in \mathcal{F}(A)$ è invertibile;*

(ii) *$I \in \mathcal{F}(A)$ è principale.*

Dimostrazione. **(i)$\Rightarrow$(ii)** Notiamo che I è un ideale frazionario, quindi $I = a^{-1}J$ con J ideale intero di A ed $a \in Qz(A)$. Perciò non è restrittivo limitarsi a dimostrare l'enunciato per I ideale intero di A.
Notiamo subito che possiamo supporre $I \subset M$ altimenti la tesi sarebbe banalmente verificato in quanto $I = A$.
Per ipotesi I è invertibile, quindi I è finitamente generato. Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ i suoi generatori. Poiché $II^{-1} = A$

$$1 = \sum a_i b_i \text{ dove } a_i \in I \text{ e } b_i \in I^{-1}$$

e perciò esiste $a_i b_i \in A - M = U(A)$ altrimenti $1 \in M$ che è assurdo. Quindi, a meno di riordinare i termini della sommatoria, possimo supporre $a_1 b_1 \in A - M$ e quindi $I = a_1 A$. Infatti per ogni $i = 2, \ldots, n$ si ha

$$a_i = a_i a_1 b_1 (a_1 b_1)^{-1} = a_1 (a_i b_1)(a_1 b_1)^{-1} \in a_1 A.$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Poiché I è principale, $I = xA$ dunque $I^{-1} = (A : I) = (A : xI) = x^{-1}A$ e $(xA)(x^{-1}A) = A$ da cui la tesi.

Notiamo che nella Proposizione 7, nel dimostrare l'implicazione (ii)$\Rightarrow$(i), non utilizziamo l'ipotesi che A sia un anello locale, quindi abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 8 *In un dominio integro A, ogni ideale frazionario principale è invertibile.*

Ricordiamo che se P è un ideale primo in un anello A, allora A_P è un anello locale con unico ideale massimale PA_P. Tenendo conto di questo fatto vediamo cosa succede agli ideali invertibili quando si localizza.

Proposizione 9 *Sia A un dominio integro e sia $I \in \mathcal{F}(A)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *I è invertibile;*

(ii) *I è finitamente generato e $IA_P := I_P$ è invertibile per ogni ideale primo P di A;*

(iii) *I è finitamente generato e $IA_P := I_P$ è principale per ogni ideale primo P di A.*

(iv) *I è finitamente generato e $IA_M := I_M$ è invertibile per ogni ideale massimale M di A;*

(v) *I è finitamente generato e $IA_M := I_M$ è princiapale per ogni ideale massimale M di A.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Poiché I è invertibile, I è finitamente generato e inoltre, essendo I invertibile, $A = II^{-1} = I(A : I)$. Quindi

$$A_P = [I(A : I)]_P = I_P(A : I)_P = I_P(A_P : I_P)$$

e perciò I_P è invertiblie.

(ii)⇔(iii) Poiché A_P è un anello locale, l'enunciato segue dalla Proposizione 7 pag. 14.

(ii)⇒(iv) Ovvio.

(iv)⇔(v) Ovvio.

(v)⇒(i) Per l'equivalenza tra le asserzioni (iv) e (v) sappiamo che per ogni ideale massimale M di A, $[I : (A : I)]_M = [I_M : (A_M : I_M)] = A_M$. Quindi $I(A : I) \not\subseteq M$ per ogni ideale massimale M di A e perciò $I(A : I) = A$ da cui segue che I è invertibile.

1.4 Ideali divisoriali

Introduciamo ora gli 'ideali divisoriali' e come accennato nell'Introduzione, ne vediamo alcune proprietà grazie alle quali potremmo caratterizzare tali ideali mediante la nozione di ideali invertibili.

Sia A un dominio integro con campo dei quozienti K. Definiamo su $\mathcal{F}(A)$ la seguente applicazione:

$$\begin{aligned} v : \mathcal{F}(A) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \\ I \quad &\mapsto \quad I_v := (A : (A : I)) \end{aligned}$$

Questa applicazione soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $A_v = A$;

(2) $(xI)_v = xI_v$ per ogni $x \in K$;

(3) $I \subseteq I_v$ per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$;

(4) Se $I \subseteq J$, allora $I_v \subseteq J_v$ per ogni $I,\ J \in \mathcal{F}(A)$;

(5) $(I_v)_v = I_v$ per ogni $I \in \mathcal{F}(A)$.

Definizione 14 *Un ideale $I \in \mathcal{F}(A)$ si dice **v-ideale** o anche **ideale divisoriale** se $I = I_v$*

Osserviamo che, poiché v soddisfa le proprietà (3), (4), (5), I_v è il più piccolo ideale divisoriale contenente I. Per questo motivo I_v è anche detto **v-chiusura** o **chiusura divisoriale** di I.

Notiamo che se I è un ideale principale in un dominio integro A, allora $I = xA$ e quindi per la proprietà (1), $I = xA_v$. Applicando la proprietà (2), otteniamo che $I = (xA)_v = I_v$, cioè I è divisoriale. Abbiamo così dimostrato che

Proposizione 10 *In un dominio integro A ogni ideale frazionario principale è divisoriale.*

Il prossimo risultato, mette in relazione gli ideali divisoriali con il conduttore.

Proposizione 11 *Sia A un dominio integro. Per ogni $I,\ J \in \mathcal{F}(A)$ si hanno le seguenti proprietà:*

(1) $(I_v : J) = (I_v : J_v)$*;*

(2) $(A : J) = (A : J_v)$*;*

(3) *Se I è divisoriale, allora $(I : J)$ è divisoriale.*

Dimostrazione.

(1) Sappiamo che $J \subseteq J_v$ allora $(I_v : J_v) \subseteq (I_v : J)$. Verifichiamo l'altra inclusione. Se $x \in (I_v : J)$, allora abbiamo

$$xJ \subseteq I_v \Rightarrow (xJ)_v \subseteq (I_v)_v \Rightarrow xJ_v \subseteq I_v \Rightarrow x \in (I_v : J_v)$$

da cui la tesi.

(2) Segue dal punto (1) osservando che $A = A_v$.

(3) Consideriamo prima il caso in cui $I = A$. Abbiamo, allora che

$$(I : J)_v = (A : J)_v = (A : (A : (A : J))) =$$

$$= (A : J_v) = (A : J) = (I : J)$$

Ora passiamo al caso generale. Sia $I \in \mathcal{F}(A)$ un ideale divisoriale allora, $I = I_v = (A : H)$ con $H := (A : I) \in \mathcal{F}(A)$. Quindi, per la Proposizione 3 pag. 10, $(I : J) = ((A : H) : J) = (A : HJ)$. Poiché $HJ \in F(A)$, per quanto detto inizialmente si ha che $(A : HJ)$ è divisoriale, e dunque lo è anche $(I : J) = (A : HJ)$.

Tramite le prossime due Proposizioni, iniziamo a vedere come gli ideali divisoriali sono legati agli ideali invertibili e all'intersezione di ideali divisoriali stessi.

Proposizione 12 *Sia A un dominio integro e $I \in \mathcal{F}(A)$. Allora*

(1) *I è un ideale divisoriale se e soltanto se $I = (A : H)$ per qualche $H \in \mathcal{F}(A)$;*

(2) *Se I è invertibile, allora I è divisoriale;*

(3) $I_v = \bigcap \{xA \text{ tale che } x \in K - \{0\},\ I \subseteq xA\}$.

DIMOSTRAZIONE.

(1) Segue dalla Proposizione 11 pag. 17.

(2) Per ipotasi sappiamo che I è invertibile, quindi $(I^{-1})^{-1} = (A : I)^{-1} = I$ perciò $(A : (A : I)) = I$ quindi I è divisoriale.

(3) Se $I \subseteq xA$ allora abbiamo che $I_v \subseteq (xA)_v = xA_v = xA$ per ogni $x \in K - \{0\}$.
Verifichiamo l'inclusione opposta. Sia $J := \{xA : x \in K - \{0\}, I \subseteq xA\}$. Vogliamo dimostrare che $I_v \supseteq J$. Supponiamo per assurdo che $I_v \not\supseteq J$, allora esiste $y \in J - I_v$. Ma poiché $I_v := (A : (A : I))$, si ha che $y(A : I) \nsubseteq A$. Perciò esiste $z \in (A : I)$ tale che $yz \notin A$, ovvero $y \notin z^{-1}A$ e ciò è una contraddizione. Infatti se $z \in (A : I)$, si ha $zI \subseteq A$ e quindi $I \subseteq z^{-1}A$. Perciò $J \subseteq z^{-1}A$ ed, essendo $y \in J$, allora $y \in z^{-1}A$.

Proposizione 13 *Sia A un dominio integro e siano I, $J \in \mathcal{F}(A)$ ideali divisoriali tali che $I \cap J \neq (0)$. Allora $I \cap J$ è divisoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $I = (A : H)$ con $H \in \mathcal{F}(A)$, e sia $J = (A : N)$ con $N \in \mathcal{F}(A)$. Allora $I \cap J = (A : H) \cap (A : N) = (A : H + N)$ dove $H + N \in \mathcal{F}(A)$.

Da quanto abbiamo visto finora, otteniamo subito il seguente Teorema che ci permette di caratterizzare gli ideali divisoriali in un dominio integro.

Teorema 1 *Sia I un ideale divisoriale in un dominio integro A. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *I è divisoriale;*

(ii) *I è intersezione di ideali principali;*

(iii) *I è intersezione di ideali invertibili;*

(iv) *I è intersezione di ideali divisoriali.*

Capitolo 2

Anelli di valutazione

In questo capitolo studiamo gli anelli di valutazione, vedendone le principali proprietà degli ideali e dei sopranelli. Diamo la definizione di ideale primo ramificato e non ramificato grazie alla quali definiamo gli anelli di valutazione discreta e gli anelli di valutazione fortemente discreta.

Definizione 15 *Sia K un campo. Un sottoanello V di K si dice **anello di valutazione** se per ogni $x \in K - V$, $x^{-1} \in V$.*

Proposizione 14 *Sia V un anello di valutazione sul campo K e sia $U(V)$ l'insieme degli elementi invertibili di V. Allora*

(1) *Per ogni $x \in K - V$, $x^{-1} \in V - U(V)$;*

(2) *$K = Qz\,(V)$;*

(3) *V è locale;*

(4) *V è integralmente chiuso.*

Dimostrazione.

(1) Poiché $x \in K - V$, allora $x^{-1} \in V$. Inoltre $x \notin U(V)$ altrimenti si avrebbe $(x^{-1})^{-1} = x \in V$ che è contro l'ipotesi.

(2) Abbiamo che $K \supseteq Qz(V)$, dunque per dimostrare l'enunciato, dobbiamo verificare che valga l'inclusione opposta. Sia $x \in K - V$, allora $x^{-1} \in V$ e $x = \frac{1}{x} \in Qz\,(V)$.

(3) Per dimostrare l'enunciato, basta verificare che $M := V - U(V)$ è un ideale.

Siano $x, y \in M$, allora $x \pm y \in V$. Possiamo supporre che $xy^{-1} \in V$, quindi se per assurdo $x \pm y \in U(V)$, allora si avrebbe

$$(x \pm y)\, y^{-1} = (xy^{-1} \pm 1) \in V$$

dunque $y^{-1} \in V$ che è assurdo, perciò $x \pm y \in M$.
Sia ora $x \in M - U(V)$ e sia $\alpha \in V$, allora $x\alpha \in V$ inoltre $x\alpha \notin U(V)$, altrimenti si avrebbe che $x \in U(V)$ che è una contraddizione.

(4) Sia $x \in K$ intero su V. Se $x \in V$ allora V è integralmente chiuso. Quindi possiamo supporre $x \notin V$ e quindi $x^{-1} \in V$.
Per mostrare che $V = \bar{V}^K$, basta verificare che $x \in V$. Ora x è intero, quindi esistono $a_i \in V$ tali che

$$x^n = -\left(a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0\right)$$

dunque dividendo tutto per $x^{n-1} \in V$ si ha

$$x = -\left(a_{n-1} + a_{n-2}\frac{1}{x} \ldots a_0 \frac{1}{x^{n-1}}\right) \in V$$

da cui la tesi.

Osservazione 4 Non è vera l'implicazione opposta, cioè

$$V \text{ locale } \not\Rightarrow V \text{ di valutazione}$$

Infatti basta considerare l'anello $K[X,\, Y]_{(X,\, Y)}$ che è locale ma non di valutazione.

Il prossimo Teorema ci permette di caratterizzare i domini di valutazione mediante l'insieme dei suoi ideali.

Teorema 2 *Per un anello V le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *V è di valutazione;*

(ii) *L'insieme dei suoi ideali principali è ordinato;*

(iii) *L'insieme dei suoi ideali è ordinato.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Siano aV e bV due ideali principali di V tali che $aV \nsubseteq bV$. Allora $ab^{-1} \notin V$ quindi $ba^{-1} \in V$ e dunque $bV \subseteq aV$.

(ii)⇒(iii) Siano I, J due ideali di V tali che $I \nsubseteq J$.
Allora esiste un elemento $a \in I$ tale che $a \notin J$. Quindi $a \notin bV$ per ogni $b \in J$, dunque $bV \subseteq aV$ per ogni $b \in J$ da cui $J \subseteq I$.

(iii)⇒(i) Sia $z := a/b \in K - V$. Allora $a \notin bV$ e quindi $bV \subseteq aV$, cioè $z^{-1} \in V$.

Ora dimostriamo una serie di proprietà che valgono per gli ideali di un anello di valutazione. Utiliziamo la notazione secondo cui $\sqrt{I}$ è il radicale dell'ideale I.

Proposizione 15 *Sia V un anello di valutazione e sia I un suo ideale proprio. Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se I è finitamente generato, allora I è principale;*

(2) *Il radicale di I è un ideale primo di V;*

(3) *Posto $P_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n$, allora P_0 è un ideale primo di V;*

(4) *Se esiste un intero positivo k tale che $I^k = I^{k+1}$, allora I è un ideale primo di V ed è idempotente, cioè $I = I^2$;*

(5) *Per ogni ideale primo P di V, se $P \subset I$ allora $P \subset P_0$;*

(6) *Se J è un ideale di V tale che $I \subset \sqrt{J}$, allora J contiene una potenza di I.*

Dimostrazione.

(1) Sia $I = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Essendo V è di valutazione $\{(a_i)\}_{i=1}^{n}$ è ordinato. Perciò esiste $1 \leq k \leq r$ tale che per ogni $i \neq k$, $(a_i) \subseteq (a_k)$, quindi $I = (a_k)$.

(2) Sappiamo che $\sqrt{I} := \bigcap \{P \mid P \in \operatorname{Spec}(V), P \supseteq I\} = S$ essendo $S := \bigcap \{P \mid P \in \operatorname{Spec}(V), P \supseteq I, P \text{ minimale}\}$.
Supponiamo per assurdo che esistano $P, Q \in S$ con $P \neq Q$ allora poiché in un anello di valutazione, l'insieme degli ideali è ordinato, si ha $P \subset Q$ oppure $Q \subset P$. Supponiamo che $P \subset Q$, allora $I \subseteq P \subset Q$. Ma questo è un assurdo in quanto $I \subseteq Q$. Quindi $\operatorname{Card}(S) = 1$ e dunque il radicale di I è un ideale primo di V.

(3) Basta verificare che $V - P_0$ è una parte moltiplicativa, cioè che per ogni x, $y \in V - P_0$, $xy \in V - P_0$.
Sia $x \in V - P_0$, allora $x \notin P_0$ quindi esiste un intero positivo m tale che $x \notin I^m$ perciò $(x) \supseteq I^m$. Analogamente, $y \in V - P_0$, quindi esiste un intero positivo n tale che $(y) \supseteq I^n$. Quindi $(xy) \supseteq I^{n+m}$ perciò $xy \notin I^{n+m}$ e quindi $xy \notin P_0$ da cui $xy \in V - P_0$.

(4) Per ipotesi esiste un intero k tale che $I^k = I^{k+1}$ quindi $P_0 = I^k$. Notiamo che

$$I^k = P_0 = \sqrt{P_0} = \sqrt{I^k} = \underbrace{\sqrt{I} \cap \ldots \cap \sqrt{I}}_{k\ volte} = \sqrt{I} \supseteq I.$$

Quindi $I^k \supseteq I$. D'altronde è sempre vero che $I \subseteq I^k$, perciò $I = I^k$. In particolare $I = I^2$ e I è un ideale primo.

(5) Basta mostrare che $P \subset I^k$ per ogni intero positivo k.
Per ipotesi esiste $x \in I - P$, quindi $x^k \in I^k$. Supponiamo per assurdo che $P \supseteq I^k$ per ogni k, allora $x^k \in P$ ed, essendo P primo, $x \in P$ che è una contraddizione.

(6) Supponiamo per assurdo che per ogni intero positivo k, $J \subseteq I^k$. Allora $J \subseteq P_0$. Perciò, passando ai radicali, si ha $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{P_0} = P_0 \subseteq I$ dunque $\sqrt{J} \subseteq I$ che è contro l'ipotesi.

Definizione 16 *Un dominio D si dice **dominio di Bézout** se ogni suo ideale I finitamente generato è principale.*

Corollario 2 *Un anello di valutazione è anche un dominio di Bézout.*

2.1 Sopranelli di anelli di valutazione

In questa sezione, ci occupiamo dei sopranelli di anelli di valutazione.
Grazie al prossimo risultato stabiliamo una corrispondenza biunivoca che inverte l'ordine tra l'insieme degli ideali primi di un anello di valutazione e l'insieme dei suoi sopranelli.

Proposizione 16 *Sia V un anello di valutazione con campo dei quozienti K e sia B un sopranello di V. Allora*

(1) *B è un anello di valutazione;*

(2) *Esiste un ideale primo P di V tale che $B = V_P$;*

(3) *Ogni sopranello di un anello di valutazione è normale, cioè integralmente chiuso nel suo campo dei quozienti.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Sia $x \in K - B$, allora $x \in K - V$ quindi $x^{-1} \in V$ e perciò $x^{-1} \in B$.

(2) Poiché B è un anello di valutazione, è locale. Sia N il suo ideale massimale e sia $P := V \cap N$, allora P è un ideale primo di V e l'omomorfismo canonico $V_P \hookrightarrow B_N = B$ è un omomorfismo iniettivo di anelli locali, quindi $V_P \subseteq B$.
Per concludere, dimostriamo che $V_P \supseteq B$. Sia $y \in B$, allora $y^{-1} \notin N$ perciò $y^{-1} \notin N \cap V = P$. Dunque y^{-1} è invertibile in V_P e quindi $y \in V_P$, da cui la tesi.

(3) Segue dal punto (2) ricordando che gli anelli di valutazione sono integralmente chiusi nel proprio campo dei quozienti.

Corollario 3 *Sia V è un anello di valutazione con campo dei quozienti K. L'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \mathit{Spec}(V) & \longleftrightarrow & \{B \mid V \subseteq B \subseteq K\} \\ P & \longrightarrow & V_P \\ V \cap N & \longleftarrow & (B,\, N) \end{array}$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca che inverte l'ordine.

Osserviamo che se I è un ideale in un dominio integro R, allora $(I : I)$ è un anello ed è, in particolare, un sopranello di R.
Quindi nel caso in cui R è un anello di valutazione, $(I : I)$ sarà una localizzazione di R. A tale proposito abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 17 *Sia V un anello di valutazione e I un suo ideale non nullo. Sia $\pi : V \longrightarrow V/I$ la proiezione canonica e $Z(V/I)$ l'insieme dei zero divisori di V/I, allora:*

(1) *$P = \pi^{-1}(Z(V/I))$ è un ideale primo di V;*

(2) *$V_P = (I : I)$ con $P = \pi^{-1}(Z(V/I))$.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) E' una semplice verifica.

(2) Verifichiamo che $V_P \subseteq (I : I)$. Sia $z \in (I : I)$. Notiamo che se $z \in V$, allora $z \in V_P$ quindi l'inclusione è verificata. Possiamo perciò assumere $z \notin V$.
Posto $x := z^{-1}$ abbiamo $x \in V$. Ora se $x \notin P$, allora $z = 1/x \in V_P$ da cui la tesi. Assumiamo, quindi $x \in P$. Allora esiste $y \in V - I$ tale che $xy \in I$, perciò $z^{-1}y \in I$ da cui $y \in zI \subseteq I$ che è assurdo in quanto $y \notin I$.
Ora mostriamo l'altra inclusione. Sia $z \in V_P$, analogamente a quanto detto prima, possiamo assumere $z \notin V$. Posto $x := z^{-1}$, abbiamo $x \in V$ ma $x \notin P$.
Infatti se per asssurdo $x \in P$, allora $x \in PV_P$. Ma $z \in V_P$, quindi $zx \in PV_P$ dunque $zx = \frac{1}{x}x = 1 \in PV_P$ che non è possibile in quanto PV_P è un ideale proprio di V_P.
Quindi $x \notin P$, ma ciò implica che $(x) \nsubseteq P$, e poiché V è di valutazione, ciò significa che

$$(x) \supseteq P = \pi^{-1}\left(Z\left(V/I\right)\right) \supseteq Ker\left(\pi\right) = I$$

Dunque $(x) \supseteq I$ ed essendo (x) invertibile, esiste J ideale di V tale che $I = xJ$.
Ma $x \notin P$, quindi $x + I$ non è uno zero divisore di V/I perciò $J \subseteq I$ e dunque $I = xJ \subseteq xI = z^{-1}I$ quindi $zI \subseteq I$ cioè $z \in (I : I)$ da cui la tesi.

Notiamo inoltre che se R è un dominio integro con campo dei quozienti K e I è un suo ideale non nullo, abbiamo le seguenti relazioni di inclusione:

$$R \subseteq (I : I) \subseteq I^{-1}.$$

Solitamente I^{-1} non è un sottoanello di K e quindi $(I : I) \subset I^{-1}$.
In generale si ha che:

Proposizione 18 *Sia R un dominio con campo dei quozienti K e sia I un suo ideale non nullo. Allora*

(1) *Se I è proprio ed invertibile, allora I^{-1} non è un sottoanello di K;*

(2) *Se I è radicale e I^{-1} è un anello, allora $I^{-1} = (I : I)$.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Supponiamo per assurdo che I^{-1} sia un sottoanello di K.
Sia M un ideale massimale di R contenente I e sia $S := R - M$, allora $(I^{-1})_S = (IR_M)^{-1}$. Infatti consideriamo $\bar{x} \in (I^{-1})_S$ allora

$$\bar{x} = \frac{x}{s}$$

dove $x \in I^{-1}$ e $s \in S = R - M$. Sia $\bar{y} \in IR_M$, allora $\bar{y} = \frac{i}{r}$ con $i \in I$ e $r \in R - M$. Quindi

$$\bar{x}\bar{y} = \frac{x}{s}\frac{i}{r} = \frac{xi}{sr} \in R_M$$

perciò $\bar{x} \in (IR_M)^{-1}$ e dunque $(I^{-1})_S \subseteq (IR_M)^{-1}$.
D'altraparte è vera anche l'altra inclusione, infatti sia $\bar{x} = \frac{x}{y} \in (IR_M)^{-1}$, allora per ogni $\bar{y} \in IR_M$, $\bar{x}\bar{y} \in R_M$. Scelto $\bar{y} = \frac{i}{1} \in IR_M$, abbiamo che

$$\bar{x}\bar{y} = \frac{x}{y}\frac{i}{1} = \frac{xi}{y} \in R_M.$$

Quindi $y \in R - M$ e $xi \in R$ e dunque $x \in I^{-1}$, perciò $\bar{x} \in (I^{-1})_S$ e $(I^{-1})_S \supseteq (IR_M)^{-1}$.
Per arrivare all'assurdo, notiamo che per la Proposizione 9 pag. 15, IR_M è invertibile, in più, essendo R_M locale, è principale, cioè esiste $a \in I$ tale che $aR_M = IR_M$. Inoltre

$$\frac{1}{a} \in I_S^{-1} = (IR_M)^{-1}.$$

Infatti poiché $aR_M = IR_M$, per ogni $\frac{\alpha}{\beta} \in IR_M$, esiste $k \in R$ tale che $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ak}{\beta}$. Quindi

$$\frac{1}{\cancel{a}}\frac{\cancel{a}k}{\beta} = \frac{k}{\beta} \in R_M$$

da cui $\frac{1}{a} \in (IR_M)^{-1}$. Ma

$$\frac{1}{a^2} \notin (IR_M)^{-1}$$

e ciò è assurdo perché I^{-1} è un anello e quindi anche I_S^{-1}.

(2) Poiché $(I : I) \subseteq I^{-1}$, dobbiamo verificare solo l'altra inclusione.
Sia $u \in I^{-1}$, allora $u^2 \in I^{-1}$ e quindi $(uI)^2 = (u^2I)I \subseteq RI \subseteq I$.
Passando ai radicali

$$uI \subseteq \sqrt{uI} = \sqrt{(uI)^2} \subseteq \sqrt{I} = I.$$

Perciò $u \in (I : I)$ da cui la tesi.

Proposizione 19 *Se P è un ideale primo in un dominio R tale che P^{-1} non è un anello, allora P è divisoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $P \subseteq P_v$, basta verificare l'altra inclusione. Sia $x \in P_v$, allora $xP^{-1} \subseteq R$ e quindi $xP^{-1}P \subseteq RP = P$.
Poiché P^{-1} non è un anello, $(P : P) \subset P^{-1}$, quindi $PP^{-1} \not\subseteq P$, perciò $x \in P$.

Nel caso di anelli di valutazione, abbiamo dei risultati più precisi.

Proposizione 20 *Sia V un anello di valutazione. Sia I un suo ideale non nullo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *I^{-1} è un sottoanello di K;*

(ii) *I è un ideale primo non invertibile di V.*

Corollario 4 *Se P è un ideale primo non invertibile in un anello di valutazione V, allora $P^{-1} = V_P = (P : P)$.*

Le dimostrazioni di questi due risultati sono conseguenza del Teorema 7 pag. 38, dimostrato nel Capitolo 3. (cfr. [5] Proposizione 3.1.4 pag. 37).

2.2 Ideali ramificati e non ramificati in anelli di valutazione

Iniziamo con il ricordare la nozione di ideale P-primario, grazie alla quale possiamo definire gli ideali primi ramificati.

Definizione 17 *Un ideale proprio I di un anello R si dice **primario** se*

$$xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ oppure } y^n \in I \text{ per qualche intero positivo } n.$$

Definizione 18 *Un ideale proprio I di un anello R si dice **P-primario** se è primario ed è tale che $\sqrt{I} = P$.*

Sia R un anello e I un suo ideale proprio. Notiamo che se $\sqrt{I} = M$ con M ideale massimale di R, allora I è M-primario e in particolare M^n è M primario per ogni $n > 0$.
Ma non è vero il viceversa cioè se I è M-primario non è detto che $I = M^n$ per qualche n.
Infatti consideriamo $I = (x, y^2) \subseteq K[x, y]$ e $M = (x, y)$.
Allora $M^2 = (x^2, xy, y^2)$ e $M^2 \subset I \subset M$, quindi, passando ai radicali, si ha $\sqrt{I} = M$ ma I non è una potenza di M.

Definizione 19 *Un ideale primo P in un anello R è detto* ***ramificato*** *se esiste un ideale P-primario distinto da P; se P è l'unico ideale P-primario di R, allora P è detto* ***non ramificato****.*

Il prossimo risultato si occupa dell'insieme degli ideali primari di un anello di valutazione.

Teorema 3 *Sia V un anello di valutazione e P un ideale primo non nullo di V. Si hanno le seguenti proprietà:*

(1) *Se Q è P-primario e se $x \in V - P$, allora $Q = Qx$;*

(2) *Sia $S := \{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ l'insieme degli ideali P-primari, allora*

1. *S è chiuso moltiplicativamente;*
2. *$S \supseteq \left\{P^k\right\}_{k=1}^{\infty}$;*
3. *se $P \neq P^2$, allora $S = \left\{P^k\right\}_{k=1}^{\infty}$.*

(3) *Se P è ramificato e $Q \neq P$ è P-primario, allora $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k$;*

(4) *$P_0 := \bigcap Q_\lambda$ è un ideale primo di V e non ci sono ideali primi di V propriamente contenuti tra P_0 e P.*

Dimostrazione.

(1) Poiché $x \notin P$, allora $(x) \supseteq P = \sqrt{Q} \supseteq Q$ ed essendo (x) è invertibile, esiste un ideale I di V tale che $Q = Ix$ (cfr. [12] Teorema 7.2 pag. 70).

Poiché $Ix \subseteq I$, per concludere la dimostrazione basta verificare l'altra inclusione. Sia $a \in I$, allora $ax \in Ix$ e quindi $a \in Ix$. Infatti supponiamo per assurdo che $a \notin Ix = Q$, allora esisterebbe un intero n tale che $x^n \in Q$ quindi $x \in \sqrt{Q} = P$ che è contro l'ipotesi.
Perciò $Q = Ix = I$ quindi $Q = I$ ma $I = Ix$ da cui segue che $Q = Qx$.

(2) Procediamo con la dimostrazione dei tre sottopunti:

1. Siano Q_1, $Q_2 \in S$, allora $\sqrt{Q_1Q_2} = \sqrt{Q}_1 \cap \sqrt{Q}_2 = P \cap P = P$. Manca da verificare che Q_1Q_2 è primario.
Siano $xy \in Q_1Q_2$, allora $(xy) \subseteq Q_1Q_2$. Supponiamo che $x \notin Q_1Q_2$, allora $x \notin P$ e per il punto (1), $Q_2 = Q_2x$. Perciò $(xy) \subseteq Q_1Q_2 = Q_1Q_2x$ e dunque $(y) \subseteq Q_1Q_2$. Quindi $y \in Q_1Q_2$ da cui la tesi.

2. Essendo P primo, è anche P-primario quindi $P \in S$ ed essendo S è chiuso moltiplicativamente, $P^k \in S$.

3. Poiché $S \supseteq \{P^k\}$, basta mostrare che ciascun ideale P-primario Q è una potenza di P.
   Per la Proposizione 15 pag. 21, Q contiene una potenza di P^2 e quindi una potenza di P.
   Sia k il minimo intero tale che $Q \supset P^k$, allora esiste un elemento $y \in P^{k-1}$ tale che $y \notin Q$. Quindi $(y) \supseteq Q$ ed essendo (y) principale, esiste un ideale I di V tale che $Q = yI$. Perciò $I \subseteq P$, quindi $Q = yI \subseteq Py \subseteq P^k$, da cui la tesi.

(3) Poiché Q è un ideale P-primario, $\{Q^k\} \subseteq S$, quindi $\bigcap Q^k \supseteq \bigcap Q_\lambda$.
Ma per la Proposizione 15 pag. 21, ciascun Q_λ contiene una potenza di Q e quindi è vera anche l'altra inclusione.

(4) Se P non è ramificato, allora $P_0 = P$ è un ideale primo di V. Consideriamo P ramificato, allora $P_0 = \bigcap Q_\lambda = \bigcap Q^k$ e quindi P_0 è un ideale primo di V.
Ora supponiamo per assurdo che esista un ideale primo $\tilde{P}$ di V tale che $P_0 \subset \tilde{P} \subset P$. Poiché $\tilde{P}$ è propriamente contenuto in P, per la Proposizione 15 pag. 21, $\tilde{P} \subset P_0$ che è una contraddizione.

Nel Capitolo 3, in particolare nel Teorema 12 pag. 47, vedremo come questo Teorema possa essere esteso al caso dei domini di Prüfer.
Intanto caratteriziamo gli ideali primi ramificati nel caso di anelli di valutazione.

Proposizione 21 *Sia V un anello di valutazione e P un suo ideale primo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *P è ramificato;*

(ii) *Esiste un ideale I di R, $I \neq P$ tale che $\sqrt{I} = P$;*

(iii) *P è il radicale di un ideale principale;*

(vi) *P non è l'unione dell'insieme degli ideali primi di V propriamente contenuti in P;*

(v) *Esiste un ideale primo Q di V propriamente contenuto in P tale che non esistono ideali primi di V propriamente contenuti tra Q e P.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Segue dalla definizione di ramificato.

(ii)⇒(iii) Poiché $P = \sqrt{I} \supseteq I$, esiste un elemento $x \in P - I$, perciò $I \subset (x) \subseteq P$. La tesi si ottiene passando ai radicali.

(iii)⇒(iv) Poiché $P = \sqrt{(x)}$, $x \in P$. Per concludere basta mostrare che $x \notin P_i$ per ogni P_i ideale primo di V propriamente contenuto in P.
Supponiamo per assurdo che esista i tale che $x \in P_i$, allora $(x) \subseteq P_i$, quindi

$$P = \sqrt{(x)} \subseteq \sqrt{P_i} = P_i$$

e ciò è assurdo in quanto $P_i \subset P$.

(iv)⇒(v) Ovvio.

(v)⇒(ii) Sia $x \in P - Q$, allora $\sqrt{(x)} = P$. Se $P \neq (x)$, allora segue la tesi considerando $I := (x)$. Se invece $P = (x)$, allora consideriamo $I := (x^2)$. In tal caso abbiamo $\sqrt{(x^2)} = P$ e $P \neq (x^2)$, da cui la tesi.

(ii)⇒(i) Per ipotesi sappiamo che esiste un ideale I di R con $I \neq P$ e $\sqrt{I} = P$. Vogliamo dimostrare che P è ramificato, dunque che esiste un ideale P-primario diverso da P.
Localizziamo in P, allora abbiamo che

$$\sqrt{IR_P} = \sqrt{I}R_P = PR_P$$

dunque il radicale di IR_P è un ideale massimale, perciò $IR_P \neq PR_P$ è PR_P - primario. Quindi $I \subseteq IR_P \cap R$ è primario e $IR_P \cap R \neq P$ da cui la tesi.

2.3 Anelli di valutazione discreta e anelli di valutazione fortemente discreta

Definizione 20 *Un anello di valutazione V è un* ***anello di valutazione discreta*** *se ogni ideale primo ramificato di V non è idempotente.*
V è un ***anello di valutazione fortemente discreta*** *se ogni ideale primo non nullo di V è non idempotente.*

Chiaramente un anello di valutazione fortemente discreta, è anche un anello di valutazione discreta. Vedremo che queste nozioni coincidono nel caso di domini di valutazione di dimensione finita. Ricordiamo la definizione di dimensione:

Definizione 21 *La **dimensione** di un anello A è l'estremo superiore di tutte le lunghezze delle sue catene di ideali primi.*

Con il prossimo risultato, caratteriziamo i domini di valutazione discreta e fortemente discreta.

Proposizione 22 *Sia V un anello di valutazione. Allora:*

(1) *V è un anello di valutazione discreta se e solo se ogni ideale primario di V è potenza del suo radicale;*

(2) *V è di valutazione fortemente discreta se e solo se V è di valutazione discreta e vale la condizione della catena ascendente sugli ideali primi di V;*

(3) *Sia A un sopranello di V, allora*

1. *Se V è un anello di valutazione discreta anche A è un anello di valutazione discreta;*
2. *Se V è un anello di valutazione fortemente discreta anche A è un anello di valutazione fortemente discreta.*

Dimostrazione.

(1) $\Rightarrow$) Poiché V è un anello di valutazione discreta, ogni ideale primo P ramificato è non idempotente, cioè $P \neq P^2$. Quindi per il Teorema 3 pag. 27, l'insieme degli ideali P-primari coincide con l'insieme delle potenze di P.
D'altraparte se P non è ramificato, è banalmente potenza del suo radicale, essendo quest'ultimo P stesso.
$\Leftarrow$) Sia P un ideale primo ramificato, allora esiste un ideale primario $Q \neq P$ tale che $\sqrt{Q} = P$.
Essendo Q primario, $Q = P^k$ esiste k, ma $P \neq Q$ quindi $P \neq P^k$ da cui la tesi.

(2) $\Rightarrow$) Se V è fortemente discreto, è ovviamente anche discreto. Quindi l'unica cosa che ci rimane da verificare è che valga la condizione della catena ascendente sugli ideali primi.

Supponiamo per assurdo che ciò non avvenga, allora V ha una catena di ideali primi che non stabilizza:

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots$$

Sia $P := \bigcup_{n>0} P_n$. Ovviamente $P_n \subset P$, per ogni $n > 0$ e quindi per la Proposizione 21 pag. 28, P non è ramificato.
Poiché P^2 è P-primario e P è il suo radicale, $P = P^2$, cioè P è idempotente che è assurdo.
$\Leftarrow$) Dato che gli ideali primi in V verificano la condizione della catena ascendente, $F := \{Q \in \operatorname{Spec}(V) \text{ tali che } Q \subset P\}$ è finito.
Siano $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ elementi di F, allora $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots \subseteq Q_n \subset P$ quindi per la Proposizione 21 pag. 28, P è ramificato. Dunque, essendo V un anello di valutazione discreta, $P \neq P^2$.

(3) Essendo V un anello di valutazione, esiste un ideale primo P di V tale che $A = V_P$. La tesi segue in modo ovvio ricordando che c'è una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di V e quelli di V_P.

Poiché in dimensione finita vale la condizione della catena ascendente sugli ideali primi, abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 23 *Sia V un anello di valutazione di dimensione finita, allora le seguenti affermazioni sono equaivalenti:*

(i) *V è un anello di valutazione discreta;*

(ii) *V è un anello di valutazione fortemente discreta.*

Ci occupiamo principalmente del caso in cui V sia un dominio di dimensione 1.

Teorema 4 *Sia V un dominio locale di dimensione 1 con ideale massimale M. Sia inoltre V noetheriano. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *V è un anello di valutazione discreta;*

(ii) *V è integralmente chiuso;*

(iii) *M è un ideale principale;*

(iv) *M è un ideale principale e ogni ideale non nullo di V è una potenza di I;*

(v) *Esiste un elemento $t \in V$ tale che ogni idele non nullo di V è della forma $\left(t^k\right)$, con $k \geq 0$;*

(vi) *Esiste un elemento $t \in V$ tale che per ogni $x \in V$, $x = ut^k$ con $u \in U(V)$ e $k \geq 0$ e tale scrittura è unica.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Segue dalla Proposizione 14 pag. 19.

(ii)⇒(iii) Sia x un elemento di M non nullo, allora poiché per ipotesi V ha dimensione 1, $\sqrt{(x)} = M$, inoltre essendo V noetheriano, esiste un intero positivo n tale che $M^n \subseteq (x)$ (cfr. [1], Corollario 7.16 pag. 126).
Supponiamo n minimale, quindi $M^n \subseteq (x)$ e $M^{n-1} \nsubseteq (x)$. Dunque esiste $y \in M^{n-1}$ e $y \notin (x)$, quindi $yM \subseteq M^{n-1}M = M^n \subseteq (x)$.
Perciò posto $z := y/x \in Qz(V)$ si ha $zM \subseteq V$. D'altraparte $zM \nsubseteq M$ altrimenti, poiché M è un gruppo additivo finitamente generato, z sarebbe intero (Proposizione 1 pag. 7), quindi $y/x \in V$ e dunque $y \in (x)$ che è assurdo.
Perciò $zM \subseteq V$ e $zM \nsubseteq M$ perciò $zM = V$ da cui $M = z^{-1}V$, cioè M principale.

(iii)⇒(vi) Poiché V è locale, se $x \in V - M$ si ha la tesi, infatti x è inveribile. Quindi possiamo assumere $x \in M$.
Sia $M = (t)$, allora un elemento $x \in M$ è della forma $x = y_1 t$. Ora se y_1 è un elemento invertibile di V, si ha la tesi, altrimenti scriviamo $y_1 = y_2 t$. Se y_2 è un elemento invertibile di V si ha la tesi, altrimenti si procede come sopra. In questo modo otteniamo che per ogni intero positivo n, $x = y_n t^n = y_{n+1} y^{n+1}$.
Se per assurdo y_{n+1} non fosse invertibile, allora $(x) \subseteq (y_1) \subseteq (y_2) \subseteq \ldots$ ma, essendo V noetheriano, la catena stabilizza, quindi esiste un intero n tale che $(y_n) = (y_{n+1})$, dunque $y_n = uy_{n+1}$ con u invertibile.
Quindi $x = y_n t^n = uy_n t^{n+1}$ da cui $ut = 1$, cioè esiste un intero n tale che $y_{n+1} := v$ è invertibile e dunque $x = vt^{n+1}$.
Inoltre la scrittura è unica perché se per assurdo ce ne fossero due, avremmo che $x = ut^n = vt^m$ con u, v elementi invertibili in V, quindi $uv^{-1}t^{n-m} = 1$ ovvero $u = v$ e $n = m$.

(vi)⇒(v) Sia $x \in I$, allora esiste un intero m tale che $x = ut^m$ con u elemento invertibile di V. Sia $k :=\min\{m \mid ut^m \in I\}$, allora $I = \left(t^k\right)$.

(v)⇒(iv) Abbiamo che $M = (t)$ quindi ogni ideale è della forma M^k con $k \geq 0$.

(iv)⇒(iii) Ovvio.

(iv)⇒(i) Per ipotesi, ogni ideale è della forma $I = M^k$, quindi $\sqrt{I} = \sqrt{M^k} = M$. Perciò ogni ideale è potenza del suo radicale e dunque V è un anello di valutazione discreta.

Proposizione 24 *Per un anello di valutazione V, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *V è un anello di valutazione discreta e dim $(V) = 1$;*

(ii) *V è un anello di valutazione fortemente discreta e dim $(V) = 1$;*

(iii) *V è noetheriano.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Poiché V ha dimensione 1, l'unica catena di ideali primi possibile è $(0) \subset M$, dove M è l'unico ideale massimale di V. Quindi V è un anello di valutazione discreta e gli ideali primi di V soddisfano la condizione della catena ascendente cioè V è un anello di valutazione fortemente discreta.

(ii)⇒(i) Segue banalmente dal fatto che un anello di valutazione fortemente discreto è discreto.

(ii)⇒(iii) L'insieme degli ideali propri di V è $\{M^k\}_{k\geq 1}$ dove M è l'unico ideale massimale di V.
Inoltre, essendo V fortemente discreto, $M \neq M^2$, perciò esiste un elemento $x \in M - M^2$ e dunque $M^2 \subset (x) \subseteq M$. Quindi $M = (x)$ da cui la tesi.

(iii)⇒(ii) Poiché V è noetheriano, ogni ideale è finitamente generato ed è inoltre principale essendo V di valutazione. Dunque V ha dimensione 1.
Sia P un ideale primo di V, allora $P = (x)$ e $P^2 = (x^2)$.
Supponiamo per assurdo che $P = P^2$, allora $(x) = (x^2)$. In particolare, $x \in (x^2)$, quindi esiste un elemento $\lambda \in V$ tale che $x = \lambda x^2$, ma ciò significa che $1 = \lambda x$, ovvero x è invertibile. Ma poiché P è un ideale primo proprio, siamo giunti ad una contraddizione.

Definizione 22 *Un anello di valutazione discreta di dimensione* 1 *è detto* ***DVR****.*

Con i prossimi risultati caratteriziamo i DVR.

Proposizione 25 *Per un dominio V, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *V è un DVR;*

(ii) *V è un dominio a ideali principali locale;*

(iii) *V è noetheriano, locale, integralmente chiuso e di dimensione 1.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(iii)** Ovvio.

(iii)⇒(ii) Poiché in un anello noetheriano di dimensione 1 ogni ideale è principale, si ha la tesi.

(ii)⇒(i) Essendo V è un dominio a ideali principali, V è di dimensione 1 ed è noetheriano. Inoltre, poiché l'unico ideale massimale M è principale, per il Teorema 4 pag. 31, V è un anello di valutazione discreta.

Proposizione 26 *Sia V un dominio locale con M ideale massimale. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *V è un DVR;*

(ii) *Ogni ideale frazionario I di V è inveribile.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Per il Teorema 4 pag. 31, $M = (x)$. Sia I un ideale frazionario non nullo di V, allora esiste un elemento $y \in V$ tale che $yI \subseteq V$ ed essendo yI è un ideale di V, esiste un intero r tale che $yI = (x^r)$. Ma $y \in V$, quindi esiste s tale che $y = ux^s$, perciò $I = (x^{r-s})$ è principale e dunque è invertibile.

(ii)⇒(i) Poiché ogni ideale I di V è invertibile, è finitamente generato e dunque V è noetheriano.
Per concludere, verifichiamo che ogni ideale è potenza di M. Procediamo per assurdo. Sia Σ l'insieme degli ideali non nulli di V che non sono potenze di M, allora per la noetherianità di V, esiste un elemento J massimale in Σ. Quindi $J \neq M$ e poiché M è massimale, $J \subset M$ dunque $JM^{-1} \subset MM^{-1} = A$. D'altraparte poiche $M^{-1} \supseteq A$, $JM^{-1} \subseteq JA = J$. In particolare $JM^{-1} \subset J$, infatti se per assurdo si avesse l'ugualianza, allora $J = JM$ e, per il *Lemma di Nakajama*, si avrebbe $J = 0$ che è una contraddizione.
Quindi, essendo J è massimale in Σ, $JM^{-1} \notin \Sigma$ dunque esiste un intero k tale che $JM^{-1} = M^k$ da cui $J = M^{k+1}$ che è l'assurdo cercato.

Capitolo 3

Domini di Prüfer

Questo capitolo è dedicato allo studio dei domini di Prüfer. Analiziamo le principali proprietà dei loro sopranelli e introduciamo il concetto di ideale ramificato vedendo come questo è legato ai domini di Prüfer discreti.
Utilizziamo in fine, i vari risultati per studiare la divisorialità degli ideali.

3.1 Proprietà dei domini di Prüfer

Definizione 23 *Un dominio R si dice un* ***dominio di Prüfer*** *se ogni ideale non nullo (frazionario) finitamente generato, è invertibile.*

Osservazione 5 Poiché in un un dominio di Prüfer gli ideali invertibili sono finitamente generati, le nozione di ideale invertibile e di ideale finitamente generato coincidono.

Proposizione 27 *Un dominio di Bézout è un dominio di Prüfer*

DIMOSTRAZIONE. L'enunciato segue dal fatto che in un dominio di Bézout ogni ideale finitamente generato è principale e quindi è invertibile.

Abbiamo quindi le seguenti implicazioni:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Valutazione} \\
 & & \Downarrow \\
\text{PID} & \Longrightarrow & \text{Bézout} \\
 & & \Downarrow \\
 & & \text{Prüfer}
\end{array}
$$

dove con PID si intende un dominio a ideali principali.
In un dominio locale le frecce si invertono:

Proposizione 28 *In un dominio locale R, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di valutazione;*

(ii) *R è un dominio di Bézout;*

(iii) *R è un dominio di Prüfer.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)⇒ (iii)** Ovvio.

(iii)⇒(i) Sia $F := (a, b)$ con $a, b \in R - \{0\}$, allora F è un ideale finitamente generato di R quindi, poiché R è di Prüfer, F è invertibile inoltre è anche principale perché R è locale. Perciò F è generato da a oppure da b e quindi $aR \supseteq bR$ oppure $aR \subseteq bR$, cioè R è un dominio di valutazione.

Il prossimo risultato stabilisce un legame tra i domini di Prüfer e gli anelli di valutazione:

Teorema 5 *Sia R un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Prüfer;*

(ii) *R_P è un dominio di valutazione per ogni ideale primo P di R;*

(iii) *R_M è un dominio di valutazione per ogni ideale massimale M di R.*

DIMOSTRAZIONE.

(i)⇒(ii) Sia J un ideale di R_P finitamente generato, allora $J = IR_P$ con I ideale di R finitamente generato. Poiché I è invertibile e R_P è un dominio locale, J è un ideale principale, quindi R_P è un dominio di Bézout e dunque è un dominio di valutazione.

(ii)⇒(iii) Ovvio.

(iii)⇒(i) Sia I un ideale finitamente generato di R, allora IR_M è un ideale finitamente generato e, poiché R_M è di valutazione, IR_M è un ideale principale. Ma, essendo R_M locale, IR_M è invertibile e quindi I invertibile.

3.2 Sopranelli di domini di Prüfer

In questa sezione, ci occupiamo dei sopranelli di domini di Prüfer. Vediamo subito che questi sono rappresentabili come intersezione di localizzazioni effettuate rispetto ad un particolare insieme di ideali primi del dominio.

Teorema 6 *Sia T un sopranello di un dominio di Prüfer R e sia Γ l'insieme degli ideali primi P di R tali che $PT \subset T$. Allora*

(1) *Se Q è un ideale primo proprio di T e $P := Q \cap R$, allora $R_P = T_Q$ e $Q = PR_P \cap T$;*

(2) *Se P è un ideale primo non nullo di R, allora $P \in \Gamma$ se e solo se $R_P \supseteq T$. Inoltre risulta $T = \bigcap_{P \in \Gamma} R_P$;*

(3) *Se $\bar{I}$ è un ideale di T e $I := \bar{I} \cap R$ allora $\bar{I} = IT$;*

(4) *$\{PT\}_{P \in \Gamma}$ è l'insieme degli ideali primi di T.*

Dimostrazione.

(1) E' chiaro che $R_P \subseteq T_Q$, quindi basta mostrare l'altra inclusione.
Supponiamo per assurdo che esista un elemento $x \in T_Q - R_P$, allora $x = a/b$ dove $a \in T$ e $b \notin Q$.
Inoltre R_P è di valutazione, quindi $x^{-1} = b/a \in PR_P$, con $b \in P$. Ma questo è assurdo perché $b \notin Q$ e $P = Q \cap R$.
Inoltre essendo R_P e T_Q anelli locali uguali, hanno lo stesso ideale massimale. Quindi $PR_P = QT_Q$, da cui $PR_P \cap T = QT_Q \cap T = Q$, cioè la tesi.

(2) Dimostriamo le due implicazioni:
$\Rightarrow$) Poiché $PT \subset T$, esiste un ideale massimale M di T tale che $PT \subset M$ e quindi $P \subseteq M \cap R$.
Infatti, se per assurdo esistesse $x \in P - (M \cap R)$, allora poiché $x \in R$, $x \notin M$. Ma $x = x1 \in TP \subset M$ che è assurdo.
Quindi $R_P \supseteq R_{M \cap R} = T_M \supseteq T$ da cui la tesi.
$\Leftarrow$) Essendo $R_P \supseteq T$ e PR_P un ideale proprio di R_P, $PT \subseteq PR_P \subset R_P$ e quindi $PT \subset T$. Infatti se per assurdo $PT = T$, allora $1 \in PT \subseteq PR_P$ cosa non possibile perché $PR_P \neq R_P$.
Inoltre poiché $T = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(T)} T_M \supseteq \bigcap_{P \in \Gamma} R_P$, $T = \bigcap_{P \in \Gamma} R_P$.

(3) E' ovvio che $\bar{I} \supseteq IT$, quindi basta verificare l'altra inclusione.
Sia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'insieme degli ideali massimali di T, allora $\bar{I} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bar{I}T_{M_\lambda}$.

Posto $P_\lambda := M_\lambda \cap R$, allora, dal punto (1), per ogni $\lambda \in \Lambda$, $T_{M_\lambda} = R_{P_\lambda}$ quindi $\bar{I}T_{M_\lambda} = \bar{I}R_{P_\lambda}$.
Inoltre $\bar{I} \subseteq T \subseteq T_{M_\lambda} = R_{P_\lambda}$, quindi se $x \in \bar{I}R_{P_\lambda}$, $x = \bar{a}/v$, dove $v \in R - P_\lambda$ e $\bar{a} = a/u \in \bar{I} \subseteq R_{P_\lambda}$ con $a \in R$ e $u \in R - P_\lambda$. Dunque $a = \bar{a}u \in \bar{I} \cap R = I$ e perciò

$$x = \frac{\bar{a}}{v} = \frac{a}{uv} \in IR_{P_\lambda} = ITR_{P_\lambda} = ITT_{M_\lambda}$$

dunque $\bar{I}T_{M_\lambda} = ITT_{M_\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ da cui $\bar{I} = IT$.

(4) Sia Q un ideale primo di T, allora per il punto (3), $Q = PT$ con $P = Q \cap R$. Inoltre, poiché $P = Q \cap R$, $R_P = T_M \supseteq T$, quindi $P \in \Gamma$. D'altronde $P \in \Gamma$ se e solo se $R_P \supseteq T$ e l'ideale $PR_P \cap T = (PR_P \cap T \cap R)T = PT$ è un ideale primo.

Corollario 5 *Sia R un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e T un suo sopranello locale, allora $T = R_P$.*

Dimostrazione. Basta scegliere $P := N \cap R$ dove N è l'unico ideale massimale di T. Infatti in questo modo, per il Teorema 6 pag. 37, si ha $R_P = T_N = T$, da cui la tesi.

Corollario 6 *Sia R un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e T un suo sopranello, allora T è un dominio di Prüfer.*

Dimostrazione. Poiché per ogni ideale massimale M di R, si ha $R \subseteq T \subseteq T_M \subseteq K$, allora T_M è un sopranello locale di R quindi per il Corollario 5, $T_M = R_P$ con P ideale primo di R. Ma essendo R un dominio di Prüfer, per il Teorema 5 pag. 36, R_P è un anello di valutazione, quindi T_M è un anello di valutazione, da cui la tesi.

Sia R un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e I un suo ideale, usando la convenzione che se $\{M_\beta\}$ è un insieme vuoto di ideali primi di R allora $K := \bigcap R_{M_\beta}$, cercheremo di capire quando I^{-1} è un sottoanello di K e ne stabiliremo una rappresentazione concreta.

Teorema 7 *Sia R un dominio di Prüfer e I un suo ideale non nullo. Sia $\{P_\alpha\}$ l'insieme degli ideali primi minimali su I e $\{M_\beta\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono I. Allora*

(1) $I^{-1} \supseteq \bigcap R_{P_\alpha} \cap \left(\bigcap R_{M_\beta}\right)$;

(2) *I^{-1} è un sottoanello di K se e solo se* $I^{-1} = \bigcap R_{P_\alpha} \cap \left(\bigcap R_{M_\beta}\right)$.

Dimostrazione.

(1) Sia $u \in \bigcap R_{P_\alpha} \cap \left(\bigcap R_{M_\beta}\right)$ e sia $a \in I$, allora dobbiamo verificare che $au \in R$, ovvero che per ogni ideale massimale M di R, $ua \in R_M$. Poiché per ogni M_β, $u \in R_{M_\beta}$ allora $ua \in R_{M_\beta}$ per ogni M_β.
Dunque rimane da verificare che per ogni ideale massimale N_γ contenente I, $ua \in R_{N_\gamma}$.
Fissato γ, esiste un α tale che $I \subseteq P_\alpha \subseteq N_\gamma$. Inoltre, poiché $u \in R_{P_\alpha}$, $u = r/s$ con $s \in R - P_\alpha$ e $r \in R$.
Supponiamo per assurdo che $a/s \notin R_{N_\gamma}$. Allora, poiché R_{N_γ} è di valutazione, $s/a \in R_{N_\gamma}$. Quindi

$$s = \frac{sa}{a} \in P_\alpha R_{N_\gamma} \cap R = P_\alpha$$

e ciò è assurdo, dunque $a/s \in R_{N_\gamma}$ e quindi $ua = r\frac{a}{s} \in R_{N_\gamma}$.

(2) $\Rightarrow$) Sia $u \in I^{-1}$ e $\alpha_\beta \in I - M_\beta$ per ogni M_β, allora $u\alpha_\beta \in R$ e quindi $u \in R_{M_\beta}$ per ogni M_β, quindi $I^{-1} \subseteq \bigcap R_{M_\beta}$.
Rimane da verificare che per ogni ideale primo minimale P_α, $I^{-1} \subseteq R_{P_\alpha}$ oppure, equivalentemente, $P_\alpha I^{-1} \subset I^{-1}$ (Teorema 6 pag. 37).
Supponiamo per assurdo che esista un primo minimale P_α su I tale che $P_\alpha I^{-1} = I^{-1}$, allora

$$I^{-1} = P_\alpha I^{-1} \subseteq \left(P_\alpha I^{-1}\right)_{R-P_\alpha}$$

dunque se $(P_\alpha I^{-1})_{R-P_\alpha} \subseteq R_{P_\alpha}$ arriviamo all'assurdo.
Se $z \in (P_\alpha I^{-1})_{R-P_\alpha}$, allora esiste $s \in R - P_\alpha$ tale che $zs \in P_\alpha I^{-1}$. Inoltre se $J := IR_{P_\alpha} \cap R$, allora si verifica facilmente che, essendo I^{-1} un anello, esiste un intero positivo n tale che $(zs)^n \in JI^{-1}$ e, quindi $z^n \in (JI^{-1})_{R-P_\alpha}$. Ma

$$\left(JI^{-1}\right)_{R-P_\alpha} = (JR_{P_\alpha})\left(I^{-1}\right)_{R-P_\alpha} \subseteq (IR_{P_\alpha})(R_{P_\alpha} : IR_{P_\alpha}) \subseteq R_{P_\alpha}$$

quindi $z^n \in R_{P_\alpha}$ e, poiché R_{P_α} è di valutazione, è anche integralmente chiuso e dunque $z \in R_{P_\alpha}$, da cui $(P_\alpha I^{-1})_{R-P_\alpha} \subseteq R_{P_\alpha}$.
$\Leftarrow$) E' ovvio, infatti intersezione di anelli è ancora un anello.

Corollario 7 *Se M è un ideale massimale in un dominio di Prüfer R, allora M è invertibile oppure $M^{-1} = R$.*

Dimostrazione. Se M non è invertibile, allora $M \subseteq MM^{-1} \subset R$, quindi $M = MM^{-1}$ perciò $M^{-1} = (M : M)$ è un anello e dunque per il Teorema 7 pag. 38, $M^{-1} = R$.

Corollario 8 *Sia M un ideale massimale in un dominio di Prüfer R, allora $R = (M : M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 7, ci limitiamo a studiare il caso in cui M è inveribile oppure $M^{-1} = R$.
Se M è un ideale massimale invertibile, allora per il Corollario 1 pag. 13, $R = (M : M)$. Se, invece, $M^{-1} = R$, ripercorrendo la dimostrazione del Corollario 7, si ha la tesi.

Cerchiamo altre condizioni che ci permettano di stabilire quando l'inverso di un ideale è un anello. Dato un dominio di Prüfer R, dividiamo il suo spettro in tre insiemi disgiunti:

- $S_1 := \{P \in \mathrm{Spec}\,(R) \text{ tale che } P \text{ è invertibile}\}$;
- $S_2 := \{P \in \mathrm{Max}\,(R) \text{ tale che } P \text{ non è invertibile e } PR_P \text{ è invertibile}\}$;
- $S_3 := \{P \in \mathrm{Spec}\,(R) \text{ tale che } P \notin S_1 \cup S_2\}$.

Quindi
$$\mathrm{Spec}\,(R) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Lemma 1 *Se I, J sono due ideali comassimali di un dominio R, allora $(I \cap J)^{-1} = I^{-1} + J^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. E' ovvio che $(I \cap J)^{-1} \supseteq I^{-1} + J^{-1}$. Quindi per mostrare il Lemma, basta verificare l'altra inclusione.
Poiché I, J sono comassimali, esiste $a \in I$ e $b \in J$ con $a + b = 1$.
Sia $u \in (I \cap J)^{-1}$, allora

- $uaJ \subseteq u\,(I \cap J) \subseteq R \Rightarrow ua \in J^{-1}$;
- $ubI \subseteq u\,(I \cap J) \subseteq R \Rightarrow ub \in I^{-1}$.

Quindi $u = u \cdot 1 = u\,(a + b) = ua + ub \in J^{-1} + I^{-1}$, da cui la tesi.

Teorema 8 *Sia I un ideale radicale di un dominio di Prüfer R con campo dei quozienti K e sia $\{P_\alpha\}$ l'insieme degli ideali primi minimali su I. Assumiamo $\bigcap P_\alpha$ irredundante, cioè tale che per ogni β, $\bigcap_{\alpha \neq \beta} P_\beta \nsubseteq P_\beta$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *I^{-1} è un sottoanello di K;*

(ii) *$\{P_\alpha\} \subseteq S_2 \cup S_3$.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Supponiamo per assurdo che esista γ tale che $P_\gamma \in S_1$ e sia $J = \bigcap_{\alpha \neq \gamma} P_\alpha$. Per ipotesi $J \not\subseteq P_\gamma$, quindi $I = J \cap P_\gamma$ e dunque, per il Lemma 1 pag. 40, $I^{-1} = J^{-1} + P_\gamma^{-1}$.
Poiché $P_\gamma \in S_1$, P_γ è invertibile dunque $1 = \sum_{i=1}^n p_i u_i$ dove $p_i \in P_\gamma$ e $u_i \in P_\gamma^{-1}$, inoltre P_γ è finitamente generato quindi $P_\gamma = (p_1, \ldots, p_n)$ e perciò $P_\gamma^{-1} = \bigcap (1/p_i) R$.
Ora $u_i \in P_\gamma^{-1}$ quindi per ogni i, esiste un $r_i \in R$ tale che $u_i = r_i/p_i$. Perciò

$$1 = \sum_{i=1}^n p_i u_i = \sum_{i=1}^n p_i \frac{r_i}{p_i} = \sum_{i=1}^n r_i$$

Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $r_1 \notin P_\gamma$ e, per arrivare all'assurdo, mostriamo che $u_1^2 \notin J^{-1} + P_\gamma^{-1} = I^{-1}$, infatti ciò contraddice il fatto che I^{-1} è un anello e $u_1 \in I^{-1}$.
Se per assurdo che $u_1^2 \in I^{-1}$, allora $u_1^2 = a + \frac{s}{p_1}$ dove $a \in J^{-1}$ e $\frac{s}{p_1} \in P_\gamma^{-1}$. Quindi

$$\frac{r_1^2}{p_1} = \frac{u_1^2 p_1^{\cancel{2}}}{\cancel{p_1}} = u_1^2 p_1 = a p_1 + s \in J^{-1}$$

e scelta $b \in J - P_\gamma$, allora $r_1^2 b \in p_1 R \subseteq P_\gamma$, che è una contraddizione.

(ii)⇒(i) Sia $\{M_\beta\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono I, allora per il Teorema 7 pag. 38, è sufficiente provare che $I^{-1} \subseteq (\bigcap R_{P_\alpha}) \cap (\bigcap R_{M_\beta})$.
Sia $u \in I^{-1}$ e $\alpha_\beta \in I - M_\beta$ per ogni β allora $u\alpha_\beta \in R$, quindi $I^{-1} \subseteq \bigcap R_{M_\beta}$. Perciò manca da verificare che $I^{-1} \subseteq \bigcap R_{P_\alpha}$.
Fissato $P_\gamma \in \{P_\alpha\}$, ci sono due casi possibili:

1. $P_\gamma \in S_2$, allora posto $J := \bigcap_{\alpha \neq \gamma} P_\alpha$ si ha $I^{-1} = J^{-1} + P_\gamma^{-1}$ e, poiché P_γ è un ideale massimale non invertibile, $P_\gamma^{-1} = R$, da cui $I^{-1} = J^{-1}$. Inoltre $J \not\subseteq P_\gamma$, quindi $I^{-1} = J^{-1} \subseteq R_{P_\gamma}$.

2. $P_\gamma \in S_3$, allora $P_\gamma R_N$ non è invertibile con N ideale massimale di R contenente P_γ. Inoltre
$$IR_N = P_\gamma R_N$$
infatti poiché P_γ è minimale su I, $I \subseteq P_\gamma$ e quindi $IR_N \subseteq P_\gamma R_N$. D'altraparte $P_\gamma R_N$ è minimale su IR_N infatti se non lo fosse, esisterebbe HR_N tale che $P_\gamma R_N \supset HR_N \supset IR_N$ e quindi $P_\gamma \supset H \supset I$ che va contro la minimalità di P_γ.
In più, essendo I un ideale radicale, $IR_N = \sqrt{I} R_N = \sqrt{IR_N}$ e dunque
$$IR_N := \bigcap \{PR_N \in \operatorname{Spec}(R_N) \mid PR_N \text{ è minimale su } IR_N\} = P_\gamma R_N.$$

Quindi dal Corollario 4 pag. 26, $I^{-1} \subseteq (I^{-1})_{R-N} \subseteq (R_N : IR_N) = (R_N : P_\gamma R_N) = RP_\gamma$.

Grazie al Teorema 8 appena dimostrato, possiamo vedere alcune proprietà degli ideali primi non invertibili in un dominio di Prüfer.

Proposizione 29 *Sia R un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e sia P un suo ideale primo non invertibile. Allora:*

(1) *P^{-1} è un sottoanello di K;*

(2) *$P^{-1} = (P : P)$;*

(3) *P è un ideale primo di P^{-1}.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Poiché $P \in S_2 \cap S_3$, la tesi segue dal Teorema 8 pag. 40.

(2) Essendo P un ideale primo, P è un ideale radicale inoltre per (1), P^{-1} è un anello, quindi per la Proposizione 18 pag. 24, $P^{-1} = (P : P)$.

(3) Poiché P è un ideale proprio di $(P : P)$, $P(P : P) \subset (P : P)$. Ma $(P : P)$ è un sopranello di R, quindi dal Teorema 6 pag. 37

$$\mathrm{Spec}\,((P : P)) = \mathrm{Spec}\left(P^{-1}\right) = \{Q\,(P : P) \text{ con } Q\,(P : P) \subset (P : P)\}.$$

perciò $P\,(P : P) = P$ è un ideale primo di P^{-1}.

Abbiamo visto con la Proposizione 18 pag. 24 che se un ideale I è invertibile in un dominio, allora I^{-1} non è un anello. Perciò se P è un ideale primo in un dominio di Prüfer, abbiamo che

$$P^{-1} \text{ è un anello} \Leftrightarrow P \text{ non è invertibile.}$$

Inoltre in un dominio di Prüfer, ogni ideale primo invertibile è massimale:

Teorema 9 *Sia P un ideale primo invertibile in un dominio di Prüfer R, allora P è massimale.*

Dimostrazione. Basta verificare che se P è un primo non massimale, allora non è invertibile.
Sia P un primo non massimale contenuto in un ideale massimale M e sia $V := R_M$ e $PV := PR_M$. Allora se $P \neq M$, $PV \neq MV$.
Poiché P non è massimale, $V_P = (PV : PV) \supset V$, dunque P non è invertibile in V e perciò non è invertibile in R.

Quindi tutte le volte che consideriamo ideali primi non massimali P di un dominio di Prüfer, abbiamo che questi sono non invertibili e quindi P^{-1} è un anello.

Corollario 9 *Siano P_1, P_2, ..., P_n ideali primi non nulli e non massimali in un dominio di Prüfer R. Se $J = P_1 P_2 \ldots P_n$, allora $(J : J) = (R : J)$.*

Dimostrazione. Poiché i P_i sono ideali primi non massimali in un dominio di Prüfer per ogni $i = 1, \ldots n$, non sono invertibili. Quindi $\{P_i\} \subseteq S_2 \cup S_3$.
Inoltre J è un ideale radicale, infatti $\sqrt{J} = \sqrt{P_1 P_2 \ldots P_n} = P_1 P_2 \ldots P_n = J$, dunque, dal Teorema 7 pag. 38, dal Teorema 8 pag. 40 e dalla Proposizione 18 pag. 24, $J^{-1} = (J : J)$ da cui la tesi.

3.2.1 Trasformato di Nagata

Sia R un dominio integro con campo dei quozienti K e sia I un suo ideale non nullo, si possono definire i seguenti sopranelli di R:

1. $T(I) := \bigcup_{n \geq 1} (R : I^n)$;
2. $\Omega(I) := \left\{ u \in K \mid \text{per ogni } a \in I,\ ua^{n(a)} \in R \text{ con } n(a) \in \mathbb{N} \right\}$.

Si hanno le seguenti relazioni di inclusione:

$$R \subseteq (I : I) \subseteq I^{-1} \subseteq T(I) \subseteq \Omega(I).$$

Definizione 24 *Sia R un dominio integro e I un suo ideale $T(I)$ è detto* ***trasformato di Nagata****.*

Osserviamo che $\Omega(I)$ è una variante del trasformato di Nagata e che se I è un ideale invertibile allora

$$T(I) = \bigcup_{n>0} (R : I^n) = \bigcup_{n>0} (R : I)^n = \bigcup_{n>0} (I^n)^{-1}$$

e quindi

$$IT(I) = T(I)$$

Lemma 2 *Sia I un ideale invertibile di un anello R. Se P è un ideale primo di R, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $I \subseteq P$

(ii) $PT(I) = T(I)$

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Poiché $T(I) \supseteq PT(I)$, basta verificare l'altra inclusione. Essendo I è invertibile, $IT(I) = T(I)$, inoltre $I \subseteq P$, perciò $T(I) \subseteq PT(I)$. Da cui la tesi.

(ii)⇒(i) Il trasformato di Nagata $T(I)$ è un anello, quindi $1 \in T(I)$. Perciò

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i s_i$$

con $p_i \in P$ e $s_i \in T(I)$, quindi esiste un intero positivo m tale che $s_i I^m \subseteq R$ per ogni $i = 1, \ldots n$. Sia $x \in I^m$, allora

$$x = 1 \cdot x = \sum_{i=1}^{n} p_i s_i x = \sum_{i=1}^{n} p_i (s_i x) \subseteq P$$

Dunque $I^m \subseteq P$ ed essendo P primo, $I \subseteq P$.

Con il prossimo Teorema troviamo una relazione che lega $T(I)$ con $\Omega(I)$. In particolare questi due oggetti algebrici coincidono nelle ipotesi in cui I è un ideale non nullo finitamente generato dell'anello R.

Teorema 10 *Sia R un dominio integro e I un suo ideale non nullo. Allora si hanno le seguenti proprietà:*

(1) $\Omega(I) = \bigcap R_P$ *con P che varia nell'insieme degli ideali primi che non contengono I;*

(2) $\Omega(I) = \bigcap_{a \in I} \Omega((a)) = \bigcap_{a \in I} T((a))$*;*

(3) *Se I è finitamente generato, allora $\Omega(I) = T(I) = \bigcap_{a \in I} T((a)) = \bigcap R_P$ con P che varia nell'insieme degli ideali primi che non contengono I.*

DIMOSTRAZIONE.

1. Sia P un ideale primo di R che non contiene I e sia $u \in \Omega(I)$, allora esiste un elemento $a \in I - P$ e un intero positivo n che dipende da a, tale che $ua^n \in R$. Perciò $u \in R_P$.
   Per l'altra inclusione, consideriamo $u \in \bigcap R_P$ con $P \not\supseteq I$, allora
   $$u = \frac{a}{s} \text{ con } a \in R \text{ e } s \in R - P.$$
   Posto $J := (R :_R uR)$, mostriamo che per ogni ideale primo P non contenuto in I, $J \not\subseteq P$ e che $I \subseteq \sqrt{J}$. Infatti, in questo modo fissata $a \in I$, $a^n \in \sqrt{J} \supseteq J$ quindi $a^n \in J := (R :_R uR)$ dunque $a^n u \in R$ e perciò $u \in \Omega(I)$.
   Sia P un ideale primo non contenente in I, allora esiste un elemento $x \in I - P$, inoltre essendo P primo, poiché $x \notin P$ e $s \notin P$, $xs \notin P$. D'altaparte $xs \in J$, infatti
   $$xs \cdot uR = x \cancel{s} \frac{a}{\cancel{s}} R = xaR \subset R$$
   Quindi xs è un elemento che sta in J ma non in P e dunque $J \not\subseteq P$. Inoltre per ogni primo minimale Q di J, $I \subseteq Q$, altrimenti si avrebbe $J \not\subseteq Q$ che è una contraddizione. Quindi $I \subseteq \bigcap_{Q \in \mathrm{Spec}(R)} Q = \sqrt{J}$, che è quello che volevamo mostrare.

2. Ovvia.

3. Essendo I finitamente generato, si ha $\Omega(I) = T(I)$ e dunque la tesi segue dai due punti precedenti.

Nella prossima Proposizione, utiliziamo il trasformato di Nagata per stabilire quando un ideale massimale M di un dominio di Prüfer è invertibile in $(M : M)$.

Proposizione 30 *Per un ideale massimale non nullo M in un dominio di Prüfer R le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $M^{-1} \subset T(M)$

(ii) *M è un ideale massimale invertibile in $(M : M)$.*

Dimostrazione. Per il Corollario 8 pag.8, $R = (M : M)$.
(i)⇒(ii) Supponiamo per assurdo che M non sia invertibile in $(M : M)$, allora, essendo massimale $M^{-1} = (M : M) = R$. Quindi, procedendo per

induzione, per ogni intero naturale n, $M^{-n} = R$ da cui $R = T(M)$, che è contro l'ipotesi di partenza.

(ii)⇒(i) Poiché M è un ideale massimale invertibile in $(M : M)$, M^{-1} non è un anello e perciò $M^{-1} \subset T(M)$.

Questo risultato può essere esteso al caso più generale degli ideali primi:

Teorema 11 *Per un ideale primo non nullo P in un dominio di Prüfer R le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $P^{-1} \subset T(P)$

(ii) *P è un ideale massimale invertibile in* $(P : P)$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 30, possiamo assumere P un ideale primo non massimale, quindi P è non invertibile in R e perciò per la Proposizione 29 pag. 42, $P^{-1} = (P : P)$.
(i)⇒(ii) Per la proposizione 29 pag. 42, P è un ideale primo di $(P : P) = P^{-1}$.
Supponiamo per assurdo che P non sia invertibile in P^{-1}, allora anche P^{-2} sarà non invertibile in P^{-1} e dunque P^{-2} è un anello. Ma

$$\left(P^{-1} : P\right) = \left(R : P^2\right) = P^{-2}$$

Quindi $(P^{-1} : P)$ è un anello. Questo implica che

$$\left(P^{-1} : P\right) = (P : P) = P^{-1}$$

Dunque $P^{-1} = P^{-2}$ e, procedendo per induzione, per ogni intero positivo n $P^{-1} = P^{-n}$, quindi $P^{-1} = T(P)$ che è assurdo.
Perciò P è invertibile in $P^{-1} = (P : P)$ che è un dominio di Prüfer, e poiché in un dominio di Prüfer un ideale invertibile è massimale, P è un ideale massimale di $(P : P)$.

(ii)⇒(i) In generale abbiamo che $P^{-1} \subseteq (P^{-1} : P)$, ma P^{-1} è un anello mentre $(P^{-1} : P)$ non lo è, essendo questo l'inverso di P in $(P : P)$. Quindi

$$P^{-1} \subset \left(P^{-1} : P\right) = ((R : P) : P) = \left(R : P^2\right) = P^{-2} \subseteq T(P)$$

da cui la tesi.

L'importanza di questo Teorema emergerà nel paragrafo 3.5 pag. 50, in quanto lo utilizzeremo per stabilire quando un ideale primo non nullo e non massimale in un dominio di Prüfer è divisoriale e nel prossimo capitolo in cui verrà utilizzato per caratterizzare i domini di Dedekind generalizzati.

3.3 Ideali ramificati nei domini di Prüfer

In questa parte, ci occuperemo degli ideali ramificati nei domini di Prüfer. Iniziamo studiando l'insieme dei suoi ideali primari.

Teorema 12 *Sia R un dominio di Prüfer e P un ideale primo non nullo di R. Si hanno le seguenti proprietà:*

(1) *Se Q è P-primario e $x \in R - P$ allora $Q = Q[Q + (x)]$;*

(2) *Sia $S := \{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dove Q_λ sono ideali P-primari. Allora*

1. *S è chiuso moltiplicativamente;*
2. *$S \supseteq \left\{P^k\right\}_{k=1}^{\infty}$;*
3. *Se $P \neq P^2$, allora $S = \left\{P^k\right\}_{k=1}^{\infty}$.*

(3) *Se P è ramificato e $Q \neq P$ è P-primario, allora $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k$*

(4) *$P_0 := \bigcap Q_\lambda$ è un ideale primo di R e non ci sono ideali primi di R propriamente contenuti tra P_0 e P.*

Dimostrazione.

(1) Per mostrare che $Q = Q[Q + (x)]$ basta verificare che per ogni ideale massimale M di R, $QR_M = (Q^2 + Q(x))R_M$.
Se $Q \nsubseteq M$ allora $QR_M = R_M = Q^2R_M$ e quindi si ha la tesi. Perciò possiamo assumere $Q \subseteq M$. Allora $\sqrt{QR_M} = \sqrt{Q}R_M = PR_M$ quindi QR_M è PR_M- primario.
Essendo $x \in R - P$, $x \notin PR_M$ e poiché R_M di valutazione, dal Teorema 3 pag. 27, $QR_M = QxR_M$ e poiché $Q \supseteq Q^2$, si ha $QR_M = [Q^2 + Q(x)]R_M$.

(2) Procediamo con la dimostrazione dei tre sottopunti:

1. Siano Q_1, $Q_2 \in S$, allora $Q_1R_M \cdot Q_2R_M = Q_1Q_2R_M$ è PR_M-primario (Teorema 3 pag. 27). Inoltre poiché $\sqrt{Q_1Q_2} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} = P$, Q_1Q_2 è P-primario (cfr. [12] Lemma 23.1 pag. 288).
2. Ovvio.
3. Poiché $P \neq P^2$, $PR_P \neq P^2R_P$. Inoltre $P^2 = P^2R_P \cap R$ è primario, quindi $\left\{P^kR_P\right\}_{k=1}^{\infty}$ è l'insieme degli ideali PR_P-primari di R_P e perciò
$$\left\{P^kR_P \cap R\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{P^k\right\}_{k=1}^{\infty}$$
è l'insieme degli ideali P-primari di R.

(3) Poiché $Q_\lambda = Q_\lambda R_P \cap R$,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda R_P \cap R = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k R_P \cap R = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k$$

da cui la tesi.

(4) Segue dal Teorema 3 pag. 27 passando a R_P.

Osserviamo che il Teorema 12 è l'analogo nei domini di Prüfer del Teorema 3 pag. 27, visto per gli anelli di valutazione.
Ci occupiamo ora di caratterizzare gli ideali ramificati nei domini di Prüfer.

Proposizione 31 *Sia R un dominio di Prüfer e P un suo ideale primo. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *P è ramificato;*

(ii) *Esiste un ideale I di R, $I \neq P$ tale che $\sqrt{I} = P$;*

(iii) *P è il primo minimale di un ideale principale;*

(iv) *P non è l'unione dell'insieme degli ideali primi di R propriamente contenuti in P;*

(v) *Esiste un ideale primo Q di V propriamente contenuto in P tale che non esistono ideali primi di V propriamente contenuti tra Q e P.*

Dimostrazione. **(i)⇔(iv)** P non è l'unione dell'insieme degli ideali primi di V propriamente contenuti in P se e solo se PR_P non è l'unione dell'insieme degli ideali primi di R_P propriamente contenuti in PR_P se e solo se PR_P è ramificato se e solo se P è ramificato.

(i)⇔(v) Esiste un ideale primo Q di V propriamente contenuto in P tale che non esistono ideali primi di V propriamente contenuti tra Q e P se e solo se questa condizione vale anche per PR_P e ciò avviene se e solo se PR_P è ramificato.

(i)⇒(ii) Ovvio.

(ii)⇒(iii) Ovvio.

(iii)⇒(iv) Sia (x) l'ideale principale di cui P è il primo minimale, allora non esiste nessun ideale primo di R propriamente contenuto in P, contenente x. Dunque P non è l'unione dell'insieme degli ideali primi di R propriamente contenuti in P.

3.4 Domini di Prüfer discreti e fortemente discreti

In questa sezione ci occupiamo dei domini di Prüfer discreti e fortemente discreti, vedendo che la loro definizione è del tutto analoga a quella data per gli anelli di valutazione e che, anche in questo caso, le due nozioni coincidono nel caso di domini di dimensione finita.

Definizione 25 *Un dominio di Prüfer R si dice* ***dominio di Prüfer discreto*** *se ciascun ideale primo ramificato di R è non idempotente.*
Si dice, invece ***dominio di Prüfer fortemente discreto*** *se ciascun ideale primo non nullo di R non è idempotente.*

Per prima cosa vediamo come queste definizioni siano riconducibili agli anelli di valutazione.

Proposizione 32 *Sia R un dominio di Prüfer. Allora*

(1) *R è un dominio di Prüfer discreto se e solo se per ogni ideale primo P di R, R_P è un anello di valutazione discreta;*

(2) *R è un dominio di Prüfer fortemente discreto se e solo se per ogni ideale primo P di R, R_P è un anello di valutazione fortemente discreta.*

Dimostrazione. In entrambi i casi la dimostrazione segue dalla corrispondenza tra gli ideali primi di R e gli ideali primi di R_P.

Osservazione 6 Notiamo che poiché R_P è di valutazione

1. R è un dominio di Prüfer discreto se e solo se ciascun ideale primario di R_P è potenza del suo radicale;

2. R è un dominio di Prüfer fortemente discreto se e solo se R_P è un anello di valutazione discreta e gli ideali primi di R_P soddisfano l'ipotesi della catena ascendente.

Proposizione 33 *Sopranelli di domini di Prüfer fortemente discreti, sono domini di Prüfer fortemente discreti.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 6 pag. 37, $R_P = T_M$ dove M è un ideale primo in T e $P := M \cap R$ è un ideale primo in R. Quindi, poiché R è un dominio di Prüfer fortemente discreto, R_P è un anello di valutazione fortemente discreta per ogni ideale primo P di V , quindi per ogni ideale massimale M di T, T_M è un anello di valutazione fortemente discreta e perciò T è un dominio di Prüfer fortemente discreto.

Proposizione 34 *Per un dominio un dominio di Prüfer R di dimensione finita, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *R è un dominio di Prüfer discreto;*

(ii) *R è un dominio di Prüfer fortemente discreto.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che R_P è un anello di valutazione e, in dimensione finita, la nozione di anello di valutazione discreta coincide con quella di anello di valutazione fortemente discreta.

3.5 Ideali divisoriali nei domini di Prüfer

Ci occupiamo ora di capire quando un ideale primo in un dominio di Prüfer è un ideale divisoriale. Con il prossimo Teorema riduciamo il nostro studio agli ideali primi non massimali.

Teorema 13 *Sia M un ideale massimale di un dominio di Prüfer R, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *M è divisoriale;*

(ii) *M^n è divisoriale per ogni intero positivo n;*

(iii) *M è finitamente generato;*

(iv) *M è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. **(iv)$\Leftrightarrow$(iii)** Ovvio.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Poiché M è finitamente generato, lo è anche M^n da cui la tesi.

(ii)$\Rightarrow$(i) Ovvio.

(i)$\Rightarrow$(iv) Supponiamo per assurdo che M non sia invertibile, allora per il-Corollario 7 pag. 39, $M^{-1} = R$, ovvero M non è divisoriale che è contro l'ipotesi.

Sia P un ideale primo di un anello di Prüfer R con campo dei quozienti K. Sappiamo che in generale abbiamo le seguenti inclusioni:

$$R \subseteq P^{-1} \subseteq T(P)$$

Inoltre se P è un ideale primo non massimale e non nullo, abbiamo visto che P è non invertibile (Teorema 9 pag. 42) e quindi che P^{-1} è un sottoanello di K, dunque

$$P^{-1} = (P : P) = R_P \cap \left(\bigcap R_{M_\alpha}\right)$$

dove $\{M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P (Teorema 7 pag.38). Perciò abbiamo anche che

$$R \subseteq P^{-1} \subseteq S := K \cap \left(\bigcap R_{M_\alpha}\right)$$

Vogliamo mostrare ora che se $P^{-1} \neq T(P)$ e se $P^{-1} \neq S$, allora P è divisoriale.

Teorema 14 *Sia P un ideale primo non nullo e non massimale in un dominio di Prüfer R con campo dei quozienti K e sia $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P. Se $P^{-1} \subset T(P)$, allora P è divisoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 11 pag. 46, P è un ideale massimale invertibile in $(P : P) = P^{-1}$. Inoltre, poiché $P_v = (R : P^{-1})$ e $R \subset P^{-1}$,

$$P_v \subset \left(P^{-1} : P^{-1}\right) = ((P : P) : (P : P)) = (P : P(P : P)) = (P : P) = P^{-1}$$

Dunque $P \subseteq P_v \subset P^{-1}$, ma P_v è un ideale proprio di P^{-1} e P è un ideale massimale in P^{-1}, quindi $P = P_v$.

Per verificare che se $P \neq S$, allora P è divisoriale, abbiamo bisogno di alcuni risultati:

Proposizione 35 *Sia P un ideale primo in un dominio di Prüfer R e sia $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P. Sia, inoltre, Q un ideale primo di R tale che $Q \subset P$ e $R' := R_Q \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$.*
Se esiste un ideale I di R finitamente generato, tale che $I \subseteq P$ e $I \nsubseteq M_\alpha$ per ogni α, allora $R' \nsubseteq R_P$.

DIMOSTRAZIONE. Possiamo scegliere $I \not\subseteq Q$ e poiché I è finitamente generato, $T(I) = \Omega(I) = \bigcap R_{P_\beta}$, con P_β ideali primi di R non contenenti I. Perciò

$$T(I) \subseteq R_Q \cap \left(\bigcap R_{M_\alpha}\right) = R'$$

Inoltre, essendo I un ideale finitamente generato in un dominio di Prüfer, I è invertible e poiché $I \subseteq P$, $PT(I) = T(I)$. Quindi per il Teorema 6 pag. 37, $T(I) \not\subseteq R_P$ e perciò $R' \not\subseteq R_P$.

Proposizione 36 *Sia P un ideale primo non nullo in un dominio di Prüfer R e sia $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\bigcap R_{M_\alpha} \not\subseteq R_P$;

(ii) *Esiste I, ideale finitamente generato di R contenuto in P, tale che per ogni α, $I \not\subseteq M_\alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Sia u un elemento in $\bigcap R_{M_\alpha} - R_P$, allora $u = a/b$ con $a \in R$ e $b \in R$. Posto $I := (bR :_R aR)$, allora essendo aR e bR finitamente generati, I è finitamente generato (cfr. [12] Proposizione 25.4 (3) pag. 314).
Inoltre, fissato α, $u = a/b = c/d$ con $d \notin M_\alpha$ e $c \in R$, quindi $d \in I$ e $d \notin M_\alpha$ perciò $I \not\subseteq M_\alpha$.
Infine $I \subseteq P$, infatti sia $x \in I$, allora $xaR \subseteq bR$ e quindi $xa \in bR$, perciò

$$x \in \left(\frac{b}{a}\right) R \subseteq PR_P \cap R = P$$

da cui la tesi.

(ii)⇒(i) Segue dalla Proposizione 35 pag. 51.

Proposizione 37 *Sia P un ideale primo non massimale e non nullo di un dominio di Prüfer R con campo dei quozienti K. Sia inoltre $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $P^{-1} \subset K \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$;

(ii) *Esiste un ideale I di R finitamente generato, tale che $I \subseteq P$ e $I \not\subseteq M_\alpha$ per ogni α;*

(iii) $\bigcap R_{M_\alpha} \not\subseteq R_P$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché P è un ideale primo non massimale, P^{-1} è un anello e dunque $P^{-1} = R_P \cap (R_{M_\alpha})$.

(ii)⇔(iii) Segue dalla Proposizione 36 pag. 52.

(i)⇒(iii) Supponiamo per assurdo che $\bigcap R_{M_\alpha} \subseteq R_P$, allora

$$P^{-1} = \bigcap R_{M_\alpha} \supseteq K \cap \left(\bigcap R_{M_\alpha}\right)$$

che è contro l'ipotesi.

(iii)⇒(i) Dall'ipotesi segue che $R_P \cap (\bigcap R_{M_\alpha}) \neq \bigcap R_{M_\alpha}$ e quindi $R_P \cap (\bigcap R_{M_\alpha}) \subset \bigcap R_{M_\alpha}$. Dunque

$$R_P \cap \left(\bigcap R_{M_\alpha}\right) \subset \bigcap R_{M_\alpha} \cap K$$

da cui la tesi.

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per poter dimostrare che se $P^{-1} \neq S := K \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$, allora P è divisoriale.

Proposizione 38 *Sia P un ideale primo non massimale e non nullo di un dominio di Prüfer R con campo dei quozienti K. Sia inoltre $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P. Se $P^{-1} \subset K \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$, allora P è divisoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Per verificare che P è divisoriale, basta mostrare che P è intersezione di ideali finitamente generati in quanto questi, in un dominio di Prüfer, sono divisoriali e intersezione di ideali divisoriali, è un ideale divisoriale.
Per la Proposizione 37 pag. 52, esiste I ideale finitamente generato di R tale che $I \subseteq P$ e $I \nsubseteq M_\alpha$ per ogni α. Posto

$$S := \bigcap \{(I,\, r) \text{ tale che } r \in R - P\}$$

Vogliamo dimostrare che $P = S$.
Fissata $a \in R - P$, se $M \in \{M_\alpha\}$, allora $R_M = (I,\, a)\, R_M = PR_M$, mentre se $M \notin \{M_\alpha\}$, allora $PR_M \subseteq aR_M = (I,\, a)\, R_M$.
Perciò $P \subseteq \bigcap (I,\, a)\, R_M = (I,\, a)$. Per l'altra inclusione basta mostrare che se $x \notin P$, allora $x \notin S$.
Poiché P è un ideale primo non massimale di R, per ogni ideale massimale M contenente P, $S \subseteq M$. Se esiste un ideale massimale M contenente P tale che $x \notin M$, allora si ha la tesi. Quindi consideriamo il caso in cui $x \in M - P$

con $P \subseteq M$ e M ideale massimale.
Abbiamo che

$$x \notin \left(x^2\right) R_M = \left(x^2,\, I\right) R_M$$

e dunque $x \notin (x^2,\, I) \supseteq S$. Da cui la tesi.

Corollario 10 *Sia P un ideale primo non massimale e non nullo di un dominio di Prüfer R con campo dei quozienti K. Sia inoltre $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P. Allora si hanno le seguenti proprietà:*

(1) *Se $P \nsubseteq \bigcup M_\alpha$, allora P è divisoriale;*

(2) *Se P è il radicale di un ideale invertibile, allora P è divisoriale.*

Dimostrazione.

(1) Sia $a \in P - \bigcup M_\alpha$, l'ideale $I := (a)$ è finitamente generato e inoltre $I \subseteq P$ e $I \nsubseteq M_\alpha$ per ogni α. Quindi $P^{-1} \subset K \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$ e dunque P è divisoriale.

(2) Sia I l'ideale invertibile di cui P è il radicale, allora $P = \sqrt{I} \supseteq I$. Sono possibili due casi:

1. Se $I \notin \{M_\alpha\}$, allora come a prima $P^{-1} \subset K \cap (\bigcap R_{M_\alpha})$ e quindi P è divisoriale.
2. Se $I \in \{M_\alpha\}$, allora I è massimale dunque $\sqrt{I} = I$, ma $\sqrt{I} = P$, quindi $I = P$ che è invertibile e perciò per il Teorema 13 pag. 50, I è divisoriale.

Abbiamo trovato delle condizioni affinché un ideale primo in un dominio di Prüfer, sia divisoriale. Ora troveremo delle condizioni nel caso di potenze di ideali primi.

Lemma 3 *Sia P un ideale primo in un dominio di Prüfer R. Allora*

$$(R : T\,(P)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P^n)_v$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$(R : T\,(P)) = \left(R : \bigcup_{n=1}^{\infty} (R : P^n)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (R : (R : P^n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P^n)_v$$

Proposizione 39 *Sia P un ideale primo in un dominio di Prüfer R e sia $P_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *P^n è divisoriale per ogni intero positivo n;*

(ii) $(R : T(P)) = P_0$.

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Segue dal Lemma 3, infatti abbiamo che

$$(R : T(P)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (P^n)_v = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = P_0$$

(ii)⇒(i) Distinguiamo tre casi:

1. P è un ideale massimale di R.
   Notiamo che $P^{-1} \neq R$, infatti se per assurdo $P^{-1} = R$, allora $P^{-n} = R$ per ogni n. Quindi $R = T(P)$ e dunque si arriverebbe ad una contraddizione osservando che $(R : T(P)) = R \neq P_0$.
   Perciò poiché P è massimale e $P^{-1} \neq R$, P è invertibile e quindi P^n è divisoriale.

2. P è un ideale primo non massimale di R e $P^{-1} = T(P)$.
   Sotto queste ipotesi, abbiamo che

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} P^n := P_0 = (R : T(P)) = \left(R : P^{-1}\right) := P_v$$

   Ma ciò implica che $P_v \subseteq P^n$ per ogni n e quindi, poiché $P^n \subseteq P$, $P_v \subseteq P$. Tuttavia è sempre verificata l'altra inclusione, perciò $P = P_v$. Dunque $P_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n = P$, quindi $P \subseteq P^n$ per ogni n e perciò $P = P^n$. Ma, essendo P divisoriale, lo è anche P^n.

3. P è un ideale primo non massimale di R e $P^{-1} \subset T(P)$.
   Sotto queste ipotesi, sappiamo che

   - P^{-1} è un sopranello di R;
   - P è un ideale divisoriale;
   - P è un ideale massimale invertibile in $(P : P) = P^{-1}$

   Quindi abbiamo che

   $$(P^n)_v = (R : (R : P^n)) = \left(R : \left((R : P) : P^{n-1}\right)\right) = \left(R : \left(P^{-1} : P^{n-1}\right)\right) =$$

   $$= \left(R : \left(P^{-1} : P^{n-1}\right) P^{-1}\right) = \left(\left(R : P^{-1}\right) : \left(P^{-1} : P^{n-1}\right)\right) = \left(P : P^{-n}\right)$$

Sia $z \in (P^n)_v$, allora $zP^{-n} \subseteq P$, quindi $zP^{-n}P^{n-1} \subseteq PP^{n-1} = P^n$ da cui $zP^{-1} \subseteq P^n$ e poiché P^n è un ideale di P^{-1}, $z \in P^n$, dunque $P^n \supseteq P^n_v$ e quindi P^n è divisoriale.

Notiamo che nella dimostrazione del punto (3) della Proposizione 39 , non si utilizza l'ipotesi che $P_0 = (R : T(P))$. Quindi abbiamo il seguente corollario:

Corollario 11 *Se P è un ideale primo non massimale in un dominio di Prüfer R tale che $P^{-1} \subset T(P)$, allora P^n è divisoriale.*

Proposizione 40 *Sia P un ideale primo in un un dominio di Prüfer R. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *P^n è un ideale divisoriale per ogni intero positivo n;*

(ii) *P^2 è un ideale divisoriale.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** E' ovvia.

(ii)⇒(i) Distinguiamo tre casi:

1. P è un ideale massimale di R.
   Osserviamo che P è finitamente generato, infatti se non lo fosse P non sarebbe invertibile, quindi $P^{-1} = R$ e perciò $P^{-1} = P^{-2} = R$. Ma ciò implicherebbe che $(P^2)_v = (R : P^{-2}) = (R : R) \neq P^2$, che è contro l'ipotesi di P^2 divisoriale.
   Quindi P è invertibile e dunque, essendo massimale, P^n divisoriale.

2. P è un ideale primo non massimale di R e $P^{-1} \neq T(P)$.
   Poiché P^2 è divisoriale, per la Proposizione 39 pag. 55, $P_0 = P \cap P^2 = (R : T(P))$. Perciò $P^2 = (R : P^{-1}) = P_v$.
   Osserviamo che $P \supseteq P^2 = P_v$ e quindi $P = P_v$. Perciò $P = P_v = P^2$ e dunque $P = P^n = P_v$, cioè la tesi.

3. P è un ideale primo non massimale di R e $P^{-1} \subset T(P)$.
   In questo caso la tesi segue dal Corollario 11 pag. 56.

Teorema 15 *Per un ideale primo P in un dominio di Prüfer R, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *P^n è divisoriale per ogni $n \geq 1$;*

(ii) $(R : T(P)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^n$*;*

(iii) P^2 *è divisoriale;*

(iv) $P^{-1} \subset T(P)$ *oppure* P *è un ideale divisoriale idempotente.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇔(ii)⇔(iii)** Ovvio.

(i)⇒(iv) Se $P^{-1} = T(P)$, allora per ogni intero positivo n, $P^{-n} = P^{-1}$ e quindi per ogni n si ha

$$P^n = (P^n)_v = \left(R : P^{-n}\right) = \left(R : P^{-1}\right) = P_v = P$$

da cui la tesi ponendo $n = 2$.

(iv)⇒(iii) Distinguiamo due casi:

1. P è un ideale massimale di R.
   Se $P = P^2$ è divisoriale, si ha la tesi mentre se $P^{-1} \subset T(P)$, allora P è finitamente generato infatti se per assuro P non lo fosse, non sarebbe neanche invertibile e quindi $P^{-1} = R$, da cui $P^{-n} = R$.
   Perciò $T(P) = \bigcup_n (R : P^n) = \bigcup_n P^{-n} = R$ che è contro l'ipotesi. Dunque P è finitamente generato e quindi, essendo P massimale, P^n divisoriale per ogni n da cui la tesi.

2. P è un ideale primo non massimale di R.
   Se $P = P^2$ è divisoriale allora anche P^2 è divisoriale mentre se $P^{-1} \subset T(P)$, la tesi segue dal Corollario 11 pag. 56.

Per finire, analiziamo il caso in cui P è un ideale primo non idempotente di un dominio di Prüfer.

Teorema 16 *Sia* R *un dominio di Prüfer e* P *un ideale primo non idempotente di* R*. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $P = P_v$ *e* $P^2 \neq (P^2)_v$*;*

(ii) $R \subset P^{-1} = T(P)$ *e* $(R : T(P)) = P$*;*

(iii) $P = (P^n)_v$ *per ogni* $n \geq 1$*.*

DIMOSTRAZIONE. **(iii)⇒(i)** Poiché $P = (P^n)_v$ per ogni intero positivo n, $P = P_v$. Manca da verificare che $P^2 \neq (P^2)_v$. Supponiamo per assurdo che valga l'ugualianza, allora, poiché $P = (P^n)_v$, si avrebbe $P^2 = P$ che contraddice il fatto che P sia non idempotente.

(i)⇒(ii) Poiché P è un ideale divisoriale, $R \subset P^{-1}$. Inoltre dal Teorema 15 pag. 56, $P^{-1} = T(P)$, quindi $(R : T(P)) = (R : P^{-1}) = P_v = P$.

(ii)⇒(iii) Essendo $P^{-1} = T(P)$, $(R : P) = \bigcup (R : P^n)$ e poiché in generale si ha $(R : P) \subseteq (R : P^n)$, abbiamo $(R : P^n) = (R : P)$ quindi $P^{-1} = P^{-n}$. Perciò

$$(P^n)_v = \left(R : P^{-n}\right) = \left(R : P^{-1}\right) = (R : T(P)) = P$$

da cui la tesi.

Osservazione 7 Un ideale primo P che soddisfa le tre condizioni equivalenti del Teorema 16 pag. 57, non può essere un ideale massimale. Infatti se per assurdo lo fosse, dalla condizione (1) di tale Teorema, P sarebbe un ideale divisoriale e quindi per il Teorema 13 pag. 50, anche P^n sarebbe un ideale divisoriale per ogni intero positivo n. Dunque P^2 sarebbe un ideale divisoriale e ciò contraddice la condizione (1) stessa del Teorema 16.

Capitolo 4

Domini di Dedekind generalizzati

Nei capitoli precedenti abbiamo sviluppato diversi concetti con lo scopo di conoscerne meglio le strutture trattate. Tutto questo ci serve per introdurre i domini di Dedekind generalizzati e vedere che questi si possono caratterizzare mediante gli ideali divisoriali.
Prima di fare ciò, però, abbiamo bisogno di analizzare alcune proprietà dei domini di Dedekind generalizzati e quindi di introdurre il concetto di ideale traccia, anello generalizzato di frazioni, ideale stabile, $\sharp$-dominio e $\sharp\sharp$-dominio.

4.1 Domini di Dedekind

Per prima cosa definiamo e caratterizziamo i domini di Dedekind.

Definizione 26 *Un dominio D si dice un* ***dominio di Dedekind*** *se è Noetheriano, integralmente chiuso e di dimensione* 1.

Con il prossimo risultato, caratterizziamo i domini di Dedekind.

Proposizione 41 *Per un dominio D, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *D è un dominio di Dedekind;*

(ii) *D è noetheriano e D_P è un DVR per ogni ideale primo P di R;*

(iii) *D è noetheriano e D_M è un DVR per ogni ideale massimale M di R;*

(iv) *Ogni ideale frazionario non nullo di D è invertibile.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇔(ii)** Segue dalla Proposizione 25 pag. 34 ricordando che se D_P è integralmente chiuso, allora lo è anche D.

(ii)⇒(iii) Ovvio.

(iii)⇒(iv) Chiaramente ogni ideale frazionario I è finitamente generato in quanto D è noetheriano. Inoltre D_M è un anello di valutazione discreta per ogni ideale massimale M di D quindi, per il Teorema 5 pag. 36, D è un dominio di Prüfer, quindi I è invertibile.

(iv)⇒(ii) Sia I un ideale di D. Allora questo è invertibile, quindi per la Proposizione 9 pag. 15, I è finitamente generato e ID_P è invertibile per ogni ideale primo P di D. Quindi D è noetheriano e, per la Proposizione 26 pag. 34, D_P è un anello di valutazione discreta.

Il prossimo Corollario segue immediatamente dalla Proposizione 12 pag. 17.

Corollario 12 *Ogni ideale in un dominio di Dedekind è divisoriale.*

Notiamo che poiché in un dominio di Dedekind ogni ideale è invertibile, si ha che

$$\text{Dedekind} \Rightarrow \text{Prüfer}.$$

Perciò considerando le implicazioni già viste, abbiamo le seguenti inclusioni:

$$\begin{array}{ccc} \text{Bézout} & \Rightarrow & \text{Prüfer} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{PID} & \Rightarrow & \text{Dedekind} \end{array}$$

Dalla definizione segue subito che un dominio di Bézout noetheriano è un PID e che un dominio di Prüfer noetheriano è un dominio di Dedekind. Tuttavia, in generale, nessuna implicazione si inverte, infatti

- Bézout $\not\Rightarrow$ PID e quindi Prüfer $\not\Rightarrow$ Dedekind; infatti basta considerare un anello di valutazione non discreta il quale è un dominio di Bézout ma non è un dominio ad ideali principali in quanto l'ideale massimale non è principale.

- Dedekind $\not\Rightarrow$ PID e dunque Prüfer $\not\Rightarrow$ Bézout; in questo caso basta considerare $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$ che, essendo la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}\big(\sqrt{-5}\big)$, è un dominio di Dedekind. Ma non è un dominio a ideali principali perché l'ideale $\big(2,\, 1+\sqrt{5}\big)$ non è principale altrimenti sarebbe generato da un elemento di norma 2 che non è possibile avere. Osserviamo, inoltre, che $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$ non è neanche un dominio a fattorizzazione unica, infatti $6 = 3 \cdot 2 = \big(1+\sqrt{-5}\big)\big(1-\sqrt{-5}\big)$.

Quindi non tutti i domini di Dedekind sono domini a fattorizzazione unica, ma gli ideali dei domini di Dedekind si fattorizzano in modo unico come prodotto di ideali primi:

Proposizione 42 *In un dominio di Dedekind D ogni ideale non nullo possiede una fattorizzazione unica come prodotto di ideali primi.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché D è un dominio di Dedekind è noetheriano, perciò ogni ideale I di D ha una decomposizione primaria (cfr. [1] Teorema 7.13 pag.126) e poiché ogni decomposizione primaria può essere ricondotta ad una minimale, possiamo scrivere

$$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$$

dove $Q_1, \ldots, Q_n$ sono ideali primi di D tali che $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$ per ogni $i \neq j$. Abbiamo inoltre, che D ha dimensione 1, quindi ogni ideale primo non nullo è massimale e perciò per ogni i, $\sqrt{Q_i} = M_i$ con M_i ideali massimali di D, dunque per ogni $i \neq j$, $M_i \neq M_j$ da cui $M_i + M_j = D$. Da questo segue che

$$\sqrt{Q_i + Q_j} = \sqrt{\sqrt{Q_i} + \sqrt{Q_j}} = \sqrt{D} = D$$

e quindi che $Q_i + Q_j = D$ e si verifica facilmente per induzione che ciò implica che $I = Q_1 Q_2 \ldots Q_n$.
Inoltre i Q_i sono univocamente determinati perché ciascun Q_i è una componente primaria isolata e sappiamo che queste sono univocamente determinate da D (cfr. [1] Corollario 4.11 pag.87).

4.2 Domini di Dedekind generalizzati

Definizione 27 *Un dominio R si dice un* ***dominio di Dedekind generalizzato*** *se è un dominio di Prüfer fortemente discreto e ogni ideale non nullo di R ha un numero finito di ideali primi minimali.*

Per caratterizzare i domini di Dedekind generalizzatie, abbiamo bisogno di dare la definizione di 'spettro noetheriano' di un anello e di vederne alcune caratterizzazioni.

Definizione 28 *Sia A un anello e $E \subseteq A$ un suo sottoinsieme. La **varietà associata ad E** è l'insieme di tutti gli ideali primi di A che contengono E. Questa viene denotata con $V(E)$, quindi*

$$V(E) := \{P \in Spec(A) \mid P \supseteq E\}$$

Sia A un anello, siano E, E_1, E_2 sottoinsiemi di A e siano I e J ideali arbitrari di A, allora è facile mostrare che $V(E)$ verifica le seguenti proprietà:

1. se $E_1 \subseteq E_2$, allora $V(E_2) \subseteq V(E_1)$;
2. $V(E) = V((E)) = V\left(\sqrt{E}\right)$;
3. $V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$;
4. $V(0) = \mathrm{Spec}(A)$ e $V(\{1\}) = \emptyset$;
5. $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cap V(J)$.

Definizione 29 *Sia A un anello e $E \subseteq A$ un suo sottoinsieme. La topologia la cui famiglia di chiusi è data da $\{V(E) \mid E \subseteq A\}$ è detta **topologia di Zariski**.*

Definizione 30 *Un dominio R ha **spettro (primo) noetheriano** se i sottoinsiemi chiusi dello spettro di R nella topologia di Zariski soddisfano la condizione della catena discendente.*

E' noto che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) Lo spettro di R è noetheriano;

(ii) Ogni sottoinsieme aperto dello spettro di R è quasi compatto, cioè ogni ricoprimento dello spettro di R ammette un sottoricoprimento finito.

(iii) R soddisfa la condizione della catena ascendante sugli ideali primi e ciascun ideale proprio ha un numero finito di ideali primi minimali.

(cfr. [2], Capitolo 2, Sezione 4 Proposizione 9, Corollario 2 della Proposizione 14, Proposizione 11, 10 e 8(i)).

Teorema 17 *Sia R un anello commutativo, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R ha spettro noetheriano;*

(ii) *Per ogni ideale I di R, $\sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_n)}$ con $a_i \in I$;*

(iii) *Per ogni ideale primo P di R, $P = \sqrt{P} = \sqrt{(a_1, \ldots, a_n)}$ con $a_i \in P$.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Sia $X := \mathrm{Spec}(R)$ e sia I un ideale di R.
Essendo $U := X - V(I)$ il complementare di un chiuso nella topologia di Zariski, è un aperto e dunque U è un sottoinsieme quasi compatto in X. Ora $I = \bigcup_{a \in I} \{a\}$, quindi

$$V(I) = V\left(\bigcup_{a \in I} a\right) = \bigcap_{a \in I} V(a)$$

Perciò

$$U = X - V(I) = X - \bigcap_{a \in I} V(a) = \bigcup_{a \in I} (X - V(a))$$

Dunque essendo quest'ultimo quasi compatto, ne possiamo considerare un sottoricoprimento finito. Perciò $U = X - \bigcap_{i=1}^{n} V(a_i) = X - V(\bigcup a_i) = X - V((a_1, \ldots a_n))$. Quindi

$$V(I) = \bigcap V((a_i)) = V((a_1, \ldots a_n))$$

da cui segue la tesi.

(ii)⇒(i) Sia U un sottoinsieme aperto di X. Allora esiste un ideale I di R tale che $U = X - V(I)$, quindi $\{X - V((a)) \mid a \in I\}$ è una ricopritura di aperti di U.
Ma per ipotesi $\sqrt{I} = \sqrt{(a_1, \ldots a_n)}$, quindi $U = X - \bigcup_{i=1}^{n} (X - V((a_i)))$ e perciò U è quasi compatto.

(ii)⇒(iii) Ovvio.

(iii)⇒(ii) Supponiamo per assurdo che esista J, ideale di R, tale che per ogni sottoinsieme finito S di J si ha che $\sqrt{J} \neq \sqrt{(S)}$.
Poiché $S \subseteq J$, $(S) \subset J$ e perciò $\sqrt{(S)} \subseteq \sqrt{J}$. Dunque stiamo assumendo che tale inclusione sia stretta. Sia

$$\Sigma := \left\{ I \text{ ideale di } R \mid \text{per ogni } S \subseteq I \text{ sottoinsieme finito, } \sqrt{(S)} \subset \sqrt{I} \right\}$$

allora Σ è non vuoto e inoltre poiché ogni catena $C := \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ in Σ ha un maggiorante ($\tilde{I} := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$), per il *Lemma di Zorn*, esiste un elemento massimale $P \in \Sigma$.
Dunque P non è un ideale primo di R e perciò esistono a, $b \in R - P$ tali che $ab \in P$. Siano $J_1 := (P,\, a)$ e $J_2 := (P,\, b)$, questi contengono P quindi J_1, $J_2 \notin \Sigma$.
Perciò esistono F_1 ed F_2 sottoinsiemi finiti di J_1 e J_2 tali che $\sqrt{(F_1)} = \sqrt{(J_1)}$ e $\sqrt{(F_2)} = \sqrt{(J_2)}$. Ma

$$\sqrt{J_1 J_2} = \sqrt{J_1}\sqrt{J_2} = \sqrt{(F_1)}\sqrt{(F_2)} = \sqrt{(F_1)\,(F_2)}.$$

Notiamo che per ogni $x \in (F_1)$ e per ogni $y \in (F_2)$, $xy \in P$. Quindi $(F_1)\,(F_2) \subseteq P$ e $\sqrt{J_1 J_2} = \sqrt{(F_1)\,(F_2)} \subseteq \sqrt{P}$.
D'altraparte $P \subset J_1$, J_2, quindi $J_1 J_2 \supset P^2$ e perciò $\sqrt{J_1 J_2} \supset \sqrt{P^2} = \sqrt{P}$.
Dunque

$$\sqrt{P} = \sqrt{J_1 J_2} = \sqrt{(F_1)\,(F_2)}$$

Ma $F_1 F_2$ è un insieme finito, quindi $P \notin \Sigma$ e ciò è l'assurdo cercato.

Osserviamo che

Proposizione 43 *Sia T un sopranello di un dominio di Prüfer R. Allora se lo spettro di R è northeriano allora anche lo spettro di T è noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Q un ideale primo di T, allora per il Teorema 6 pag. 37, esiste un ideale primo P di R, tale che $Q = PT$.
Ma poiché lo spettro di R è noetheriano, $P = \sqrt{J}$ dove J è un ideale finitamente generato, quindi $PT = \sqrt{J}T \subseteq \sqrt{J}\sqrt{T} \subseteq \sqrt{JT} \subseteq PT$ Perciò $Q = PT = \sqrt{JT}$ è il radicale di un ideale finitamente generato, da cui la tesi.

A questo punto possiamo caratterizzare i domini di Dedekind generalizzati.

Proposizione 44 *Sia R un dominio. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *R è un dominio di Prüfer fortemente discreto con spettro noetheriano.*

DIMOSTRAZIONE. Segue in modo ovvio dal fatto che lo spettro di R è noetheriano se e solo se R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi e ogni ideale proprio ha un numero finito di ideali primi minimali.

Proposizione 45 *Un sopranello T di un dominio di Dedekind generalizzato R è un dominio di Dedekind generalizzato.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché R è un dominio di Dedekind generalizzato, R è un dominio di Prüfer fortemente discreto e ha spettro noetheriano. Ma i sopranelli di anelli di Prüfer fortemente discreti continuano ad essere anelli di Prüfer fortemente discreti e inoltre se R ha spettro noetheriano, anche i suoi sopranelli hanno spettro noetheriano e quindi si ha la tesi.

Il prossimo risultato evidenzia alcune proprietà degli ideali primi nei domini di Dedekind generalizzati.

Proposizione 46 *Sia D un dominio Dedekind generalizzato. Allora valgono le seguenti proprietà*

(1) *Se M è un ideale massimale di D, allora M è invertibile;*

(2) *Ogni ideale primo non nullo P di D è divisoriale;*

(3) *Per ogni ideale primo P di D esiste un ideale I finitamente generato contenuto in P, tale che per ogni ideale M massimale di D contenente I, $M \supseteq P$;*

(4) *Il prodotto finito di ideali primi non nulli e non massimali è divisoriale.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Essendo D un dominio di Dedekind generalizzato, D ha lo spettro noetheriano, quindi esiste un ideale finitamente generato J tale he $M = \sqrt{M} = \sqrt{J}$, perciò esiste un intero positivo k tale che

$$J = JD_M \cap D = M^k D_M \cap D = M^k$$

infatti $\sqrt{JD_M} = \sqrt{J}D_M = MD_M$ è massimale e dunque JD_M è MD_M-primario.
Inoltre poiché D è fortemente discreto, $M \neq M^2$ e dunque M è invertibile.

(2) Poiché D è un dominio di Dedekind generalizzto, lo spettro primo è noetheriano, quindi esiste un ideale I finitamente generato tale che $P = \sqrt{I}$. Ma D è un dominio di Prüfer, quindi I è un ideale invertibile e perciò, per il Corollario 10 pag. 54, P è divisoriale.

(3) Poiché lo spettro primo di D è noetheriano, esiste un ideale I finitamente generato tale che $P = \sqrt{I}$, quindi $P \supseteq I$.
Sia M un ideale massimale di D contenente I allora $\sqrt{M} \supseteq \sqrt{I}$ e quindi $M \supseteq P$, da cui la tesi.

(4) Per prima cosa, mostriamo che P^2 è divisoriale. Poiché per il punto (2), l'enunciato è verificato per $P = P^2$, possiamo supporre $P \neq P^2$.
Se $P^{-1} \neq T(P)$, allora per il Corollario 11 pag. 56, P^n è divisoriale per ogni intero positivo n e quindi P^2 è divisoriale.
Se, invece $P^{-1} = T(P)$, allora posto $P_0 = \bigcap P^n$, si ha

$$D_P \cap \left(\bigcap D_{M_\alpha}\right) = P^{-1} = T(P) = D_{P_0} \cap \left(\bigcap D_{M_\alpha}\right)$$

dove $\{M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali massimali di D che non contengono P. Per il punto (3), esiste un ideale I di D finitamente generato tale che $I \subseteq P$ e $I \nsubseteq M_\alpha$ per ogni α. Quindi per la Proposizione 35 pag. 51, $D_{P_0} \cap (\bigcap D_{M_\alpha}) \nsubseteq D_P$ mentre $D_P \cap (\bigcap D_{M_\alpha}) \subseteq D_P$, dunque

$$D_P \cap \left(\bigcap D_{M_\alpha}\right) \neq D_{P_0} \cap \left(\bigcap D_{M_\alpha}\right)$$

che è una contraddizione, quindi nei domini di Dedekind generalizzati non si può verificare il caso in cui $P^{-1} = T(P)$ e $P \neq P^2$.
È dunque conclusa la dimostrazione per P^2. Dobbiamo ora verificare il caso del prodotto di primi distinti. Consideriamo $P_1^{t_1} P_2^{t_2} \ldots P_n^{t_n}$ con P_i primi divisoriali distinti.
Senza perdita di generalità, possiamo assumere che P_i siano a due a due comassimali. Inoltre P_i^2 è divisoriale per ogni i, quindi per la Proposizione 40 pag. 56, $P_i^{t_i}$ è divisoriale per ogni i e dunque $P_1^{t_1} P_2^{t_2} \ldots P_n^{t_n} = \bigcap_{i=1}^{n} P_i^{t_i}$ è divisoriale.

Poiché in un dominio di Dedekind ogni ideale è invertibile, si ha il seguente Corollario:

Corollario 13 *Se R è un dominio di Dedekind, allora R è un dominio di Dedekind generalizzato.*

Introducendo la nozione di **quasi dominio di Dedekind**, anello la cui localizzazione su ciascun ideale massimale è un anello di valutazione discreta di dimensione 1, si ha la seguente Proposizione:

Proposizione 47 *Per un dominio R, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind;*

(ii) *R è un dominio di Dedekind generalizzato di dimensione 1;*

(iii) *R è un dominio di Dedekind generalizzato e un quasi dominio di Dedekind.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Segue dal Corollario 13 pag. 66.

(ii)⇒(iii) Poiché R è un dominio di Dedekind generalizzato, R è un dominio di Prüfer fortemente discreto, quindi R_P è un anello di valutazione fortemente discreto. Inoltre la dimensione di R è 1, quindi per la Proposizione 24 pag. 33 si ha la tesi.

(ii)⇒(i) Segue dal Teorema 37.2 [12] pag. 443.

4.2.1 Ideali traccia

In questa sezione, dopo aver definito il concetto di 'traccia' e di 'ideale traccia', ci occupiamo di studiare alcune proprietà, dette proprietà della traccia tramite le quali caratterizzeremo i domini di Dedekind generalizzati.

Definizione 31 *In un dominio integro R, la **traccia** di un R-modulo unitario M, denotata con $\tau(M)$, è l'ideale generato da*

$$\{f(m) \mid f \in Hom(M, R) \ \text{ e } m \in M\}$$

Definizione 32 *Un ideale I di un dominio integro R è un **ideale traccia** o anche **ideale forte** se è la traccia di un qualche R-modulo M.*

Tramite le prossime Proposizioni, riusciremo a caratterizzare gli ideali traccia.

Proposizione 48 *Sia I un ideale frazionario di un dominio integro R, allora $\tau(I) = II^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo $I \neq (0)$ e consideriamo $f \in Hom(I, R)$ e $a \in I$, $a \neq 0$. Allora $f(a)/a \in I^{-1}$. Sia $b \in I$ e $d \in R - \{0\}$ tale che $dI \subseteq R$, allora

$$\left(\frac{f(a)}{a}\right) b = \frac{f(ab)}{a} = \frac{f(ab)\,d}{ad} = \frac{f(abd)}{ad} = \frac{f(b)\ \cancel{ad}}{\cancel{ad}} = f(b) \in R$$

quindi $f(a) = (f(a)/a)\,a \in II^{-1}$ e dunque $\tau(I) \subseteq II^{-1}$.
Per l'altra inclusione, consideriamo $a \in I$, $a \neq 0$, $u \in I^{-1}$ e l'applicazione

$$f : I \longrightarrow R$$

$$t \longrightarrow tu$$

allora $f \in Hom(I, R)$ e $au = f(a) \in \tau(I)$, da cui la tesi.

Proposizione 49 *Sia R un dominio integro e M un R-modulo, allora*

$$\tau(M)^{-1} = (\tau(M) : \tau(M))$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\tau(M)^{-1} \supseteq (\tau(M) : \tau(M))$, quindi basta verificare l'altra inclusione.
Sia $u \in \tau(M)^{-1}$ e sia $a \in \tau(M)$, allora $a = \sum f_i(m_i)$ con $f_i \in Hom(M, R)$ e $m_i \in M$, quindi

$$ua = \sum uf_i(m_i) \in R.$$

Poiché $f_i \in Hom(M, R)$, $f_i(m) \in \tau(M)$ con $m \in M$ e quindi $uf_i(m)$ è un elemento di $\tau(M)^{-1}\tau(M) \subseteq R$ dunque

$$uf_i : M \longrightarrow R$$

$$m \longrightarrow uf_i(m)$$

ed è un omomorfismo. Perciò $ua \in \tau(M)$ e dunque poiché $a \in \tau(M)$, $u \in (\tau(M) : \tau(M))$ da cui la tesi.

Osservazione 8 Notiamo subito che da queste due proposizioni, ricaviamo che se I è un ideale frazionario di un dominio integro R, allora

$$\left(R : II^{-1}\right) = \left(II^{-1} : II^{-1}\right)$$

Utilizzando questi due risultati, possiamo dimostrare la seguente Proposizione:

Proposizione 50 *Sia I un ideale di un dominio integro R. Allora seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *I è un ideale traccia;*

(ii) *Esiste un qualche ideale non nullo J di R tale che $I = J(R : J)$;*

(iii) *$(R : I) = (I : I)$.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Poiché I è un ideale traccia, esiste un R-modulo M tale che $\tau(M) = I$. Ma per la Proposizione 48 pag. 67, $\tau(M) = MM^{-1}$, quindi $I = MM^{-1} = M(R : M)$ da cui la tesi.

(ii)⇒(iii) Dall'osservazione 8, $(R : JJ^{-1}) = (JJ^{-1} : JJ^{-1})$, e poiché $I = J(R : J) = JJ^{-1}$ si ha $(R : I) = (I : I)$.

(iii)⇒(i) Poiché $(R : I) = (I : I)$, allora $(R : I) I = (I : I) I = I$, quindi $\tau(I) = I$, da cui la tesi.

Corollario 14 *Sia I un ideale di un dominio integro R. Allora seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *I è un ideale traccia;*

(ii) *$\tau(I) = I$;*

(iii) *$I = I(R : I)$.*

Dimostrazione. **(i)⇒(ii)** Segue facilmente dalla dimostrazione della Proposizione 50 pag. 68.

(ii)⇒(i) Ovvio.

(ii)⇔(i) $\tau(I) = I \Leftrightarrow II^{-1} = I \Leftrightarrow I(R : I) = I$.

Definizione 33 *Un dominio integro R soddisfa la **proprietà della traccia** se ogni ideale traccia diverso da R è un ideale primo. In tal caso, R si chiama un **TP-dominio**.*

Come diretta conseguenza della definizione abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 51 *Per un dominio integro R, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *R è un TP-dominio;*

(ii) *$II^{-1} = R$ oppure II^{-1} è un ideale primo di R per ogni ideale I di R.*

Osserviamo, quindi che tutti i domini di Dedekind sono TP-domini in quanto ogni ideale frazionario è invertibile. Inoltre poiché anche gli anelli di valutazione sono TP-domini (cfr. [5], Proposizione 4.2.1 pag.72), si sono studiate diverse condizioni legate alla proprietà della traccia. In particolare W. Heinzer e I. Papick (cfr. [15]), ne hanno fatto un grande uso introducendo il concetto di ideale traccia e di dominio con la proprietà della traccia radicale.

Definizione 34 *Si dice che un dominio integro R soddisfa la **proprietà della traccia radicale** se ogni ideale traccia è radicale. In tal caso R si chiama un **RTP-dominio**.*

Nel caso di un dominio di Prüfer che soddisfa l'ipotesi della catena ascendente sugli ideali primi, si ha il seguente risultato (cfr. [9] Teorema 4 pag. 6):

Teorema 18 *Per un dominio di Prüfer R che soddisfa l'ipotesi della catena ascendente sugli ideali primi, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un RTP-dominio;*

(ii) *R ha spettro noetheriano.*

Quindi, poiché un dominio di Prüfer soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi, si ha il seguente Teorema:

Teorema 19 *Per un dominio D, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *D è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *D è un dominio di Prüfer fortemente discreto con la RTP-proprietà.*

Perciò un dominio di Dedekind generalizzato è un RTP-dominio. Inoltre

Proposizione 52 *Per un dominio di Dedekind generalizzato D, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *J è un ideale traccia;*

(ii) *$J = P_1 \dots P_n$ con P_i ideali primi non nulli e non massimali di D.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Poiché un dominio di Dedekind generalizzato è un RTP-dominio, $J = \sqrt{J}$, inoltre ogni ideale ha un numero finito di ideali primi minimali, sia quindi $J = P_1 \ldots P_n$ con P_i ideali primi minimali. Supponiamo per assurdo che esista un i tale che P_i è un ideale massimale di D. A meno di riordinare i P_i, possiamo supporre che P_1 sia l'ideale massimale. Allora, per la Proposizione 46 pag. 65, questo è invertibile. Quindi essendo J un ideale traccia, $J = J(R : J) = P_2 \ldots P_n$, che è una contraddizione. Quindi P_i non possono essere massimali.

(ii)⇒(i) Segue dal Corollario 9 pag. 43.

Osservazione 9 Per la Proposizione 46 pag. 65, in un dominio di Dedekind generalizzato ogni ideale traccia, essendo il prodotto di ideali primi non nulli e non massimali, è un ideale divisoriale.

4.2.2 $\sharp$-proprietà e $\sharp\sharp$-proprietà

Introduciamo in questa sezione la $\sharp$-proprietà e $\sharp\sharp$-proprietà, proprietà di separazione grazie alle quali si può dare un'altra caratterizzazione dei domini di Dedekind generalizzati.

Definizione 35 *Si dice che R è un dominio con la **$\sharp$-proprietà** o anche uno **$\sharp$-dominio** se per ogni Δ_1, Δ_2 sottoinsiemi distinti dell'insieme degli ideali massimali di R, si ha*

$$\bigcap_{M \in \Delta_1} R_M \neq \bigcap_{M \in \Delta_2} R_M$$

*Si dice, inoltre che R è un dominio con la **$\sharp\sharp$-proprietà** o anche uno **$\sharp\sharp$-dominio** se ogni sopranello di R ha la $\sharp$-proprietà.*

Caratteriziamo gli $\sharp$-domini di Prüfer.

Proposizione 53 *Per un dominio di Prüfer R le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R soddisfa la $\sharp$-proprietà;*

(ii) *Per ogni ideale massimale M_α di R, $\bigcap R_M \not\subseteq R_{M_\alpha}$ dove M varia in Max(R)$- \{M_\alpha\}$;*

(iii) *Per ogni ideale massimale M di R, esiste un ideale I finitamente generato tale che M è l'unico ideale massimale di R contenente I.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(ii)** Supponiamo per assurdo che esista un ideale massimale M_α di R tale che $\bigcap R_M \subseteq R_{M_\alpha}$. Allora $\bigcap R_M = (\bigcap R_M) \cap R_{M_\alpha}$ che è la contraddizione cercata.

(ii)⇒(i) Siano Δ_1 e Δ_2 due sottoinsiemi distinti dell'insieme degli ideali massimali di R, allora esiste $M_\alpha \in \Delta_1 - \Delta_2 \subseteq \mathrm{Max}\,(R)$ e dunque $\bigcap_{M\in\Delta_2} R_M \nsubseteq R_{M_\alpha}$. Ma $\bigcap_{M\in\Delta_1} R_M \subseteq R_{M_\alpha}$ e quindi $\bigcap_{M\in\Delta_2} R_M \neq \bigcap_{M\in\Delta_1} R_M$

(ii)⇒(iii) Segue dalla Proposizione 36 pag. 52.

(iii)⇒(i) Supponiamo che Δ_1 e Δ_2 siano due sottoinsiemi distinti dell'insieme degli ideali massimali di R e che $P \in \Delta_1 - \Delta_2$ allora esiste un ideale I finitamente generato tale che $I \subseteq P$ e $I \nsubseteq M$ per ogni $M \in \Delta_2$. Quindi, per la Proposizione 36 pag. 52, $\bigcap_{M\in\Delta_1} R_M \neq \bigcap_{M\in\Delta_2} R_M$.

Proposizione 54 *Se R un dominio di Prüfer tale che ogni suo ideale massimale M è il radicale di un ideale finitamente generato I, allora R ha la $\sharp$-proprietà.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 36 pag. 52, se P è un ideale primo non nullo di R e $\{M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono P allora esiste un ideale I finitamente generato tale che $I \subseteq P$ e $I \nsubseteq M_\alpha$ se e solo se $\bigcap R_{M_\alpha} \nsubseteq R_P$.
Consideriamo $P = M$, allora $P = \sqrt{I} \supseteq I$ con I finitamente generato e $I \nsubseteq M_\alpha$ perché se per assurdo I fosse contenuto in M_α, passando ai radicali si otterrebbe $M \subseteq M_\alpha$ che è una contraddizione.
Quindi $\bigcap R_{M_\alpha} \nsubseteq R_P$ e perciò R soddisfa la $\sharp$-proprietà per la Proposizione 53 paf. 71.

Osservazione 10 Se un dominio di Prüfer ha spettro noetheriano per il Teorema 17 pag. 63, ogni ideale massimale è il radicale di un ideale finitamente generato, quindi è uno $\sharp$-dominio.

Corollario 15 *Un dominio di Dedekind generalizzato R ha la $\sharp$-proprietà.*

Si possono caratterizzare gli $\sharp\sharp$-domini di Prüfer nel modo seguente:

Proposizione 55 *Per un dominio di Prüfer R sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *Ogni ideale primo P di R è il radicale di un ideale finitamente generato;*

(ii) *R ha spettro noetheriano;*

(iii) *R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi e ciascun sopranello di R ha la $\sharp$-proprietà;*

(iv) *R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi ed è uno $\sharp\sharp$-dominio;*

(v) *R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi e ogni ideale finitamente generato di R ha un numero finito di ideali primi minimali.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)$\Leftrightarrow$(ii)** Segue dal Teorema 17 pag. 63.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Poiché R ha spettro noetheriano, R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi. Inoltre per la Proposizione 43 pag. 64, ogni sopranello di R ha spettro noetheriano quindi da quanto detto nell'Osservazione 10, R ha la $\sharp$-proprietà.

(iii)$\Leftrightarrow$(iv) Ovvio.

(ii)$\Rightarrow$(v) Poiché R ha spettro noetheriano, R soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi e ogni ideale proprio ha un numero finito di ideali primi minimali. Si ha dunque la tesi.

(iii)$\Rightarrow$(v) Segue dalla Proposizione 3 pag. 287 cfr. [13].

A questo punto possiamo caratterizzare i domini di Dedekind generalizzati:

Teorema 20 *Sia R un dominio di Prüfer e T un suo sopranello. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *Ogni ideale massimale di T è invertibile;*

(iii) *R è un dominio di Prüfer fortemente discreto ed è uno $\sharp\sharp$-dominio.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)$\Rightarrow$(ii)** Segue dal fatto che un sopranello in un dominio di Dedekind generalizzato è un dominio di Dedekind generalizzato.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Per ogni ideale primo P di R, PR_P è massimale e quindi invertibile. Dunque $P \neq P^2$ e perciò R è un dominio di Prüfer fortemente discreto.

Inoltre poiché ogni ideale massimale M di T è invertibile per la Proposizione 54 pag. 72, T soddisfa la $\sharp$-proprietà e quindi R è un $\sharp\sharp$-dominio.

(iii)⇒(i) Poiché R è un dominio di Prüfer fortemente discreto, soddisfa la condizione della catena ascendente sugli ideali primi. Inoltre essendo R uno $\sharp\sharp$-dominio, ogni sopranello ha la $\sharp$-proprietà. La tesi segue dalla Proposizione 55 pag. 72.

4.2.3 Anelli generalizzati di frazioni

Definizione 36 *Un **sistema moltiplicativo** di ideali di un dominio R è una famiglia non vuota $\mathcal{F}$ di ideali tali che se I, J sono elementi di $\mathcal{F}$, allora anche IJ è un elemento di $\mathcal{F}$.*

Definizione 37 *Un sistema moltiplicativo di ideali $\mathcal{F}$ è detto **sistema localizzante** di R se:*

(L1) *$\mathcal{F}$ è saturo, ovvero se $I \in \mathcal{F}$ e J è un ideale di R tale che $J \supseteq I$, allora $J \in \mathcal{F}$;*

(L2) *Se $I \in \mathcal{F}$ e J è un ideale di R tale che $(J :_R xR) \in \mathcal{F}$ per ogni $x \in I$, allora $J \in \mathcal{F}$.*

Assumiamo che tutti i sistemi localizzanti siano non banali, cioè che siano non vuoti ed inoltre $(0) \notin \mathcal{F}$.

Definizione 38 *Un sistema localizzante $\mathcal{F}$ è un **sistema moltiplicativo finitamente generato** (rispettivamente **sistema moltiplicativo principale**) se per ogni ideale $I \in \mathcal{F}$, esiste un ideale $J \in \mathcal{F}$ finitamente generato (rispettivamente principale), tale che J è contenuto in I.*

Definizione 39 *Se $\mathcal{F}$ è un sistema moltiplicativo di ideali in un dominio R, si dice che $R_{\mathcal{F}} := \bigcup\{(R : J) \text{ tale che } J \in \mathcal{F}\}$ è l' **anello generalizzato di frazioni** di R rispetto a $\mathcal{F}$.*

Notiamo che se S è una parte moltiplicativa, allora $\mathcal{F} = \{(s) \mid s \in S\}$ è un sistema moltiplicativo e $R_{\mathcal{F}} = R_S$. Questo è il motivo per cui $R_{\mathcal{F}}$ è detto anello generalizzato di frazioni.

Esempio 1 Vediamo alcuni sistemi localizzanti:

(a) Sia R un dominio integro e T un sopranello di R. L'insieme così definito

$$\mathcal{F}(T) := \{I \mid I \text{ ideale di } R \text{ tale che } IT = T\}$$

è un sistema localizzante di R, infatti:

(L1) Si verifica immediatamente.

(L2) Abbiamo che $T = (J :_R xR)\,T \subseteq (JT :_T xT)$ per ogni $x \in I$. Quindi essendo T un anello, $1 \in (JT :_T xT)$ da cui $xT \subseteq JT$ per ogni $x \in I$, dunque $IT \subseteq JT$. Ma, poiché $IT = T$, $JT = T$ da cui la tesi.

Notiamo subito che $\mathcal{F}(T)$ è finitamente generato.

Non tutti i sistemi localizzanti sono finitamente generati:

(b) Sia V un anello di valutazione, consideriamo

$$\mathcal{F}\left(P_I^2\right) := \left\{I \mid I \text{ ideale di } V \text{ e } P \subseteq I \text{ con } P = P^2\right\}$$

è un sistema localizzante, infatti:

(L1) Si verifica subito.

(L2) Abbiamo che $(J :_R xR) \supseteq P$ per ogni $x \in I$ se e solo se $xP \subseteq J$ per ogni $x \in I$ ovvero $IP \subseteq J$. Ma $I \in \mathcal{F}(P_I^2)$, quindi $P^2 \subseteq J$, da cui la tesi.

Tuttavia $\mathcal{F}(P_I^2)$ non è un sistema localizzante finitamente generato, perché se lo fosse, poiché $P \in \mathcal{F}(P_I^2)$, dovrebbe esistere un ideale $J \subseteq P$ finitamente generato tale che $J \in \mathcal{F}(P_I^2)$. Ma ciò significherebbe che $J = P$ e, per il *Lemma di Nakayama*, ciò contraddice il fatto che $P = P^2$ e $P \neq (0)$.

Si è dimostrato (cfr. [8] Teorema 1.3) che in un dominio di Prüfer un sistema di ideali $\mathcal{F}$ è finitamente generato se e solo se $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R_{\mathcal{F}})$.

(c) Sia V un anello di valutazione, consideriamo

$$\mathcal{F}(P_I) := \{I \mid I \text{ ideale di } V \text{ e } P \subseteq I\}$$

è un sistema localizzante se e solo se $P = P^2$.
Infatti se $\mathcal{F}(P_I)$ è un sistema localizzante, pochè $P \in \mathcal{F}(P_I)$, anche $P^2 \in \mathcal{F}(P_I)$ da cui $P = P^2$. L'altra implicazione viene da quanto detto in (b).

(d) Sia R un dominio integro e P un ideale primo di R. L'insieme così definito

$$\mathcal{F}(P) := \{I \mid I \text{ ideale di } R \text{ e } I \nsubseteq P\}$$

è un sistema localizzante, infatti:

(L1) Si verifica banalmente.

(L2) Supponiamo per assurdo che $J \notin \mathcal{F}(P)$, allora $J \subseteq P$ e quindi per ogni elemento $\alpha \in (J : xR)$, $\alpha x R \subseteq J \subseteq P$, per ogni $x \in I$. Ma poiché $I \in \mathcal{F}(P)$, $I \nsubseteq P$, quindi $x \notin P$ e dunque $\alpha \in P$. Ma ciò significa che $(J : xR) \subseteq P$ che è assurdo in quanto $(J : xR) \in \mathcal{F}(P)$.

Inoltre è semplice verificare che $R_{\mathcal{F}(P)} = R_P$.

Vogliamo generalizzare quanto detto nell'Esempio 1 (d). Consideriamo i seguenti risultati la cui dimostrazione è una semplice verifica:

Lemma 4 *L'intersezione di una famiglia di sistemi localizzanti di un dato dominio integro, è un sistema localizzante.*

Lemma 5 *Se $\mathcal{F}'$ e $\mathcal{F}''$ sono due sistemi localizzanti tali che $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}''$, allora $R_{\mathcal{F}'} \subseteq R_{\mathcal{F}''}$.*

Abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 56 *Sia Λ un sottoinsieme non vuoto di ideali primi di un dominio integro R e sia $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\Lambda) := \bigcap_{P \in \Lambda} \mathcal{F}(P)$. Allora*

(1) *$\mathcal{F}$ è un sistema localizzante di R;*

(2) *$R_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P \in \Lambda} R_P$.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Poiché $\mathcal{F}(P)$ è un sistema localizzante per ogni ideale primo P di R, allora dal Lemma 4 anche $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante.

(2) Essendo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}(P)$ per ogni ideale primo $P \in \Lambda$, dal Lemma 5 si ha $R_{\mathcal{F}} \subseteq R_{\mathcal{F}(P)} = R_P$. Rimane da verificare l'altra inclusione.
Sia $x \in \bigcap_{P \in \Lambda} R_P$, allora per ogni ideale primo $P \in \Lambda$, esiste un elemento $s \in R - P$ dipendente da P, tale che $xs \in R$. Quindi $s \in (R :_R xR)$ e perciò $(R :_R xR) \nsubseteq P$ per ogni $P \in \Lambda$ e dunque $(R :_R xR) \in \bigcap_{P \in \Lambda} \mathcal{F}(P) = \mathcal{F}$ da cui $x \in R_{\mathcal{F}}$.

Notiamo che $\bigcap_{P\in\Lambda}\mathcal{F}(P) = \{I \mid I$ ideale di R tale che $I \nsubseteq P$ per ogni $P \in \Lambda\}$ e inoltre $R_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P\in\Lambda} R_P = \bigcup_{J\nsubseteq P}(R : J)$.
Si è dimostrato un risultato più generale di quello della Proposizione 56: se $\mathcal{F} = \bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{F}_\alpha$ con $\mathcal{F}_\alpha = \{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ famiglia non vuota di sistemi localizzanti di un dominio R, allora $R_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\alpha\in A} R_{\mathcal{F}_\alpha}$.

Possiamo ora caratterizzare i domini di Dedekind generalizzati.

Teorema 21 *Per un dominio di Prüfer R, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *Ciascun sistema localizzante di ideali è finitamente generato;*

(iii) *Per ciascun sistema localizzante di ideali $\mathcal{F}$ di R, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R_{\mathcal{F}}) := \{I \subseteq R \mid IR_{\mathcal{F}} = R_{\mathcal{F}}\}$.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(iii)** Per semplicità di notazione, poniamo $T = R_{\mathcal{F}}$. Poiché $\mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{F}$, per concludere la dimostrazione basta verificare l'altra inclusione.
Supponiamo per assurdo che esista $I \in \mathcal{F}$ tale che $IT \neq T$ e sia M un ideale massimale di T tale che $IT \subseteq M$. Posto $P := M \cap R \in \mathrm{Spec}(R)$, essendo R un dominio di Dedekind generalizzato, esiste un ideale J di R finitamente generato tale che $P = \sqrt{J}$. Inoltre poiché $I \subseteq P$ e $I \in \mathcal{F}$, essendo $\mathcal{F}$ saturo, $P \in \mathcal{F}$.
Per concludere basta mostrare che $J \in \mathcal{F}$, infatti in questo modo poiché $T := R_{\mathcal{F}} = \bigcup\{(R : J) \mid J \in \mathcal{F}\}$, $(R : J) \subseteq T$ e essendo J invertibile, $1 \in R = J(R : J) \subseteq JT \subseteq PT = M$ che è assurdo.
Poiché $P = \sqrt{J}$, JT è M-primario e poiché $M \neq M^2$, per Teorema 12 pag. 47, $JT = M^n = P^nT$ per qualche intero positivo n.
Sia $J := a_1R + \ldots + a_nR$ con $a_i \in R$, allora per ogni elemento x di P^n, $x = a_1y_1 + \ldots + a_ny_n$ con $y_i \in T$. Sia $I_i \in \mathcal{F}$ tale che $y_iI_i \subseteq R$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e sia $I := I_1 \ldots I_n$, allora $I \in \mathcal{F}$ e $xI \subseteq J$ e quindi $I \subseteq (J :_R xR)$ ed essendo $\mathcal{F}$ saturo, $(J :_R xR) \in \mathcal{F}$ per ogni $x \in P^n$. Ma $P^n \in \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ è un sistema localizzante, dunque $J \in \mathcal{F}$.

(iii)⇒(ii) Ovvio.

(ii)⇒(i) Per ogni sottoinsieme Λ dell'insieme degli ideali primi di R, il sistema localizzante $\mathcal{F}(\Lambda)$ è finitamente generato, e quindi R ha spettro noetheriano (cfr. [8], Teorema 2.6).

Dunque per concludere basta verificare che R sia un dominio di Prüfer fortemente discreto, cioè che per ogni ideale primo P di R, $P \neq P^2$.
Supponiamo per assurdo che $P = P^2$, sia M un ideale massimale di R contenente P, $V := R_M$, $Q := PV$ e sia $\mathcal{F}^*(Q)$ l'insieme degli ideali di V contenenti Q; allora poiché $Q = Q^2$, per quando nell'Esempio 1 (c) a pag. 74, $\mathcal{F}^*(Q)$ è un sistema localizzante di V che non è finitamente generato.
L'insieme di ideali $\mathcal{F} := \{I \subseteq R \mid IV \in \mathcal{F}^*(Q)\}$ è un sistema localizzante, quindi è finitamente generato. Dunque anche $\mathcal{F}^*(Q)$ è finitamente generato, che è assurdo.

Teorema 22 *Sia R un dominio di Dedekind generalizzato e sia $T := R_{\mathcal{F}(\Lambda)}$ un sopranello di R, con Λ un sottoinsieme non vuoto dell'insieme degli ideali primi di R. Si hanno le seguenti proprietà:*

(1) *T è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(2) *$\{PT\}$ con P massimale in Λ, è l'insieme degli ideali massimali di T.*

DIMOSTRAZIONE.

(1) Segue dal fatto che T è un sopranello di un dominio di Dedekind generalizzato.

(2) $\mathcal{F}(\Lambda) = \{I \mid I \nsubseteq P \text{ per ogni } P \in \Lambda\}$, ma per il Teorema 21 pag. 77, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{I \subseteq R \mid IT = T\}$, quindi $IT \neq T$ se e solo se esiste un elemento $P \in \Lambda$ tale che $I \subseteq P$. Perciò, per il Teorema 6 pag. 37, $\mathrm{Spec}(T) = \{QT \mid Q \subseteq P \text{ per qualche } P \in \Lambda\}$. Ma poiché lo spettro di R è noetheriano e Λ è un sottoinsieme di $\mathrm{Spec}(R)$, gli ideali primi soddisfano la condizione della catena ascendente e perciò Λ ha elemeti massimali. Quindi $\mathrm{Max}(T) = \{PT \mid P \text{ è massimale in } \Lambda\}$.

Notiamo che per la Proposizione 29 pag. 42, in un dominio di Prüfer R se $J = P_1 \dots P_n$ con P_i ideali primi non nulli e non massimali, allora $(J : J) = (R : J)$. Sia Λ l'insieme degli ideali massimali di R che non contengono J con la notazione ora introdotta, abbiamo che

$$(J : J) = (R : J) = \bigcap_{i=1}^{n} R_{P_i} \cap R_{\mathcal{F}(\Lambda)}$$

4.2.4 Ideali divisoriali nei domini di Dedekind generalizzati

In questa sezione, dopo aver definito il concetto di 'ideale stabile' e averne visto le principali proprietà, caratterizziamo i domini di Dedekind generalizzati per mezzo degli ideali divisoriali.

Definizione 40 *Un ideale I di un anello commutativo unitario R si dice **stabile** se è invertibile in $(I : I)$. Inoltre se ciascun ideale non nullo di R è stabile, allora R è detto **stabile**.*

Teorema 23 *Per un dominio di Prüfer R le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *Ogni ideale primo non nullo di R è stabile;*

(iii) *Ogni ideale primo non nullo di R è divisoriale e ogni ideale divisoriale di R è stabile.*

DIMOSTRAZIONE. **(i)⇒(iii)** Poiché R è un dominio di Dedekind generalizzato, ogni ideale primo non nullo è divisoriale, quindi per concludere basta verificare che R sia stabile.
Sia I un ideale divisoriale, allora se I è invertibile, $(I : I) = I\,(R : I) = R$ da cui la tesi. Perciò possiamo assumere I non invertibile.
Poiché $H := I\,(R : I)$ è un ideale traccia, per la Proposizione 52 pag. 70, $H = P_1 \dots P_n$ con P_i primi non nulli e non massimali, inoltre essendo I è divisoriale, $(H : H) = (I : I) = \bigcap_{i=1}^{n} R_{P_i} \cap R_{\mathcal{F}(\Lambda)}$ con Λ che denota l'insieme degli ideali massimali che non contengono H.
Posto $T := (H : H)$, T è un sopranello di R quindi è un dominio di Dedekind generalizzato, perciò per il Teorema 22 pag. 78, P_iT è un ideale massimale di T, quindi è invertibile in T per ogni $i = 1, \dots, n$. Dunque $H := I\,(R : I) = P_1 \dots P_n$ è invertibile in T cioè I è invertibile in T quindi è stabile.

(iii)⇒(ii) Ovvio.

(ii)⇒(i) Sia N un ideale massimale di un sopranello T di R e sia $P := N \cap R$, allora poiché P è un ideale primo di R, P è stabile e quindi invertibile in $(P : P)$. Inoltre $(P : P) \subseteq (PT : PT) = (N : N)$ quindi $N = PT$ è invertibile in $(N : N)$. Perciò N è invertibile in T perché se non fosse così, si avrebbe

$(N : N) = (T : N) = T$ che è assurdo.
Dunque ciascun ideale massimale di T è invertibile e perciò, per la Proposizione 20 pag. 73, R è un dominio di Dedekind generalizzato.

Quindi ogni dominio di Prüfer stabile è un dominio di Dedekind generalizzato. Inoltre poiché in un dominio di Dedekind generalizzato ogni ideale divisoriale è stabile, si ha il seguente teorema:

Teorema 24 *Sia R un dominio di Prüfer in cui ogni ideale non nullo è divisoriale, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *R è stabile;*

(ii) *R è un dominio di Dedekind generalizzato.*

Esempio 2 Esistono domini di Dedekind generalizzati che non sono stabili. Sia $R := \mathbb{Z}+X\mathbb{Q}[[X]]$ e poniamo $P := X\mathbb{Q}[[X]]$, allora essendo R della forma $D + XF[X]$ con F un campo, X un'indeterminata su F e D un dominio di Dedekind generalizzato, R è un dominio di Dedekind generalizzato (cfr. [9] Corollario 5 pag.8).
Ogni ideale di R è comparabile con P e gli ideali massimali di R sono tutti del tipo pR con p intero primo. Consideriamo l'ideale I di R generato dall'insieme

$$\left\{ \left(\frac{1}{p} \right) X \text{ con } p \text{ intero primo} \right\}$$

poiché I non è invertibile, I non è principale e $(I : I) = R$, dunque I non è stabile.
Verifichimo che I non è principale. Supponiamo per assurdo che lo sia, allora questo è generato da un elemento $f \in I$, quindi

$$f = \left(\frac{z}{p_1 \dots p_n} \right) X + gX^2$$

con $z \in \mathbb{Z}$, $g \in \mathbb{Q}[[X]]$ e $p_1, \dots, p_n$ primi distinti. Dunque per ogni intero p si ha $1/pX = h_p f$ per un opportuno $h_p \in R$.
Se $h_p = z_p + g_p X$ con $z_p \in \mathbb{Z}$ e $g_p \in \mathbb{Q}[[X]]$, allora

$$\frac{1}{p} = \frac{z_p z}{p_1 \dots p_n}$$

ma questo significa che p divide $p_1 \dots p_n$ che è assurdo perché $p \neq p_1 \dots p_n$.
Quindi I non è principale.
Ci rimane da verificare che $(I : I) = R$. Per ogni intero primo p, abbiamo

$IR_{pR} = (1/p)\, XR_{pR}$. Ora se q è un intero primo diverso da p, allora $1/q$ è invertibile in R_{pR} e così $(1/q)\, XR_{pR} = XR_{pR} \subset (1/p)\, XR_{pR}$. Quindi I è localmente principale, perciò

$$(I : I) = \bigcap \{(IR_{pR} : IR_{pR}) \mid p \text{ intero primo}\} = \bigcap \{R_{pR} \mid p \text{ intero primo}\} = R.$$

Notiamo che l'ideale I non è divisoriale, quindi $I \subset P$ infatti ad esempio, $(1/p^2)\, X \in P - I$, ed inoltre $I_v = P$. Infatti, poiché I non è invertibile, si dimostra che $I\,(R : I) = P$ e $(I_v : I_v) = (P : P) = \mathbb{Q}\,[[X]]$.
Essendo P divisoriale, $I \subseteq I_v \subseteq P$, quindi

$$I\mathbb{Q}[[X]] = P = I_v\mathbb{Q}[[X]] = I_v\,(I_v : I_v) = I_v.$$

Con tutti gli strumenti fino ad ora raccolti, possiamo finalmente caratterizzare i domini di Dedekind generalizzati tramite gli ideali divisoriali.

Teorema 25 *Per un dominio R le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *R è un dominio di Dedekind generalizzato;*

(ii) *R è un dominio di Prüfer fortemente discreto e ogni prodotto finito di ideali primi non nulli è divisoriale;*

(iii) *R è un dominio di Prüfer e un ideale I di R è divisoriale se e solo se $I = JQ_1 \dots Q_n$ con J ideale frazionario invertibile e $\{Q_i\}_{i=1}^n$ collezione non banale di ideali primi a due a due comassimali se $n > 1$.*

Dimostrazione. **(i)⇒(iii)** Poiché R è un dominio di Dedekind generalizzato, R è un dominio di Prüfer.
Se $I = JQ_1 \dots Q_n$ con J ideale frazionario invertibile e $\{Q_i\}_{i=1}^n$ collezione non banale di ideali primi a due a due comassimali se $n > 1$, allora I è un ideale divisoriale.
Supponiamo I un ideale divisoriale di R. Se I è invertibile, consideriamo un ideale massimale M di R che, essendo R un dominio di Dedekind generalizzato, è invertibile. In questo modo, $I = JM$ con $J = I\,(R : M)$ da cui la tesi.
Possiamo quindi assumere I non invertibile e consideriamo l'ideale traccia $H := I\,(R : I)$. Notiamo che essendi I divisoriale, $(I : I) = (H : H)$. Poniamo $T := (I : I) = (H : H)$.
Per l'Osservazione 9 pag. 71, H è divisoriale e dunque per il Teorema 23 pag. 79, H è stabile e quindi è invertibile in T. Ma anche I è divisoriale, dunque invertibile in T. Perciò esistono J_1, J_2 ideali frazionari invertibili in

R tali che $H = J_1T$ e $I = J_2T$ e quindi si ha la tesi ponendo $I = JH$ con $J = (R : J_1)\, J_2$.

(iii)⇒(ii) Chiaramente ogni prodotto finito di ideali primi non nulli è divisoriale, quindi rimane da verificare che R sia un dominio di Prüfer fortemente discreto.
Sia P un ideale primo di R, allora P è divisoriale. Notiamo che se P è un ideale massimale di R allora P è invertibile e quindi non idempotente, da cui la tesi.
Possiamo dunque assumere P un ideale primo non massimale di R, allora per il Corollario 9 pag. 43, $(R : P) = (P : P)$.
Sia $p \in P - \{0\}$ e sia $I := p\,(R : P) = p\,(P : P)$. Poiché I è divisoriale, $I = JQ_1 \dots Q_n$, con J invertibile e Q_i ideali primi comassimali se $n > 1$, inoltre essendo I non invertibile, possiamo assumere Q_i non massimali per ogni i. Posto $H := Q_1 \dots Q_n$, allora $(R : P) = (P : P) = (I : I) = (H : H) = (R : H)$ e quindi $P = H = Q_1 \dots Q_n = IJ^{-1} = p\,(P : P)\,(R : J)$ è stabile dunque $P \neq P^2$.

(ii)⇒(i) Per ogni ideale P primo non nullo di R, P^n è divisoriale con $n > 0$. Inoltre poiché R è un dominio di Prüfer fortemente discreto, $P \neq P^2$ quindi per il Teorema 15 pag. 56, $(R : P) \subset T\,(P)$. Perciò per il Teorema 11 pag. 46, P è stabile e dunque R è un dominio di Dedekind generalizzato.

Bibliografia

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonalds *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont.,1969.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris, 1961-1965.

[3] M. Fontana, J. A. Huckaba and I. J. Papick, *Divisorial prime ideals in Prüfer domains*, Canad. Math. Bull. **27** (1984), 324-328.

[4] M. Fontana, J. A. Huckaba and I. J. Papick, *Some properties of divisorial prime ideals in Prüfer domains*, J. Pure and Appl. Algebra **39** (1986) 95-103 North-Holland.

[5] M. Fontana, J. A. Huckaba and I. J. Papick, *Prüfer domains*, Monographs and Taxtbooks in Pure and Applied Mathematics **203**, M. Dekker, New York, 1997.

[6] M. Fontana and N. Popescu, *Sur une classe d'anneaux qui généralisent les anneaux de Dedekind*, J. Algebra **173** (1995), 44-66.

[7] S. Gabelli, *A class of Prüfer domains with nice divisorial ideals*, Commutative Ring Theory (Fés, 1995), 313-318, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **185**, M.Dekker, New York, 1997.

[8] S. Gabelli, *Prüfer ($\sharp\sharp$)-domains and localizing systems of ideals*, Advances in Commutative Ring Theory (Fés, 1995), 391-409, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **205**, M.Dekker, New York, 1999.

[9] S. Gabelli, *Generalized Dedekind Domains.* Multiplicative ideal theory in commutative algebra, 189-206, Springer, New York, 2006.

[10] S. Gabelli and N. Popescu, *Invertible and divisorial ideals of generalized Dedekind domains*, J. Pure Appl. Algebra **135** (1999),237-251.

[11] R. Gilmer, *Overrings of Prüfer domains*, J. Algebra **4** (1966), 331-340.

[12] R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory*, M. Dekker, New York, 1972.

[13] R. Gilmer and W. J. Heinzer, *Overrings of Prüfer domains. II*, J. Algebra **7**, (1967).

[14] W. Heinzer *Integral domains in which each non-zero ideal is divisorial*, Mathematica **15** (1968), 164-170.

[15] W. Heinzer and I. Papick, *The radical trace property*, J. Algebra **112** (1988), 110-121.

[16] J. A. Huckaba I. Papick *When the dual of an ideals is a ring*, Manuscripta Math. **37** (1982), 67-85.

[17] B. Olberding *Factorization into prime and invertible ideals II*, preprint.

[18] N. Popescu, *On a class of Prüfer domains*, Rev. Roumanie Math. Pures Appl. **29** (1984), 777-786.

[19] E. Popescu and N. Poupescu, *A characterization of generalized Dedekind domains*, Bull. Math. Roumanie **35** (1991), 139-141.

[20] E. Tocci *Il gruppo delle classi dei divisori di un dominio di Krull*, Tesi di laurea in Matematica, Facoltà di Scienze M. F. N.

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto la mia relatrice, la professoressa Stefania Gabelli, che è stata estremamente disponibile nell' aiutarmi durante tutto il lavoro svolto per questa tesi di laurea.
Un ringraziamento particolare va ai miei genitori che mi hanno dimostrato in questi anni e soprattutto in questi ultimi giorni, una profonda comprensione.
Un affettuoso grazie va a mio fratello che senza accorgersene, mi ha sempre incoraggiata mostrandomi grandissima stima.
Ringrazio infine tutte le persone che mi sono state vicine durante questi anni universitari e in particolar modo quegli amici che, in questo ultimo difficile periodo mi sono stati accanto, dimostrandosi delle persone su cui ho potuto, posso e potrò sempre contare.