Consideriamo un random-walk sul reticolo $\mathbb{Z}^{\nu}$, $\nu \geq 2$, su cui si muove una particella la cui posizione al tempo T è individuata dalla variabile casuale X_T. Nel suo moto la particella interagisce con il mezzo aleatorio in evoluzione che rappresentiamo mediante variabili casuali $\xi_t(x)$ indipendenti e identicamente distribuite, sia nello spazio che nel tempo, a valori in uno spazio degli stati di cardinalità finita $\mathbb{S}$ su cui è definita una misura di probabilità π_0.
L'evoluzione spazio-temporale del mezzo sarà rappresentata dall' insieme delle configurazioni:

$$\xi := \{\xi_t(x) : (t,x) \quad x \in \mathbb{Z}^{\nu},\ t \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}$$

queste configurazioni definiscono l'insieme:

$$\widehat{\Omega} := \{\xi \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}^{\nu+1}}\}$$

sul quale fissiamo la misura di probabilità Π_0 definita come misura prodotto a partire da π_0.

L'interazione tra particella e mezzo è espressa dalla relazione :

$$P(X_{t+1} = y \mid X_t = x, \xi_t = \eta) = P_0(y-x) + \varepsilon\, c(y-x, \eta(x))$$

dove P_0 è la probabilità di transire di un random walk libero, ε è un parametro che quantifica l'interazione tra particella e mezzo, $c(x,s)$ è una funzione di due variabili che esprime l'influenza del mezzo sul moto della particella.

Affinché questa probabilità sia ben definita poniamo :

$$\begin{aligned} &0 \leq P_0(u) + \varepsilon c(u,s) \leq 1 && \forall\, s \in \mathbb{S} \qquad \forall\, u \in \mathbb{Z}^{\nu} \\ &\sum_{u \in \mathbb{Z}^{\nu}} c(u,s) = 0 && \forall\, s \in \mathbb{S} \end{aligned} \tag{1}$$

Supponiamo che $P_0(u)$ e $c(u,s)$ abbiano un range limitato e $c(u,s)$ abbia media nulla rispetto a π_0 :

$$
\begin{aligned}
& P_0(u) = c(u,s) = 0 && \forall\, s \in \mathbb{S} \quad \text{se} \quad |u| > D \\
& \sum_{s \in \mathbb{S}} c(u,s)\pi_0(s) = 0 && \forall\, u \in \mathbb{Z}^\nu
\end{aligned} \tag{2}
$$

dove $D \geq 1$ è una costante e $|u| := \sum_{i=1}^{\nu} |u_i|$

Consideriamo la trasformata di Fourier di P_0:

$$
\tilde{P}_0(\lambda) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} P_0(u) e^{i(\lambda,u)} \qquad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu) \in \mathbb{T}^\nu
$$

dove $\mathbb{T}^\nu$ è il toro $\nu-$ dimensionale.
Supponiamo che abbia le seguenti proprietà :

$$
|\tilde{P}_0(\lambda)| < 1 \qquad \forall \lambda \neq 0 \tag{3}
$$

$$
\log \tilde{P}_0(\lambda) = i \sum_{k=1}^{\nu} b_k \lambda_k - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\nu} c_{ij} \lambda_i \lambda_j + \cdots \qquad \text{con } c_{ij} > 0 \text{ se } \lambda \neq 0 \tag{4}
$$

Sotto queste condizioni vale il Teorema del Limite Centrale (T.L.C.) per il random walk libero P_0 che formuliamo nel modo seguente (vedi ref. bibl. [4]):
consideriamo lo spazio $\mathcal{C}^k_{lim}$, $k = 1, 2, \dots$, delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ su $\mathbb{R}^\nu$ limitate assieme alle loro derivate; su questo spazio fissiamo la norma:

$$
\|f\|_k := \max_{\substack{x \,\in\, \mathbb{R}^\nu \\ |\alpha| \,\leq\, k}} |\mathcal{D}_\alpha f(x)|
$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ è un multiindice a valori interi , $\mathcal{D}_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots x_\nu^{\alpha_\nu}}$
$\alpha_i \geq 0, |\alpha| := \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$.

Consideriamo la misura $\mu_T^{(0)}$ su $\mathbb{R}^\nu$ definita dal funzionale lineare sullo spazio delle funzioni continue e limitate $\mathcal{C}^0_{lim}(\mathbb{R}^\nu)$:

$$\mu_T^{(0)}(f) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^T(z) f(\frac{z-bT}{\sqrt{T}})$$

dove $b = \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} uP_0(u) = (b_1, \dots, b_\nu)$ e $P_0^t = \underbrace{P_0 * \dots * P_0}_{\text{t}-\text{volte}}$.

Per $T \to \infty$ la misura $\mu_T^{(0)}$ converge debolmente alla misura gaussiana μ con densità :

$$g(u) = \sqrt{\frac{C}{(2\pi)^\nu}} e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}(u)}$$

dove $\mathcal{A}(u) = \sum_{i,j=1}^\nu a_{i,j}u_iu_j$, $u \in \mathbb{R}^\nu$, $C = det\{a\}$ con $a = \{a_{i,j}\}$ inversa della matrice di covarianza $\{c_{i,j}\}$.

Assumendo, senza perdita di generalità, che il random walk parta dall' origine dimostreremo un Teorema del Limite Centrale in dimensione $\nu \geq 2$ valido nell' ipotesi che il termine stocastico, legato alla aleatorietà del mezzo, sia sufficientemente piccolo :

Teorema. *Per ogni $\nu \geq 2$, se ϵ è sufficientemente piccolo, esiste un insieme $\widehat{\Omega}' \subseteq \widehat{\Omega}$ tale che $\Pi_0(\widehat{\Omega}') = 1$ e per ogni $\xi \in \widehat{\Omega}'$ la misura μ_T^ξ converge debolmente per $T \to \infty$ alla misura gaussiana μ.*

Per dimostrare questo risultato proveremo la convergenza Π_0-q.o., per ogni $f \in \mathcal{C}^0_{lim}$, della misura condizionata al mezzo $\mu_T^{(\xi)}$ alla misura discreta relativa al random walk libero $\mu_T^{(0)}$, la quale per le condizioni [3] e [4] converge alla misura gaussiana μ:
utilizzando le disuguaglianze della Appendice A dimostreremo la convergenza di $\mu_T^{(\xi)}$ a $\mu_T^{(0)}$ in $L^{2n}(\Pi_0)$ sfruttando i seguenti risultati:

$$(\cdot) \qquad \langle\, P(X_T = x \mid X_0 = 0\,, \cdot\,)\,\rangle_{\Pi_0} = P_0^T(x)$$

$$(\cdot) \qquad P(X_T = x \mid X_0 = 0\,, \xi) = P_0^T(x) + \\ + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y \mid \xi) \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u, \xi_t(y)) P_0^{T-t-1}(x - y - u) \qquad (5)$$

dove

$$M(t, y \mid \xi) := \sum_{\substack{B: \quad t_f = t \\ x_f = y}} \bar{M_B}(\xi)$$

$$\bar{M_B}(\xi) := \varepsilon^{|B|} P_0^{|l_0|}(x_1) \prod_{i=1}^{n-1} h^{|l_i|}(x_{i+1} - x_i, \xi_{t_i}(x_i))$$

$$h^k(u, s) := (c(\cdot, s) * P_0^k)(u) \qquad \text{con } h^0(u, s) := c(u, s)$$

con $B := \{(t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)\}$, $n \geq 1$, sottotraiettoria di cardinalità n, tempo finale $t_f = t_n$, posizione finale $x_f = x_n$ e "serie libere" definite come $l_i := [t_i, t_{i+1} - 1)$.
Applicando infine la disuguaglianza di Chebishev ed il lemma di Borel-Cantelli, passeremo dalla stima in $L^{2n}(\Pi_0)$ alla convergenza Π_0-q.o.

Al crescere della dimensione ν del reticolo su cui si muove la particella, studieremo poi il contributo dei resti di ordine $\mathrm{O}(\frac{1}{\sqrt{T}})$ e $\mathrm{O}(\frac{1}{T})$ che compaiono nel Teorema del Limite Centrale, ottenendo delle correzioni aleatorie finite, dipendenti dal mezzo ξ, valide per funzioni f sufficientemente regolari:

Teorema. *Per ogni $\nu \geq 3$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, allora il funzionale:*

$$\Phi_T(f \mid \xi) = \sqrt{T}[\mu_T^\xi(f) - \mu(f)]$$

converge in $L^{2n}(\Pi_0)$, per ogni $f \in C^2_{lim}$, a un funzionale limite $\Phi(f \mid \xi)$.
Se $n(\frac{\nu}{2} - 1) > 1$ la convergenza diventa $\Pi_0 - q.o.$

Teorema. *Per ogni* $\nu \geq 5$ *e ogni fissato* $n \geq 1$, *se* ε *è sufficientemente piccolo, allora il funzionale:*

$$\Psi_T(f \mid \xi) = T[\mu_T^{\xi}(f) - \mu(f) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Phi(f \mid \xi)]$$

converge in $L^{2n}(\Pi_0)$, *per ogni* $f \in C^3_{lim}$, *a un funzionale limite* $\Psi(f \mid \xi)$.
Se $n(\frac{\nu}{2} - 2) > 1$ *la convergenza diventa* $\Pi_0 - q.o.$

Per calcolare il contributo di questi funzionali procediamo riscrivendo $\mu_T^{(\xi)}$ secondo il risultato [5] in modo da eliminare la dipendenza dal random walk libero (il quale converge alla gaussiana μ); successivamente sviluppiamo f nella variabile $\frac{u-b}{\sqrt{T}}$ in modo che i denominatori dei vari ordini dello sviluppo compensino le potenze di T che compaiono nel funzionale.
Il passo successivo è studiare il contributo dato dai vari ordini dello sviluppo: operando opportunamente ci riconduciamo a funzionali dipendenti dalla misura discreta $\mu_T^{(0)}$ che sostituiamo poi con la misura continua μ applicando la proposizione:

Proposizione. *Sia* $f \in \mathcal{C}^k_{lim}$ *allora:*

$$\mu_T^{(0)}(f) = \frac{\sqrt{C}}{(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}} \int_{\mathbb{R}^\nu} f(u)\, e^{-\frac{1}{2}\mathcal{A}(\sqcap)} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{T^{\frac{j}{2}}} Q_j(u)\right] dx \; + \frac{\rho_T^{(k)}(f)}{T^{\frac{k}{2}} + 1}$$

dove $|\rho_T^{(k)}(f)| \leq c(k)\, \|f\|_k$ *con* $c(k)$ *costante che dipende da* k, *e* Q_j *sono polinomi (di Hermite) di grado* $3j$.

Applicando infine le disuguaglianze dell' Appendice A dimostreremo il contributo finito di questi funzionali in $L^{2n}(\Pi_0)$ e successivamente, come nel Teorema del Limite Centrale, applicando la disuguaglianza di Chebishev ed il lemma di Borel-Cantelli, passiamo dalla stima in $L^{2n}(\Pi_0)$ alla convergenza Π_0-q.o.

Per $\nu \geq 3$ proveremo anche che la differenza tra la media condizionata di X_T, per una fissata configurazione ξ del mezzo, e la media bT del random walk libero dopo un tempo T, converge Π_0-q.o., per $T \rightarrow \infty$, ad un funzionale vettore $\mathcal{E}(\xi)$:

Teorema. *Per ogni $\nu \geq 3$ e ogni fissato $n \geq 1$, esiste un numero positivo $\varepsilon_{n,\nu}$ tale che per $\varepsilon < \varepsilon_{n,\nu}$ il funzionale:*

$$\mathcal{E}^T(\xi) = \mathbb{E}(X_T | X_0 = 0, \xi) - bT$$

converge in $L^{2n}(\Pi_0)$ a un funzionale vettore $\mathcal{E}(\xi) = \{\mathcal{E}_i : i = 1, \ldots, \nu)$.
Se $n(\frac{\nu}{2} - 1) > 1$ allora, per $\varepsilon < \varepsilon_{n,\nu}$, la convergenza diventa $\Pi_0 - q.o.$

Per $\nu \geq 5$ proveremo invece che la differenza tra la covarianza condizionata al mezzo, per una fissata configurazione ξ, e la covarianza del random walk libero al tempo T, converge Π_0-q.o., per $T \rightarrow \infty$, ad un funzionale matrice $\mathcal{C}(\xi)$:

Teorema. *Per ogni $\nu \geq 5$ e ogni fissato $n \geq 1$, esiste un numero positivo $\varepsilon'_{n,\nu}$ tale che per $\varepsilon < \varepsilon'_{n,\nu}$ i funzionali:*

$$\mathcal{C}^T_{ij}(\xi) = \mathbb{E}((X_T - \mathbb{E}(X_T|\xi)_i (X_T - \mathbb{E}(X_T|\xi)_j | X_0 = 0, \xi) - c_{ij}T$$
$$\text{con } i, j = 1, \ldots, \nu$$

convergono in $L^{2n}(\Pi_0)$ a dei funzionali limite $\{\mathcal{C}_{ij}(\xi)\}$.
Se $n(\frac{\nu}{2} - 2) > 1$ allora, per $\varepsilon < \varepsilon'_{n,\nu}$, la convergenza diventa $\Pi_0 - q.o.$

Per dimostrare entrambi questi risultati si procede applicando la formula [5] riscrivendo i funzionali in modo da poter applicare i risultati della Appendice A; mediante quest' ultimi mostreremo la convergenza del funzionale al tempo T al funzionale limite in $L^{2n}(\Pi_0)$ e successivamente, applicando la disuguaglianza di Chebishev e il lemma di Borel-Cantelli, passeremo da questo alla convergenza Π_0-q.o.

I risultati fin qui presentati sono tratti principalmente dall' articolo [1] della nostra bibliografia; nella parte centrale di questa tesi approfondiremo tali risultati completando lo studio delle correzioni al Teorema del Limite Centrale determinando una originale formula ricorsiva che esprime le correzioni in dimensione arbitraria. Il risultato principale che dimostreremo può essere enunciato nel modo seguente:

per ogni $m \in \mathbb{N}^+$, definiamo:

$$\begin{aligned} \Phi_T^{(1)}(f \mid \xi) &= \sqrt{T}[\mu_T^{(\xi)}(f) - \mu(f)] \\ \Phi_T^{(2)}(f \mid \xi) &= T[\mu_T^{(\xi)}(f) - \mu(f) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Phi^{(1)}(f \mid \xi)] \\ &\dots \\ \Phi_T^{(m)}(f \mid \xi) &= T^{\frac{m}{2}}[\mu_T^{(\xi)}(f) - \mu(f) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Phi^{(1)}(f \mid \xi) - \dots - \frac{1}{T^{\frac{m-1}{2}}}\Phi^{(m-1)}(f \mid \xi)] \end{aligned}$$

dove

$$\Phi^{(k)}(f \mid \xi) := \lim_{T\to\infty} \Phi_T^{(k)}(f \mid \xi) \qquad 1 \le k \le m.$$

allora:

Teorema. *Per ogni* $\nu \ge 2m+1$ *e ogni fissato* $n \ge 1$, *se* ε è *sufficientemente piccolo, il funzionale :*

$$\Phi_T^{(m)}(f \mid \xi) = T^{\frac{m}{2}}[\mu_T^{(\xi)}(f) - \mu(f) - \frac{1}{\sqrt{T}}\Phi^{(1)}(f \mid \xi) - \dots - \frac{1}{T^{\frac{m-1}{2}}}\Phi^{(m-1)}(f \mid \xi)]$$

converge in $L^{2n}(\Pi_0)$, *per ogni* $f \in \mathcal{C}^{m+1}_{lim}$, *a un funzionale limite* $\Phi^{(m)}(f \mid \xi)$. *Se* $n(\frac{\nu}{2} - m) > 1$ *la convergenza diventa* Π_0*-q.o.*

Per dimostrare questo risultato procediamo induttivamente su m seguendo la stessa linea delle correzioni precedenti; nel provare la convergenza daremo anche una espressione esplicita, in funzione di m, della correzione aleatoria $\Phi^{(m)}(f \mid \xi)$. Per la genericità della $(2m+1)$-esima dimensione divideremo la dimostrazione in passi più semplici facendo uso dei seguenti risultati che studiano i vari tipi di funzionali che compaiono nel calcolo della correzione: posto

$$a_\gamma^{(j)} = \begin{cases} (y-bt)_j & \text{se } \gamma = \frac{1}{2} \\ c_\gamma (t+1)^\gamma (\frac{z-b(T-t-1)}{\sqrt{T}})_j & \text{se } \gamma \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

$$\bar{\mathcal{E}}^{(0)t}_{i_1,\dots,i_k}(\xi) := \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,y \mid \xi) \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} c(u,\xi_t(y))(u-b)_{i_1}\dots(u-b)_{i_k}$$

$$\mathcal{E}^{(0)T}_{i_1,\dots,i_k}(\xi) := \sum_{t=0}^{T_0-1} \bar{\mathcal{E}}^{(0)t}_{i_1,\dots,i_k}(\xi)$$

$$\mathcal{E}^{(0)}_{i_1,\dots,i_k}(\xi) := \sum_{t=0}^{\infty} \bar{\mathcal{E}}^{(0)t}_{i_1,\dots,i_k}(\xi)$$

$$\bar{\Delta}^{(l,k,\gamma,t)}_{i_1\dots i_{l+k}}(\xi) := \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,y \mid \xi) \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} c(u,\xi_t(y))(u-b)_{i_1}\dots(u-b)_{i_l} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{a_{\gamma_1}^{(i_{l+1})}\dots a_{\gamma_k}^{(i_{l+k})}: \\ 2(\gamma_1+\dots+\gamma_k)=\gamma}} \prod_{j=1}^{k} a_{\gamma_j}^{(i_{l+j})}$$

$$\Delta^{(l,k,\gamma)T}_{i_1\dots i_{l+k}}(\xi) := \sum_{t=0}^{T_0-1} \bar{\Delta}^{(l,k,\gamma,t)}_{i_1\dots i_{l+k}}(\xi)$$

$$\Delta^{(l,k,\gamma)}_{i_1\dots i_{l+k}}(\xi) := \sum_{t=0}^{\infty} \bar{\Delta}^{(l,k,\gamma,t)}_{i_1\dots i_{l+k}}(\xi)$$

$$\omega^{(\sigma)}_{i_1\dots i_l}(\xi) := \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,y \mid \xi) \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} c(u,\xi_t(y))(t+1)^\sigma (u-b)_{i_1}\dots(u-b)_{i_l}$$

Lemma 1. *Per ogni $\nu \geq 3$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, il funzionale :*

$$F_T^{(k.1)}(f \mid \xi) := \frac{1}{k!} \sum_{t=0}^{T_0-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y \mid \xi) \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\nu} \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u, \xi_t(y))(u-b)_{i_1} \dots$$
$$\dots (u-b)_{i_k} \sum_{z \in \mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(z) f^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\left(\frac{z - b(T-t-1)}{\sqrt{T-t-1}}\right)$$

con f almeno $\mathcal{C}^k_{lim}(\mathbb{R}^\nu)$, $k \geq 1$, converge in $L^{2n}(\Pi_0)$ al funzionale limite:

$$F^{(k.1)}(f \mid \xi) := \frac{1}{k!} \mu\Big(\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{\nu} \mathcal{E}^{(0)}_{i_1,\dots,i_k} f^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} \Big)$$

Se $n(\frac{\nu}{2} - 1) > 1$ la convergenza diventa Π_0-q.o.

Lemma 2. *Per ogni $\nu \geq 2m+1$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, il funzionale :*

$$H^T_{i_1 \dots i_{l+k}}(f \mid \xi) := \mu\Big(\sum_{i_1 \dots i_{l+k}=1}^{\nu} f^{(l+k)}_{i_1 \dots i_{l+k}} \Delta^{(l,k,\gamma)T}_{i_1 \dots i_{l+k}} \Big)$$

con $1 \leq l \leq m-1$, $1 \leq k \leq m-l$, $k \leq \gamma \leq m-l$, $f \in \mathcal{C}^{m+1}_{lim}$ converge in $L^{2n}(\Pi_0)$ al funzionale limite:

$$H_{i_1 \dots i_{l+k}}(f \mid \xi) := \mu\Big(\sum_{i_1,\dots,i_{l+k}=1}^{\nu} f^{(l+k)}_{i_1,\dots,i_{l+k}} \Delta^{(l,k,\gamma)}_{i_1 \dots i_{l+k}} \Big)$$

Se $n(\frac{\nu}{2} - \gamma - 1) > 1$ la convergenza diventa Π_0-q.o.

Lemma 3. *Per ogni $\nu \geq 2m+1$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, il funzionale :*

$$M_{0,T}(f \mid \xi) := T^{\frac{m-l-\gamma}{2}} \sum_{t=0}^{T_0-1} \sum_{y\in\mathbb{Z}^\nu} M(t,y \mid \xi) \sum_{i_1\dots i_{l+k}} \sum_{u\in\mathbb{Z}^\nu} c(u,\xi_t(y))(u-b)_{i_1}\dots$$

$$\dots(u-b)_{i_l} \sum_{z\in\mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(z) f^{(l+k)}_{i_1\dots i_{l+k}}\Big(\frac{z-b(T-t-1)}{\sqrt{T-t-1}}\Big) \sum_{\substack{a^{(i_{l+1})}_{\gamma_1}\dots a^{(i_{l+k})}_{\gamma_k}:\\ 2(\gamma_1+\dots+\gamma_k)=\gamma}} \prod_{j=1}^{k} a^{(i_{l+j})}_{\gamma_j}$$

con $1 \leq l \leq m-1, \qquad 1 \leq k \leq m+1-l, \qquad \gamma \geq m-l+1, \qquad f \in \mathcal{C}^{m+1}_{lim}$
converge a zero in $L^{2n}(\Pi_0)$.
Se $n(\frac{\nu}{2}-m+l-1) > 1$ *la convergenza diventa* $\Pi_0 - q.o.$

Lemma 4. *Per ogni $\nu \geq 2m+1$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, i funzionali :*

$$M^{(1)}_{0,T}(f \mid \xi) := \sum_{t=0}^{T_0-1} \frac{T^{\frac{m-l-r}{2}}}{T^\sigma}(t+1)^\sigma \mu(d^{(r)}_\sigma Q_r \sum_{i_1\dots i_l=1}^{\nu} \bar{\mathcal{E}}^{(0)t}_{i_1\dots i_l} f^{(l)}_{i_1\dots i_l})$$

con $1 \leq l \leq m-1, \qquad 0 \leq r \leq m-1, \qquad \sigma > [\frac{m-l-r}{2}], \qquad f \in \mathcal{C}^{m+1}_{lim}$

$$M^{(2)}_{0,T}(f \mid \xi) := \sum_{t=0}^{T_0-1} \frac{T^{\frac{m-l-\gamma-r}{2}}}{T^\sigma}(t+1)^\sigma \mu(d^{(r)}_\sigma Q_r \sum_{i_1\dots i_{l+k}=1}^{\nu} f^{(l+k)}_{i_1\dots i_{l+k}} \bar{\Delta}^{(l,k,\gamma)t}_{i_1\dots i_{l+k}})$$

con $1 \leq l \leq m-1, \qquad 0 \leq r \leq m-1, \qquad 1 \leq k \leq m-l,$

$k \leq \gamma \leq m-l, \qquad \sigma > [\dfrac{m-l-\gamma-r}{2}], \qquad f \in \mathcal{C}^{m+1}_{lim}$

convergono a zero in $L^{2n}(\Pi_0)$.
Se $n(\frac{\nu}{2}-m+l+r-1) > 1$ *la convergenza diventa* $\Pi_0 - q.o.$

Lemma 5. *Per ogni $\nu \geq 2m+1$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, il funzionale :*

$$F_T^{(l.2)}(f \mid \xi) := T^{\frac{m-l}{2}} \sum_{t=0}^{T_0-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y \mid \xi) \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{\nu} \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u, \xi_t(y))(u-b)_{i_1} \dots$$

$$\cdot (u-b)_{i_l} \sum_{z \in \mathbb{Z}^\nu} P_0^{T-t-1}(z) \left[f^{(l)}_{i_1 \dots i_l}\Big(\frac{y+z-b(T-1)}{\sqrt{T}}\Big) - f^{(l)}_{i_1 \dots i_l}\Big(\frac{z-b(T-t-1)}{\sqrt{T-t-1}}\Big) \right]$$

$f \in \mathcal{C}^{m+1}_{lim}$, $1 \leq l \leq m-1$

può essere riscritto come

$$R_T^{(l.2)}(f \mid \xi) + \sum_{k=1}^{m-l} \sum_{\gamma=k}^{m-l} \sum_{r=0}^{m-l-k} \sum_{t=0}^{T_0-1} \frac{1}{k!} \frac{T^{\frac{m-l-\gamma}{2}}}{(T-t-1)^{\frac{r}{2}}} \mu(Q_r \sum_{i_1 \dots i_{l+k}=1}^{\nu} f^{(l+k)}_{i_1 \dots i_{l+k}} \bar{\Delta}^{(l,k,\gamma,t)}_{i_1 \dots i_{l+k}})$$

dove $Q_0 = 1$ e $R_T^{(l.2)}(f \mid \xi)$ converge a zero in $L^{2n}(\Pi_0)$.
Se $n(\frac{\nu}{2} - m + l - 1) > 1$ la convergenza diventa $\Pi_0 - q.o.$

Lemma 6. *Per ogni $\nu \geq 2m+1$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, il funzionale :*

$$F_T^{(l.1)}(f \mid \xi) := \frac{T^{\frac{m-l}{2}}}{l!} \sum_{t=0}^{T_0-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y \mid \xi) \sum_{i_1, \dots, i_l=1}^{\nu} \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u, \xi_t(y))(u-b)_{i_1}$$
$$\dots (u-b)_{i_l} \mu^{(0)}_{T-t-1}(f^{(l)}_{i_1 \dots i_l})$$

può essere riscritto come

$$\frac{T^{\frac{m-l}{2}}}{l!} \mu\Big(\sum_{i_1 \dots i_l=1}^{\nu} \mathcal{E}^{(0)T}_{i_1 \dots i_l} f^{(l)}_{i_1 \dots i_l}\Big) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{m-l} \sum_{t=0}^{T_0-1} \frac{1}{l!} \frac{T^{\frac{m-l}{2}}}{(T-t-1)^{\frac{r}{2}}} \mu\Big(Q_r \sum_{i_1 \dots i_l=1}^{\nu} \bar{\mathcal{E}}^{(0)t}_{i_1 \dots i_l} f^{(l)}_{i_1 \dots i_l}\Big) + R_T^{(l.1)}(f \mid \xi)$$

dove

$$Q_0 = 1$$
$$\bar{\mathcal{E}}^{(0)t}_{i_1, \dots i_l}(f \mid \xi) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y \mid \xi) \sum_{u \in \mathbb{Z}^\nu} c(u, \xi_t(y))(u-b)_{i_1} \dots (u-b)_{i_l}$$

$R_T^{(l.1)}(f \mid \xi)$ è un funzionale che converge a zero in $L^{2n}(\Pi_0)$. Se $n > 1$ la convergenza diventa Π_0-q.o.

Proposizione. *Per ogni $\nu \geq 2m+1$ e ogni fissato $n \geq 1$, se ε è sufficientemente piccolo, il funzionale:*

$$\bar{\Phi}_T^{(m)}(f \mid \xi) = T^{\frac{m}{2}}[\mu_T^{(\xi)}(f) - \mu_T^{(0)}(f) - \frac{1}{\sqrt{T}}\bar{\Phi}^{(1)}(f \mid \xi) - \ldots - \frac{1}{T^{\frac{m-1}{2}}}\bar{\Phi}^{(m-1)}(f \mid \xi)]$$

converge in $L^{2n}(\Pi_0)$, per ogni $f \in \mathcal{C}_{lim}^{m+1}$, al funzionale limite

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}^{(m)}(f \mid \xi) := & \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r!}\mu(Q_{m-r} \sum_{i_1 \ldots i_r=1}^{\nu} \mathcal{E}^{(0)}_{i_1 \ldots i_r} f^{(r)}_{i_1 \ldots i_r}) + \\
& \sum_{r=1}^{m-1} \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{m-r} \frac{1}{k!} \sum_{\gamma=k}^{m-r} \mu(Q_{m-r-\gamma} \sum_{i_1 \ldots i_{r+k}=1}^{\nu} f^{(r+k)}_{i_1 \ldots i_{r+k}} \Delta^{(r,k,\gamma)}_{i_1 \ldots i_{r+k}}) + \\
& \sum_{r=1}^{m-3} \frac{1}{r!} \sum_{\rho=1}^{m-r} \chi(\frac{m-r-\rho}{2} \in \mathbb{N}^+) \mu(d^{(\rho)}_{\frac{m-r-\rho}{2}} Q_\rho \sum_{i_1 \ldots i_r=1}^{\nu} \omega^{(\frac{m-r-\rho}{2})}_{i_1 \ldots i_r} f^{(r)}_{i_1 \ldots i_r}) + \\
& \sum_{r=1}^{m-4} \frac{1}{r!} \sum_{k=1}^{m-r-1} \frac{1}{k!} \sum_{\gamma=k}^{m-r-1} \sum_{\rho=1}^{m-r-k-1} \chi(\frac{m-r-\gamma-\rho}{2} \in \mathbb{N}^+) \sum_{t=0}^{\infty} (t+1)^{\frac{m-r-\gamma-\rho}{2}} \cdot \\
& \mu(d^{(\rho)}_{\frac{m-r-\gamma-\rho}{2}} Q_\rho \sum_{i_1 \ldots i_{r+k}=1}^{\nu} f^{(r+k)}_{i_1 \ldots i_{r+k}} \bar{\Delta}^{(r,k,\gamma,t)}_{i_1 \ldots i_{r+k}})
\end{aligned}$$

dove $Q_0 = 1$.
Se $n(\frac{\nu}{2} - m) > 1$ la convergenza diventa Π_0-q.o.

Nella Appendice A (vedi ref. bibl. [1]) studiamo delle stime in $L^p(\Pi_0)$ di funzionali, dipendenti dal mezzo ξ, del tipo:

$$M_{T,T'}(\xi) := \sum_{t=T}^{T'-1} \sum_{y \in \mathbb{Z}^\nu} M(t, y \mid \xi)\, G(t, y \mid \xi_t(y))$$

dove $G(t, y \mid s)$ è tale che: $\quad \langle\, G(t, y \mid \,\cdot)\,\rangle_{\pi_0} = 0$

$$|G(t, y \mid s)| \;\leq\; \mathit{cost}\, g(t)\, |y - bt|^r$$

con $r \in \mathbb{Z}^+$ e $g(t)$ funzione strettamente positiva.

Il risultato principale contenuto in questa sezione è dato dalla proposizione:

Proposizione. *Per ogni $n \geq 1$ e ogni $\nu \geq 2$, se ε è sufficientemente piccolo, vale la seguente stima :*

$$\langle\, M^{2n}_{T,T'}(\cdot)\,\rangle_{\Pi_0} \;\leq\; \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{\substack{n_1 \ldots n_k \,\geq\, 1 \\ \max_j n_j \,>\, 1 \\ \sum_{j=1}^k n_j \,=\, 2n}} c(n_1, \ldots, n_k) \prod_{j=1}^{k} \sum_{t_j=T}^{T'-1} \frac{[g(t_j)\, t_j^{\frac{r}{2}}]^{n_j}}{(t_j^{\frac{\nu}{2}} + 1)^{m_j}}$$

dove $m_j = \max\{1\,,\, n_j - 1\}$.

Studiamo in particolare il caso in cui $g(t) = t^p$ con $p = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\langle\, M^{2n}_{T,T'}\,\rangle \;\leq\; \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{\substack{n_1 \ldots n_k \,\geq\, 1 \\ \max_j n_j \,>\, 1 \\ \sum_{j=1}^k n_j \,=\, 2n}} c(n_1, \ldots, n_k) \prod_{j=1}^{k} \sum_{t_j=T}^{T'-1} \frac{[t_j^p\, t_j^{\frac{r}{2}}]^{n_j}}{(t_j^{\frac{\nu}{2}} + 1)^{m_j}} := \Gamma^{n,\nu}_{p,r}$$

Posto $\chi := p + \frac{r}{2}$ distinguiamo i seguenti casi :

(1) se $\chi = 0$ allora :

$$\Gamma^{n,\nu}_{0,0} \leq c(n)(\log T^{'})^{2n-1} \qquad \text{se } \nu = 2$$
$$\Gamma^{n,\nu}_{0,0} \leq \frac{c(n,\nu)}{(T^{\frac{\nu}{2}-1}+1)^n} \qquad \text{se } \nu \geq 3$$

(2) se $\chi > 0$, $(\chi - \dfrac{\nu}{2}) \geq 0$ e $\nu \geq 3$ allora :

$$\Gamma^{n,\nu}_{p,r} \leq cost(n,\nu,p,r)(T^{'})^{2\chi-\frac{\nu}{2}+1)n}$$

(3) se $\chi > 0$, $(\chi - \dfrac{\nu}{2}) < 0$ e $\nu \geq 3$ allora :

$$\Gamma^{n,\nu}_{p,r} \leq cost(n,\nu,p,r)((T^{'})^{2\chi-\frac{\nu}{2}+1}+1)^n \qquad \text{se } 2\chi - \frac{\nu}{2} > -1$$
$$\Gamma^{n,\nu}_{p,r} \leq cost(n,\nu,p,r)(\log T^{'})^n \qquad \text{se } 2\chi - \frac{\nu}{2} = -1$$
$$\Gamma^{n,\nu}_{p,r} \leq cost(n,\nu,p,r)\frac{1}{(T^{2\chi-\frac{\nu}{2}+1}+1)^n} \qquad \text{se } 2\chi - \frac{\nu}{2} < -1$$

Bibliografia

[1] C.BOLDRIGHINI, R.A.MINLOS, A. PELLEGRINOTTI,
Almost-sure central limit theorem for a Markov model of random walk in dynamical random environment,
Probability Theory and Related Fields 109, 245-273 (1997), Springer-Verlag, 1997

[2] C.BOLDRIGHINI, R.A.MINLOS, A. PELLEGRINOTTI,
Central limit theorem for the random walk of one and two particles in a random environment, with mutual interaction,
Andances in Soviet Mathematics, volume 20, 1994

[3] Y.SINAI, *Probability theory : an introductory course*,
ed. Springer Textbook , 1992

[4] I.I.GIKHMAN, A.V.SKOROHOD, *The theory of stochastic processes*,
ed. Springer-Verlag, 1974-79, vol.I

[5] P.REVESZ, *Random walk in random and non-random enviroments*,
ed. World scientific, 1990

[6] P.BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*,
ed. John Wiley & Sons, 1968