UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

presentata da Moreno Perugini

Domini di Bézout e gruppi di divisibilità

relatore Prof. F. Girolami

Il Candidato   Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 2000-2001
FEBBRAIO 2002

Classificazione AMS: 13A05, 13G05, 06F15
Parole chiave: domini di integrità, gruppi di divisibilità

"*The importance of principal ideal domains both in algebra itself and elsewhere in mathematics is undisputed. By contrast, Bézout domains, although they represent a natural generalization of PIDs, play a much smaller role and are far less well known. It is true that many of the properties of PIDs are shared by Bézout domains, but the practical value of this observation is questioned by many on the grounds that most of the Bézout domains occurring naturally are in fact PIDs*" (1).

Ma la situazione si inverte e i ruoli si capovolgono quando si cambia punto di vista: sappiamo che ad ogni dominio A con campo dei quozienti K possiamo associare il suo gruppo di divisibilità $G = K^*/U(A)$, che è abeliano parzialmente ordinato filtrato. Inoltre sappiamo che le relazioni di ordine su G definiscono proprietà di divisibilità sul dominio A e che a molte proprietà di divisibilità in A corrispondono altrettante proprietà della relazione di ordine sul gruppo G.

Particolarmente importante è il caso in cui un gruppo abeliano parzialmente ordinato filtrato H è isomorfo al gruppo di divisibilità di un dominio: in questa funzione, grazie al teorema di Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm, giocano un ruolo fondamentale i domini bezoutiani.

In questo lavoro ci proponiamo di approfondire lo studio dei domini bezoutiani e di introdurre alcuni risultati notevoli sul gruppo di divisibilità di un dominio.

Nella prima parte richiamiamo rapidamente le nozioni di MCD e di mcm di due elementi, mostriamo che un MCD-dominio è tale se e solo se è un mcm-dominio e introduciamo le definizioni di dominio noetheriano, dominio locale, dominio di valutazione e dominio di Prüfer: mostriamo le relazioni che intercorrono tra questi domini e un dominio di Bézout e forniamo controesempi per sottolineare che alcune implicazioni non possano essere invertite.

Per analizzare il rapporto tra un UFD, un MCD-dominio e un dominio di Bézout introduciamo nel terzo capitolo la nozione di ideale PF-primo:

(1)[5] pag. 251.

"*un ideale primo P di un MCD-dominio A è detto ideale PF-primo se per ogni $a, b \in P$ non nulli si ha che $MCD(a, b) \in P$*". Proponiamo alcuni risultati ottenuti da Sheldon ([29]) e concludiamo questa prima parte mostrando una proprietà di stabilità dei domini bezoutiani.

La seconda parte del nostro lavoro è dedicata alla analisi del gruppo di divisibilità di un dominio e per fare questo abbiamo bisogno di richiamare alcune definizioni:

"*un gruppo $(G, +)$ parzialmente ordinato è detto filtrato se per ogni coppia di elementi $g_1, g_2 \in G$ esiste $h \in G$ t.c. $g_1 \leqslant h$ e $g_2 \leqslant h$*";

"*un gruppo $(G, +)$ abeliano parzialmente ordinato è detto ordinato reticolato se per ogni $a, b \in G$ esiste $sup\{a, b\}$ (o equivalentemente, se per ogni $a, b \in G$ esiste $inf\{a, b\}$)*".

Dal momento che ci siamo proposti di caratterizzare alcuni domini attraverso il loro gruppo di divisibilità è necessario introdurre la nozione di $\star$-operation. Se indichiamo con $\mathcal{F}(A)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di A, allora una applicazione

$$\star : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$$
$$F \longmapsto F^\star$$

è detta una **$\star$-operation** [(2)] su A se sono soddisfatte le condizioni:

1) $\forall d \in K^\star, \forall F \in \mathcal{F}(A) \qquad (d)^\star = dA$ e $(dF)^\star = dF^\star$;

2) $\forall F, Q \in \mathcal{F}(A) \qquad F \subseteq F^\star;\ F \subseteq Q \Rightarrow F^\star \subseteq Q^\star$;

3) $\forall F \in \mathcal{F}(A) \qquad (F^\star)^\star = F^\star$.

In particolare l'applicazione che ad ogni ideale $F \in \mathcal{F}(A)$ associa $F_v = (F^{-1})^{-1}$ (dove poniamo $F^{-1} = \{x \in K \ t.c. \ xF \subseteq A\}$) è una $\star$-operation ed è detta v-operation; se $F \in \mathcal{F}(A)$ è tale che $F = F_v$ allora F è detto v-ideale.

Passiamo quindi a formalizzare la definizione di gruppo di divisibilità di un dominio A: sia K un campo che contiene A come sottoanello, allora

[(2)]cfr. [12] pagg. 392-396 e [16].

$G = K^*/U(A)$ è un gruppo se fornito dell'operazione "+" nel seguente modo:

$$+ : \frac{K^*}{U(A)} \times \frac{K^*}{U(A)} \longrightarrow \frac{K^*}{U(A)}$$
$$(aU(A), bU(A)) \longmapsto abU(A)$$

Inoltre (G,+) è parzialmente ordinato con la relazione

$$xU(A) \leqslant yU(A) \quad \Leftrightarrow \quad yx^{-1} \in A$$

o equivalentemente

$$xU(A) \leqslant yU(A) \quad \Leftrightarrow \quad xA \supseteq yA$$

Dal momento che l'insieme degli ideali frazionari principali non nulli di A è un gruppo se dotato dell'usuale operazione di moltiplicazione tra moduli, allora dalla seconda relazione segue subito che questo è ordinatamente isormofo a $(G, +)$; in particolare quindi possiamo pensare a $G_+ = \{x \in G \ t.c. \ aU(A) \geqslant U(A)\}$ come all'insieme degli ideali interi principali non nulli di A ordinati con la relazione $\supseteq$. Il caso che a noi interessa è quando K è proprio il campo dei quozienti di A, se questo accade G è detto il gruppo di divisibilità di A, inoltre è filtrato e molte proprietà di A si tramutano in proprietà della relazione di ordine su G. Considerando l'applicazione $w : K^\star \longrightarrow G = K^\star/U(A)$, definita come $x \longmapsto xU(A)$, si ha subito che questa gode delle seguenti proprietà:

1) comunque scelti $x, y \in K^*$ allora $w(xy) = w(x) + w(y)$;

2) se $x, y \in K^*$ sono tali che $x + y \neq 0$ allora $w(x + y) \geqslant w(t)$ per ogni $t \in K^*$ t.c. $w(t) \leqslant w(x)$ e $w(t) \leqslant w(y)$;

3) $w(-1) = 0$.

Se inoltre ampliamo G con l'elemento ∞, definito come $\infty + xU(A) = \infty$ comunque scelto $xU(A) \in G$, e poniamo $w(0) = \infty$, allora w è detta una semivalutazione su K. Se G è ordinato reticolato possiamo riscrivere la proprietà 2) come

$2')\quad w(x+y) \geqslant inf\{w(x), w(y)\}$ comunque scelti $x, y \in K$

e in questo caso l'applicazione w è detta demivalutazione su K; se G è totalmente ordinato allora w è detta valutazione su K.

Possiamo ora occuparci nello specifico dei gruppi di divisibilità di alcuni domini. Un primo importante risultato è il seguente:

"*sia A un dominio di integrità, K il suo campo dei quozienti e $G = K^\star/U(A)$ il gruppo di divisibilità di A; allora le seguenti condizioni sono equivalenti* (3)*:*

1) G è un gruppo ordinato reticolato;

2) A è un MCD-dominio;

3) per ogni $a, b \in A$ si ha che $(a) \cap (b)$ è ancora un ideale principale di A;

4) ogni v-ideale di A di tipo finito è principale."

Quindi l'esistenza di un MCD per ogni coppia di elementi nel dominio A equivale al fatto che il suo gruppo di divisibilità sia ordinato reticolato. Un caso importante si verifica quando il gruppo di divisibilità di A è totalmente ordinato, infatti in questo caso A è un dominio di valutazione e viceversa se A è un dominio di valutazione allora il suo gruppo di divisibilità è totalmente ordinato.

Per procedere abbiamo bisogno di introdurre alcune definizioni:

"*un gruppo $(G, +)$ ordinato reticolato soddisfa la condizione della catena se e solo se ogni suo sottoinsieme non vuoto di elementi positivi possiede un elemento minimale;*"(4)

"*un gruppo $(G, +)$ abeliano parzialmente ordinato è detto gruppo archimedeo* (5) *se e solo se $na < b$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ implica $a = 0$;*"

"*un gruppo $(G, +)$ abeliano parzialmente ordinato è detto completamente*

(3) cfr. [12] pagg.174-175 e [17] pagg.266-267.

(4) cfr. [2] pag.320 .

(5) Jaffard definisce tale gruppo para-archimedeo, cfr. [17] pag. 255, la nostra terminologia è quella di Fuchs ([10]).

chiuso se e solo se $a \geqslant 0$ e $a + nt \geqslant 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ implica $t \geqslant 0$";
"*un gruppo $(G, +)$ abeliano parzialmente ordinato è detto ordinato reticolato completo se ogni suo sottoinsieme limitato superiormente possiede sup (o analogamente se ogni suo sottoinsieme limitato inferiormente possiede inf)".*

A questo punto possiamo caratterizzare il gruppo di divisibilità di un UFD, abbiamo:

"*sia A un dominio, K il suo campo dei quozienti e $G = K^\star/U(A)$ il suo gruppo di divisibilità; allora le seguenti condizioni sono equivalenti* [(6)]*:*

1) G è somma cardinale di copie di $\mathbb{Z}$; [(7)]

2) G soddisfa la condizione della catena;

3) A è un dominio a fattorizzazione unica".

Si ha inoltre che un dominio A è completamente integralmente chiuso se e solo se il suo gruppo di divisibilità è completamente chiuso, mentre un dominio è tale che tutti i suoi v-ideali sono principali [(8)] se e solo se il suo gruppo di divisibilità è ordinato reticolato completo.

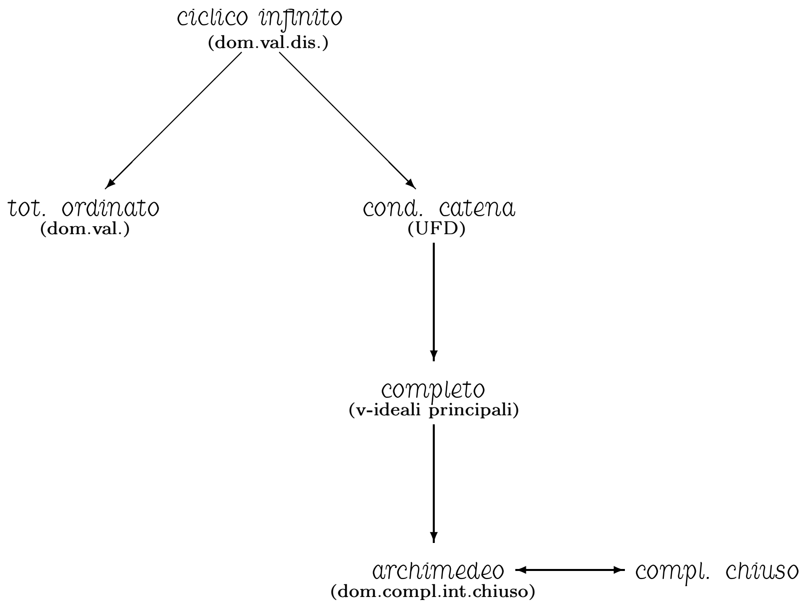
Un caso particolarmente interessante si ha quando il gruppo di divisibilità di A è ciclico infinito, e quindi isomorfo a $\mathbb{Z}$; in questa circostanza G soddisfa tutte le proprietà delle relazioni che fino ad ora abbiamo introdotto: se questo accade allora diciamo che A è un dominio di valutazione discreta.

Si ha che un gruppo che soddisfa la condizione della catena è completo, che un gruppo completo è sempre archimedeo, e che se G è ordinato reticolato allora la nozione di gruppo archimedeo è equivalente a quella di gruppo completamente chiuso; possiamo quindi, sotto l'ipotesi che il gruppo di divisibilità G del dominio A sia ordinato reticolato, rappresentare i risultati mostrati con il seguente diagramma:

[(6)] cfr. [24] pag. 203 .

[(7)] infatti in [10] pag.71 è mostrato che "*un gruppo ordinato reticolato $(G, +)$ che soddisfa la condizione della catena è la somma cardinale di gruppi ciclici totalmente ordinati.*"

[(8)] in [3] tali domini vengono definiti *pseudo-principali.*



È naturale chiedersi quando un gruppo abeliano parzialmente ordinato sia isomorfo al gruppo di divisibilità di un dominio di integrità; la formulazione di un teorema che desse una risposta ha richiesto un periodo di oltre trenta anni. Nel 1931 Krull [9] dimostra un primo risultato: "*sia* $(G, +)$ *un gruppo abeliano totalmente ordinato; allora* G *è il gruppo dei valori di una valutazione (ossia* G *è il gruppo di divisibilità di un dominio di valutazione)*".

Negli anni '40 Kaplansky propone una generalizzazione del teorema in un corso tenuto all'università di Harward, ma nulla viene pubblicato fino al 1953, quando Jaffard [10] dimostra che se G è ordinato reticolato allora esiste un MCD-dominio di cui è il gruppo di divisibilità. Siamo nel 1966 quando Ohm [11] osserva che la dimostrazione di Jaffard porta a concludere che il dominio in questione è un dominio di Bézout e

[9] cfr. [22].
[10] cfr. [17].
[11] cfr. [27].

non semplicemente un MCD-dominio. Allo stato attuale il teorema ha la seguente formulazione:

Teorema 1. ***(Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm)*** *Se G è un gruppo abeliano ordinato reticolato, allora esiste un dominio di Bézout il cui gruppo di divisibilità è ordinatamente isomorfo a G.*

Terminiamo il nostro lavoro proponendo un esempio di gruppo abeliano parzialmente ordinato filtrato che non è isomorfo al gruppo di divisibilità di alcun dominio e mostriamo una applicazione del teorema di Krull-Kaplansky-Jaffard-Ohm in teoria dei gruppi.

Bibliografia

[1] M.F. Atiyah e I.G. Mcdonald *Introduzione all'algebra commutativa*. Feltrinelli, Milano, Italia, 1981

[2] G. Birkhoff *Lattice-ordered groups*. Annals of Mathematichs, no. 43, 1942, pagg.298-331

[3] N. Bourbaki *Algebre, Chap. V-VII*. Masson, Paris, France, 1985

[4] A.H. Clifford *Partially ordered abelian groups*. Annals of Mathematics, no. 41, 1940, pagg.465-473

[5] P.M. Cohn *Bézout rings and their subrings*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, no. 64, 1968, pagg. 251-264

[6] P.M.Cohn *Unique factorization domain*. American Mathematical Monthly, no. 80, 1973, pagg 1-18

[7] P. Conrad e D. McAlister *The completion of a lattice ordered group*. Journal of the Australian Mathematical Society, no 9, 1964, pagg. 182-208

[8] M.R. Darnel *Theory of lattice-ordered groups*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, no 187, Dekker, USA, 1995

[9] J. Dieudonne *Sur la theorie de la divisibilité*. Bullettin de la Sociéte mathématique de France, no. 69, 1941, pagg. 133-144

[10] L. Fuchs *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press, London, Great Britain, 1963

[11] L. Fuchs *The generalization of the Valuation Theory*. Duke Mathematics Journal, no. 18, 1951, pagg. 19-26

[12] R. Gilmer *Multiplicative ideal theory*. Marcel Dekker, New York, USA, 1972

[13] R. Gilmer *Multiplicative ideal theory*. Queen's papers on Pure and Applied Mathematics, Queen's University, Kingston, Ontario, 1968

[14] F. Halter-Koch *Ideal systems: an introduction to multiplicative ideal theory*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, no 211, Dekker, USA, 1998

[15] I.N. Herstein *Algebra*. Editori Riuniti, Roma, 1994

[16] E. Houston e J.R. Hedstrom *Some remarks on star-operations*. Journal of Pure and Applied Algebra, no. 18, 1980, pagg. 37-44

[17] P. Jaffard *Contribution à la théorie des groupes ordonnés*. Journal of Mathematics Pure and Applied, no. 32, 1953, pagg. 203-280

[18] P. Jaffard *Les systèmes d'idéaux*. Dunod, Paris, 1960

[19] P. Jaffard *Groupes archimédiens et para-archimédiens*. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, no. 231, 1950, pagg. 1125-1126

[20] P. Jaffard *Un contre-exemple concernant les groupes de divisibilité*. Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris, no. 243, 1956, pagg. 1264-1268

[21] I. Kaplansky *Commutative rings*. Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1974

[22] W. Krull *Allgemeine Bewertungtheorie*. Journal für die Reine und Angewandte Matematik, no. 167, 1931, pagg. 160-196

[23] J.Močkoř *Groups of divisibility*. Mathematics and its application (East European series), D. Reidel Publishing Company, Prague, 1983

[24] J.L. Mott *The group of divisibility and its application*. Lectures notes in Mathematics, no. 311, Conference in commutative algebra, Spinger-Verlag, Lawrence, Kansas, 1972, pagg.194-208

[25] J.L. Mott *Groups of divisibility: a unifying concept for integral domains and partially ordered groups* in *Lattice-ordered groups: advances and techniques*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989, pagg. 80-104

[26] J. Ohm *Semi-valuation and groups of divisibility*. Canadian Journal of Mathematics no. 21, 1969, pagg. 576-591

[27] J. Ohm *Some counterexamples related to integral closure in* $D[[x]]$. Transactions of the American Mathematical Society, no 122, 1966, pagg. 321-333

[28] P. Samuel *Anneaux factoriels*. Sociedade de Matemática de São Paulo, Brasile, 1963

[29] P.B. Sheldon *Prime ideals in GCD-domains*. Canadian Journal of Mathematics, no 1, 1974, pagg. 98-107

[30] B.L. Van Der Waerden *Algebra*. Springer-Verlag, New York, USA, 1996

[31] M. Ward *Residuated distributive lattices*. Duke Mathematics Journal, no. 6, 1940, pagg. 641-651

[32] O. Zariski e P. Samuel *Commutative algebra*. Van Nostrand, Princetone, New Jersey, USA, 1958