UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
FACOLTÀ DI S.M.F.N.

SINTESI
della tesi di Laurea in Matematica
di
Monica Salvato

Disuguaglianze Hardy-Sobolev

Relatore
Prof. Giovanni Mancini

Anno Accademico 2001-02
Luglio 2002

Classificazione AMS: 35J60
Parole chiave: Riordinamento, Costanti ottimali, Funzioni estremali

In questa tesi, si riferisce su risultati di classici e più recenti studi riguardanti le disuguaglianze integrali tipo **Hardy-Sobolev** (in breve, disuguaglianze HS). Negli ultimi anni, molti autori, motivati dalle importanti applicazioni di tali disuguaglianze in varie aree dell'analisi, si sono dedicati allo studio di esse dimostrandone molte estensioni in diverse direzioni.
Una formulazione generale per tali disuguaglianze è la seguente

$$i) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^{q_*(s,n,q)}}{|x'|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{n-s}{n-q}}$$

dove $u \in \mathcal{D}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $x = (x', z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $2 \leq k \leq n$, $1 < q < n, 0 \leq s \leq q$, $s < k$, $q_*(s, n, q) = \frac{q(n-s)}{n-q}$ e $C = C(s, q, n, k) > 0$.
La $i)$ estende una disuguaglianza dimostrata da Caffarelli-Kohn-Nirenberg in [1]. Il prototipo di tipo $i)$ è la **disuguaglianza di Hardy** (n-dimensionale) che afferma

$$ii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2} dx \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

dove $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$ e $C_n = C(n) > 0$. La $ii)$ deriva da $i)$ ponendo

$$q = 2,\ k = n,\ s = 2$$

Un altro caso particolare della disuguaglianza $i)$ è la **disuguaglianza di Sobolev**, cioè

$$iii) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*} \leq S_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

dove $u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$ e $2^* = \frac{2n}{n-2}$. La $iii)$ deriva da $i)$ ponendo

$$q = 2 \text{ e } s = 0$$

Ciò che caratterizza tali disuguaglianze è il loro carattere di invarianza rispetto all'azione di certi gruppi di trasformazioni (ad esempio per la $iii)$ le trasformazioni conformi), caratteristica che le assimila alla classica disuguaglianza isoperimetrica, che, in ambito Sobolev, si può formulare come

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq K_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx$$

con

$$K_n = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \right)^{1/n}$$

dove $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ e $p = \frac{n}{n-1}$.
Molti autori si sono occupati di tali disuguaglianze; ad esempio, T.Aubin [2], G.Talenti [3], E.H. Lieb [4] e più recentemente E.Hebey [5].
L'obiettivo della tesi, in linea con le problematiche affrontate dagli autori citati in precedenza, sarà non solo la dimostrazione di tali disuguaglianze, ma anche la ricerca di **costanti ottimali** (cioè le più piccole o le più grandi costanti, a seconda del caso, per cui valgano le disuguaglianze) e di funzioni, se esistenti, per cui queste disuguaglianze assumano la forma ottimale (cioè la forma di uguaglianze). Tali funzioni, di cui sarà data in alcuni casi una rappresentazione esplicita, saranno chiamate massimizzatrici o minimizzatrici a seconda del caso (o più semplicemente **funzioni estremali**). Ciò renderà il lavoro notevolmente più impegnativo. Infatti, aumenteranno le difficoltà con la ricerca delle costanti ottimali e delle funzioni estremali, rispetto a quelle che si sarebbero incontrate con la sola dimostrazione delle disuguaglianze. In particolare, nel caso della disuguaglianza di Sobolev, si evidenzierà una relazione di "dualità" con la **disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev** (in breve, disuguaglianza di HLS), la quale afferma che

$$iv) \qquad \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)|x-y|^{-\lambda} h(y)\ dxdy \right| \leq C(n,\lambda,p)\|f\|_p \|h\|_r$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,$h \in L^r(\mathbb{R}^n)$,$1 < p, r < \infty$,$0 < \lambda < n$ con $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{r} = 2$.
Ciò richiederà l'introduzione di concetti geometrici, come quelli di **trasformazioni conformi**, **proiezione stereografica**, **simmetrizzazione di Schwarz e di Steiner** e l'uso di **tecniche di riordinamento**.

Il **riordinamento**, A^* di A insieme misurabile di misura finita, è definito come la palla aperta centrata nell'origine avente la stessa misura di A. Con questa definizione, è naturale porre $(\chi_A)^* := \chi_{A^*}$. Dunque, utilizzando la rappresentazione di "layer cake", per cui ogni funzione misurabile f si può rappresentare come

$$|f(x)| = \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}}(x)dt$$

si definisce il riordinamento (simmetrico-decrescente) f^* di f, **nulla all'infinito** (cioè $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}) < \infty$, $\forall t > 0$, dove μ indica la misura n-dimensionale di Lebesgue), come

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi^*_{\{|f|>t\}}(x)dt$$

Il riordinamento, f^*, possiede, le seguenti proprietà:

- $\int (f^*)^p dx = \int |f|^p dx$ (conservazione delle norme L^p).
- $\int |f^* - g^*|^p dx \leq \int |f - g|^p dx$ (non espansività del riordinamento).
- $\int |\nabla f^*|^p dx \leq \int |\nabla f|^p dx$ (decrescita delle norme L^p del gradiente).
- $\int \frac{|f|^p}{|x|^p} dx \leq \int \frac{(f^*)^p}{|x|^p} dx$ (crescita delle norme L^p con peso $|x|^{-p}$).

In virtù di tali proprietà, il riordinamento costituisce uno strumento fondamentale nello sviluppo della teoria; esso consente di concentrare l'attenzione su funzioni radiali e dunque, di ridurre molti problemi n-dimensionali a più semplici problemi unidimensionali. Fondamentali, in primo luogo, risultano le disuguaglianze di riordinamento (ad esempio la **disuguaglianza di Riesz**), che inducono, appunto, ad ottimizzare nella classe delle funzioni simmetriche e decrescenti.

L'uso di **metodi variazionali** e di argomenti di **teoria ellittica non lineare** risulta, inoltre, fondamentale nell'analisi di alcune applicazioni delle disuguaglianze Hardy-Sobolev.

La tesi è suddivisa in quattro capitoli:

Nel **Capitolo 1** si descrive il riordinamento e se ne analizzano le proprietà; inoltre, si definiscono le simmetrizzazioni di Schwarz e di Steiner. Tali operazioni geometriche consentiranno in dimensione n di simmetrizzare lungo sottospazi di dimensioni minori. Infine, mediante un "argomento di compattezza", sarà dimostrata la disuguaglianza di Riesz. Tale disuguaglianza afferma che

- $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(g * h)(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)\,(g^* * h^*)(x)\,dx$, per ogni f, g e h funzioni misurabili, non negative e nulle all'infinito.

Nel **Capitolo 2**, seguendo lavori di E.H.Lieb [6], si determina il valore della costante ottimale per la disuguaglianza di HLS nel caso $p = r$:

- $C(n, \lambda, p) = C(n, \lambda) = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \left\{ \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right\}^{-1+\lambda/n}$.

e si fornisce una rappresentazione esplicita per le funzioni estremali

- $h \equiv (cost) f$ e $f(x) = A(\gamma^2 + (x-a)^2)^{-(2n-\lambda)/2}$ per $A \in \mathbb{C}, \gamma \in \mathbb{R}^+$ e $a \in \mathbb{R}^n$.

Nella dimostrazione dei precedenti risultati risulterà fondamentale la disuguaglianza di riordinamento di Riesz e la proprietà di invarianza conforme della disuguaglianza di HLS nel caso $p = r$.

Nel **Capitolo 3** si determina il valore della costante ottimale per la disuguaglianza di Sobolev:

- $S_n = \frac{4}{n(n-2)} |\mathbb{S}^n|^{-2/n} = \frac{4}{n(n-2)} 2^{-2/n} \pi^{-1-1/n} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2/n}$

e si fornisce una rappresentazione esplicita per le funzioni estremali

- $f(x) = A(\mu^2 + (x-a)^2)^{-(n-2)/2}$ con $A \in \mathbb{C}, \mu > 0$ e con $a \in \mathbb{R}^n$.

La dimostrazione di tale risultato, ottenuto seguendo i lavori di E.H.Lieb [6], utilizzerà la relazione di dualità tra le disuguaglianze di HLS e di Sobolev. Tale relazione sarà ottenuta mediante le proprietà della **funzione di Green**. Infatti, mediante la soluzione fondamentale del laplaciano G, data da

- $G(y) = [\,(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|\,]^{-1} |y|^{2-n}, \quad y \in \mathbb{R}^n$

e la seguente stima

- $\left|\int_{\mathbb{R}^n} fg\right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 \int_{\mathbb{R}^n} g(g * G)$, valida per ogni $f \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ e per ogni $g \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n)$,

dimostreremo l'equivalenza

- $\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,|x-y|^{2-n} f(y)\,dx\,dy \leq C_n \|f\|^2_{\frac{2n}{n+2}} \quad \forall f \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\mathbb{R}^n)$
$\Leftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq S_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^2 dx \quad \forall g \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ con
$S_n = C_n[\,(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|\,]^{-1}$

dove C_n e S_n indicano le costanti ottimali rispettivamente nella disuguaglianza di HLS (nel caso $p = r = \frac{2n}{n+2}$) e nella disuguaglianza di Sobolev. Da ciò dedurremo la seguente relazione tra le funzioni estremali

- g è estremale per la disuguaglianza di HLS (nel caso $p = r = \frac{2n}{n+2}$) $\Leftrightarrow f = g^{\frac{n-2}{n+2}}$ è estremale per la disuguaglianza di Sobolev.

Il **Capitolo 4** è dedicato alla disuguaglianza di Hardy, a opportune generalizzazioni di essa e ad applicazioni delle disuguaglianze Hardy-Sobolev in campo astrofisico.

Per quanto riguarda la disuguaglianza di Hardy, determineremo il valore della costante ottimale

- $C_n = \left(\frac{2}{n-2}\right)^2$ (seguendo I.Peral Alonso e J.P.Garcia Azorero,[7])

e dimostreremo che

- la costante ottimale C_n non è realizzata (seguendo K.Sandeep,[8])

Mediante il lavoro di M.Badiale e G.Tarantello [9], verificheremo

- l'esistenza di funzioni estremali che realizzano la costante ottimale per le disuguaglianze Hardy-Sobolev, eccetto che nel caso $s = q$ (che include il caso della disuguaglianza di Hardy in versione L^q).

La dimostrazione utilizzerà un'opportuna formulazione dei due principi di 'Concentrazione-Compattezza' di P.L.Lions ([10],[11]).
La parte conclusiva del capitolo analizza l'esistenza di soluzioni a **simmetria cilindrica** del problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(r)|u|^{p-2}u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\ u(x) > 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\ \int_{\mathbb{R}^3} \phi(r)u^{p-1}dx < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

proposto recentemente da due astrofisici (G.Bertin, Scuola Normale Superiore, Pisa e L.Ciotti, Osservatorio Astronomico, Bologna) come modello descrivente la dinamica delle galassie.
In (1) si suppone $p > 1$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$ e la funzione ϕ definita come

$$\phi(r) = \frac{r^{2\alpha}}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \qquad (\alpha > 0) \tag{2}$$

La condizione, $\int_{\mathbb{R}^3} \phi(r)u^{p-1}dx < +\infty$, presente in (1), garantisce che la soluzione, $u = u(r,z)$ $(z = x_3)$, trasporti una massa totale finita.
Il principale strumento utilizzato per lo studio del problema (1) è una **formulazione variazionale** nello spazio $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, ottenuta mediante le disuguaglianze HS, per $p \in [4, 6]$ e per ϕ verificante

$$\phi \in C(\mathbb{R}^+),\ \phi \geq 0,\ \phi(r) = 0 \ \Leftrightarrow\ r = 0,\ r\phi(r) \in L^\infty(\mathbb{R}^+) \tag{3}$$

dove si è posto $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ (si noti che (2) verifica (3)).

Infatti, in tali ipotesi, le disuguaglianze HS implicano l'esistenza di una costante $C_p > 0$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \geq C_p \left(\int_{\mathbb{R}^3} \phi(r)|u|^p dx \right)^{2/p}, \qquad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \tag{4}$$

Usando quest'ultima disuguaglianza e un risultato di H.Egnell [12], è possibile concludere che quando $p \in [4,6]$ e u verifica

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(r)|u|^{p-2}u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\ u(x) > 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \\ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{5}$$

allora

$$\limsup_{|x|\to\infty} |x|u(x) < \infty$$

Da ciò si deduce che l'ipotesi $\int_{\mathbb{R}^3} \phi(r)u^{p-1}dx < +\infty$ è automaticamente soddisfatta nel caso di soluzioni di (5). Quindi, per ottenere le soluzioni di (1) è sufficiente risolvere (5). Dunque, purché $p \in [4,6]$ e ϕ verifichi (3), ci siamo ricondotti al problema di minimizzazione

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \mid u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} \phi(r)|u|^p dx = 1 \right\} \tag{6}$$

Per ottenere soluzioni a simmetria cilindrica per (1), restringiamo il problema estremale (6) sul sottospazio $\mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ delle funzioni a simmetria cilindrica.
I risultati ottenuti sono i seguenti:

- Se $4 < p < 6$, il problema (6), ristretto a $\mathcal{D}_c^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, ammette funzioni estremali. Dunque, il problema (1) possiede soluzioni a simmetria cilindrica.
- Se $p = 6$, il problema di minimizzazione (6) non ha soluzione. Infatti, in questo caso, se si normalizza ϕ in modo tale che $\max_{\mathbb{R}^+} \phi = 1$, la costante ottimale per (4) coincide con quella di Sobolev. Quindi, essa è realizzata se e solo se $\phi \equiv 1$. Ciò non può accadere per l'ipotesi (3).
  Si può comunque dimostrare che il problema (1) possiede soluzioni a simmetria cilindrica.

- Se $p = 4$ e la funzione $r\phi(r)$ è crescente e non costante (come in (2)), allora il problema di minimizzazione (6) non ha soluzione.
  L'esistenza di funzioni estremali per il problema di minimizzazione (6) dipende dalla "natura" della funzione $\phi(r)$ (o piuttosto da $r\phi(r)$). Si osservi, infatti, che per i risultati ottenuti sulle disuguaglianze HS, esistono funzioni estremali che realizzano la costante ottimale nella disuguaglianza

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx\right)^2 \geq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u|^4}{r} dx, \quad u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)$$

  Dunque, il problema di minimizzazione (6) ammette soluzione quando $p = 4$ e $r\phi(r) \equiv 1$.
  Mediante il lavoro di K.Sandeep [13], forniremo risultati di esistenza di soluzioni per il problema (1), purché ϕ verifichi "opportune" condizioni. In particolare, mediante proprietà di regolarità e di decadimento delle soluzioni, dimostreremo l'esistenza di soluzioni nel caso in cui le ϕ siano piccole perturbazioni di (2) (da M.Badiale e E.Serra, [14]).

Bibliografia

[1] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, Compositio Math. vol. 53 (1984), 259-275.

[2] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, Journal of Differential Geometry, 11, 1976, p. 573-598.

[3] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976),353-372.

[4] E. H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math. 18 (1983), 349-374.

[5] E. Hebey, *Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1635, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[6] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, 1997

[7] J. P. Garcia Azorero and I. Peral Alonso, *Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems*, J. Differential Equations 144 (1998), no.2,441-476.

[8] K. Sandeep, *Seminario 2001-2002.*

[9] M. Badiale and G. Tarantello, *A Sobolev-Hardy inequality with applications to a nonlinear elliptic equation arising in astrophysics*, Preprint 2001.

[10] P.L.Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1*, Ann. Inst. Henry Poincaré-Analyse non linaire, vol. 1 (1984), 109-145.

[11] P.L.Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2*, Ann. Inst. Henry Poincaré-Analyse non linaire, vol. 1 (1984), 222-283.

[12] H. Egnell, *Asymptotic results for finite energy solutions of semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations vol. 98 (1992), 34-56.

[13] K. Sandeep, *On a noncompact minimization problem of Hardy-Sobolev type*, Preprint, 2001.

[14] M. Badiale and E. Serra, *Critical nonlinear elliptic equations with singularities and cylindrical symmetry*, Preprint 2001.

[15] G. Bertin, *Dynamics of galaxies*, Cambridge University Press, Cambridge-New York 2000.

[16] L. Ciotti, *Dynamical models in astrophysics.* Scuola Normale Superiore, Pisa 2000.