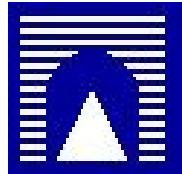


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI S.M.F.N.



Sintesi di tesi di Laurea in Matematica

Politopi convessi

Il Candidato
Paolo Santini

Il Relatore
Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2007-2008

Classificazione: 52B35

Parole chiave: convex polytopes, planar graphs, computer graphics.

I protagonisti di questa tesi sono i politopi convessi. I politopi sono degli affascinanti oggetti geometrici noti agli studiosi fin dall'antichità: la teoria dei poliedri regolari fu studio di grandi personaggi del passato come Euclide, Archimede e Keplero. I poliedri sono oggetti geometrici naturali e semplici che racchiudono in loro la geometria dello spazio. Coxeter era solito dire che chiedersi chi per primo ha costruito un poliedro è come chiedersi chi ha scoperto il fuoco...

La teoria dei grafi sui politopi, così chiamata da Sylvester, comincia con il problema dei sette ponti sul fiume Pregel nella città di Königsberg posto da Eulero nel XVIII secolo e sviluppato nel seguito da Hamilton, Cayley ed altri. Fino all'ottocento però solo pochi matematici, come Schläfli e Möbius, concepivano la possibilità di una geometria in più di tre dimensioni. Solo una o due persone hanno avuto la capacità di immaginare iper-solidi come noi comuni mortali riusciamo a visualizzare i solidi.

Nell'era della computer graphics l'immaginazione riceve una mano da questo nuovo strumento, che ha posto molti nuovi problemi ed ha fornito nuove tecniche per affrontarli.

In questa tesi abbiamo approfondito lo studio dei politopi convessi sia per quanto riguarda le estensioni più recenti dello studio delle loro proprietà matematiche, sia per quanto riguarda lo sviluppo delle tecniche di rappresentazione grafica nate spesso per la visualizzazione tridimensionale dei politopi di più dimensioni.

Ci siamo indirizzati verso le tecniche combinatorie utilizzate per costruire rappresentazioni in spazi di dimensione inferiore di politopi n -dimensionali. In particolare abbiamo approfondito i diagrammi di Schlegel, i diagrammi di Gale ed i grafi associati a politopi, per culminare con il teorema di Steinitz che caratterizza completamente la struttura combinatoria di un politopo. Infine nel corso della preparazione di questo lavoro, abbiamo imparato un linguaggio di programmazione per la visualizzazione utilizzato da professionisti del campo: il programma si chiama POV-Ray, nato per mano di un gruppo di persone che formano il POV-Team, un software di rendering tridimensionale

in grado di generare immagini ad alta qualità. L'idea nasce dalla visione di alcuni filmati realizzati da un professionista del settore, il dottor Gian Marco Todesco, che hanno catturato la mia attenzione, mi hanno affascinato e spinto a creare qualcosa di simile. L'intero progetto nasce da questo desiderio. Nel dettaglio la tesi è così organizzata.

Nel Capitolo 1 diamo le principali nozioni e definizioni della tesi. Innanzitutto cominciamo col definire cos'è un politopo, utilizzando la nozione di poliedro:

Definizione 1. *Un \mathcal{H} -poliedro è l'intersezione finita di semispazi chiusi in \mathbb{R}^d .*

Un \mathcal{V} -politopo è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti in \mathbb{R}^d . Un \mathcal{H} -politopo è un \mathcal{H} -poliedro limitato, cioè che non contiene una semiretta $\{\mathbf{x} + t\mathbf{y} : t \geq 0\}$ per ogni $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Definizione 2. *Definiamo due politopi $P \subseteq \mathbb{R}^d$ e $Q \subseteq \mathbb{R}^e$ affinementemente isomorfi, indicandolo con $P \cong Q$, se esiste una mappa affine $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^e$ biettiva fra i punti dei due politopi (non si richiede che sia suriettiva ed iniettiva negli spazi ambiente).*

Le due definizioni date di \mathcal{V} -politopo e di \mathcal{H} -politopo sono concettualmente identiche, ma la dimostrazione che sono effettivamente la stessa cosa viene data con il teorema principale sui politopi.

Teorema 1. Teorema principale sui politopi

Un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{R}^d$ è l'involuppo convesso di un insieme finito di punti (un \mathcal{V} -politopo) $P = \text{conv}(V)$ con $V \in \mathbb{R}^{d \times n}$ se e solo se è l'intersezione limitata di semispazi chiusi (un \mathcal{H} -politopo) $P = P(A, \mathbf{z})$ con $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$.

Questo teorema è importante perchè fornisce due differenti caratterizzazioni dei politopi che possono essere utilizzate in base al problema che si sta studiando. Nella dimostrazione del teorema utilizziamo un metodo detto eliminazione di Fourier-Motzkin, da cui segue il seguente lemma, che ci fornisce la nostra definizione di politopo convesso:

Lemma 1. *Un sottoinsieme $P \subset \mathbb{R}^d$ è un politopo se può essere rappresentato sia come un \mathcal{V} -politopo che come un \mathcal{H} -politopo.*

Dopo aver definito i politopi convessi passiamo ad esaminare nella terza sezione alcuni esempi: dai classici poliedri regolari come cubo, ottaedro e tetraedro ad esempi più interessanti. Un primo esempio importante è il politopo ciclico. Dopo aver definito la curva del momento in \mathbb{R}^d come $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, che manda t in $\mathbf{x}(t) := (t, t^2, \dots, t^d)$, il *politopo ciclico* $C_d(t_1, \dots, t_n)$ è l'involuppo convesso dei punti $\mathbf{x}(t_i)$ con $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Il secondo esempio è il *permutaedro* $\Pi_{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$, i cui vertici possono essere identificati con le permutazioni in S_d . Il terzo esempio ruota attorno ad una classe particolare di politopi, gli *0/1-politopi* in cui tutti vertici hanno le coordinate equivalenti a 0 o a 1.

Infine affrontiamo lo studio dei politopi regolari, dove la nostra definizione di regolarità è la seguente:

Definizione 3. *Un d -politopo è regolare se tutte le sue celle e le sue figure al vertice sono $(d-1)$ -politopi regolari.*

In dimensione due tutti i poligoni sono ovviamente regolari, mentre la regolarità dei cinque *solidi Platonici* per $d=3$ è ben nota. Esistono inoltre sei 4-politopi regolari, e solo tre d -politopi regolari per $d \geq 5$. In questa tesi non abbiamo voluto dare una descrizione dettagliata dei politopi regolari e della loro scoperta, ma abbiamo voluto menzionare alcuni dei risultati conosciuti più rilevanti, formulando anche alcuni problemi irrisolti, come la classificazione dei politopi c -regolari, politopi in cui tutte le celle sono regolari, in dimensione maggiore di tre.

Nel Capitolo 2 analizziamo nel dettaglio la struttura combinatoria di un politopo. Nella prima sezione enunciamo e dimostriamo un importante risultato, che si può trovare in molte differenti versioni in tutta la teoria dei poliedri e dei politopi, il Lemma di Farkas. Noi ne diamo quattro differenti versioni, che seguono tutte dalla prima:

Proposizione 1. *Il lemma di Farkas I*

Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$. Allora esiste un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ con $A\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$, oppure esiste un vettore riga $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^m)^*$ con $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}A = \mathbf{0}$ e $\mathbf{c}\mathbf{z} < 0$. Le due condizioni non possono essere verificate entrambe.

Essenzialmente i lemmi di Farkas danno una caratterizzazione per la risoluzione di sistemi di disuguaglianze. A seguire diamo la seguente proposizione, un risultato basilare nella teoria dei politopi, il teorema di Carathéodory.

Proposizione 2. Il teorema di Carathéodory

Sia $X \in \mathbb{R}^{d \times n}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Se $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$, allora $\mathbf{x} \in \text{conv}(X')$ per un sottoinsieme $X' \subseteq X$ con al più $\dim(\text{conv}(X))+1$ vettori in X .

Nella seconda sezione affrontiamo una serie di definizioni che completano la struttura combinatoria di un politopo.

Definizione 4. Sia $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un politopo convesso. Il k -scheletro di P è l'unione delle facce k -dimensionali.

Definizione 5. Siano $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ due politopi convessi. P e Q si diranno combinatoriamente equivalenti e lo denoteremo con $P \simeq Q$ se esiste una biezione fra le loro facce che preserva la relazione di inclusione.

Questo è il concetto principale di equivalenza che non dipende da una particolare metrica e che analizza la struttura combinatoria di un politopo.

Definizione 6. Due politopi P e Q sono uno il duale dell'altro se esiste una mappa iniettiva ψ tra l'insieme delle facce di P e l'insieme delle facce di Q che inverte l'ordine d'inclusione, cioè date due facce di P , F_1 e F_2 con $F_1 \subset F_2$ allora $\psi(F_1) \supset \psi(F_2)$.

Due classi combinatorie sono duali fra loro se esistono due politopi, uno per ogni classe presa, duali fra loro. Esempi di 3-politopi duali sono: il cubo e l'ottaedro (in generale ogni n -prisma con ogni n -dipiramide), il dodecaedro e l'icosaedro, la n -piramide è duale con se stessa, così come gli n -simplessi. Volendo studiare la struttura combinatoria dei politopi, nella quarta sezione di questo capitolo definiamo i reticoli delle facce di un politopo.

Definizione 7. Un ipo (S, \leq) è un insieme parzialmente ordinato, cioè un insieme finito S dotato di una relazione \leq che sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Definizione 8. Un ipo è limitato se ha un unico elemento minimo $\hat{0}$ ed un unico elemento massimo $\hat{1}$.

Definizione 9. Sia (S, \leq) un ipo. Un **reticolo** è un ipo limitato in cui ogni due elementi $x, y \in S$ hanno un unico limite superiore minimo, denotato con $x \vee y$ ed un unico limite inferiore massimo, denotato con $x \wedge y$.

I reticoli ci interessano come rappresentazione delle facce di un politopo convesso:

Definizione 10. Il reticolo delle facce di un politopo convesso P è l'ipo $L(P)$ di tutte le facce di P ordinate parzialmente per inclusione.

Un reticolo può essere rappresentato sul piano tramite un **Diagramma di Hasse**, un grafo in cui i vertici rappresentano gli elementi dell'insieme, dove $x \leq y$ se e solo se esiste un percorso incrementale da x a y , in cui due vertici rappresentanti due elementi x ed y sono uniti da uno spigolo se e solo se $x < y$ e se l'intervallo $[x, y] := \{w \in S : x \leq w \leq y\} = \{x, y\}$.

La definizione di combinatoriamente equivalenti può essere riformulata definendo due politopi P e Q combinatoriamente equivalenti, $P \simeq Q$, se e solo se i reticoli delle facce sono isomorfi, $L(P) \cong L(Q)$.

Infine enunciamo e dimostriamo il teorema generale di rappresentazione per i politopi, che racchiude tutti i modi in cui può essere rappresentato un politopo:

Teorema 2. Teorema di rappresentazione per i politopi

Un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{R}^d$ è un politopo se e solo se può essere descritto in uno dei seguenti modi equivalenti:

1. come proiezione affine di un semplice
2. come inviluppo convesso di un insieme finito di punti

3. come involucro convesso dell'insieme dei vertici $\text{vert}(P)$
4. come l'unione di tutti i semplici che contiene un insieme finito di punti
5. come proiezione di un d -scheletro di un semplice
6. come intersezione limitata di semispazi chiusi
7. come intersezione limitata di semispazi che definiscono le celle di P , uno per ogni cella, e dell'involucro affine di P .

Il Capitolo 3 è incentrato sui due principali strumenti di visualizzazione dei politopi convessi di dimensione superiore a tre: i diagrammi di Schlegel ed i diagrammi di Gale, entrambi basati sul concetto di dualità fra politopi. I diagrammi di Schlegel sono i più diretti ed i più efficaci strumenti per la visualizzazione degli oggetti in quattro dimensioni.

Definizione 11. *Un complesso poliedrale C è una collezione finita di poliedri in \mathbb{R}^d tale che:*

- (i) $\emptyset \in C$,
- (ii) se $P \in C$, allora tutte le facce di P sono in C ,
- (iii) l'intersezione $P \cap Q$ di due poliedri $P, Q \in C$ è una faccia sia di P che di Q ed appartiene quindi a C .

La dimensione $\dim(C)$ è la dimensione del poliedro più grande in C . L'insieme sottostante di C è l'insieme $|C| := \bigcup_{P \in C} P$.

Se tutti i poliedri sono politopi diremo che C è un **complesso politopale**

Definizione 12. *Una suddivisione politopale di un politopo P è il complesso C tale che l'insieme sottostante $|C| = P$. La suddivisione è una triangolazione se tutti i politopi in C sono semplici.*

Definizione 13. *Sia P un d -politopo in \mathbb{R}^d . Definiamo un punto \mathbf{y}_F limitrofo ad una cella F come un punto che giace nel semispazio differente di H_F*

rispetto a $0 \in \text{int}(P)$ con H_F iperpiano che contiene F , ma nello stesso semispazio rispetto a tutti gli altri iperpiani H_j che definiscono tutte le altre celle di P e che non contengono F .

Definizione 14. Sia P un d -politopo in \mathbb{R}^d , e sia $F \in L(P)$ una cella di P , definita dalla disuguaglianza valida $\mathbf{a}\mathbf{x} \leq z$. Sia H l'iperpiano che definisce F , $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}\mathbf{x} = z\}$. Prendiamo un punto \mathbf{y}_F limitrofo ad F . Per $\mathbf{x} \in P$, definiamo $p(\mathbf{x}) := \mathbf{y}_F + \frac{z - \mathbf{a}\mathbf{y}_F}{\mathbf{a}\mathbf{x} - \mathbf{a}\mathbf{y}_F}(\mathbf{x} - \mathbf{y}_F)$. Il diagramma di Schlegel $D(P, F)$ del politopo P di base la cella F è l'immagine sotto p di tutte le facce proprie di P tranne F , cioè è l'insieme

$$D(P, F) := \{p(G) : G \in L(P) \setminus \{P, F\}\}$$

contenuto nell'iperpiano H .

Proposizione 3. Il diagramma di Schlegel di un politopo P di base la cella F è una suddivisione politopale di F ed è combinatoriamente equivalente al complesso $C((\partial P) \setminus \{F\})$ di tutte le facce proprie di P tranne F .

Questa riduzione diventa utilissima nello studio dei 4-politopi, poiché il loro diagramma potrà essere visualizzato in un oggetto in tre dimensioni. Esistono però dei d -diagrammi che non provengono da nessun $(d+1)$ -politopo, problema che affrontiamo nella sezione successiva. Ogni diagramma di Schlegel di un d -politopo è un $(d-1)$ -diagramma, ed ogni d -diagramma con al più $d+4$ vertici è sempre di Schlegel. Il risultato più interessante che diamo è il seguente:

Teorema 3. Ogni 2-diagramma è combinatoriamente equivalente ad un diagramma di Schlegel.

Dopo aver stabilito dei parametri che separano i diagrammi di Schlegel dagli altri, forniamo degli esempi di diagrammi dovuti a Schulz e Barnette: un 3-diagramma che mostriamo non poter essere di Schlegel, un diagramma di Schlegel in cui dimostriamo che in un 4-politopo non possiamo descrivere la forma di una cella, al contrario di quanto avviene per un 3-politopo; come

terzo esempio forniamo un 3-diagramma topologico curvato, che nel passaggio dal piano allo spazio incontra dei paradossi.

La quarta sezione del terzo capitolo è dedicata ai diagrammi di Gale.

Nelle prime due sezioni ci occupiamo di configurazioni di punti e di vettori: data una configurazione di n punti $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ costruiamo una configurazione di n vettori $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ in \mathbb{R}^{d+1} definendo $\mathbf{v}_i := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}_i \end{pmatrix}$; definiamo inoltre $r := d+1$. Le definizioni seguenti sono la base della teoria dei diagrammi di Gale e permettono poi nella loro elaborazione di non perdere le informazioni combinatorie del politopo.

Definiamo lo spazio delle dipendenze lineari $Dep(V) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : V\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e lo spazio dei vettori dei valori della configurazione $Val(V) := \{\mathbf{c}V : \mathbf{c} \in (\mathbb{R}^r)^*\} \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$. Allora abbiamo che:

Definizione 15. *Sia $V = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^r$ una configurazione aciclica di n vettori in \mathbb{R}^r . I vettori segnati di V sono dati da:*

$$\nu(V) := \{sign(\mathbf{v}) \in \{+, -, 0\}^n : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, V\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = SIGN(Dep(V))$$

ed i circuiti segnati $C(V)$ sono i vettori segnati del supporto minimo non vuoto. I covettori segnati di V sono dati da:

$$\nu^*(V) := \{sign(\mathbf{c}V) : \mathbf{c} \in (\mathbb{R}^r)^*\} = SIGN(Val(V))$$

ed i cocircuiti segnati $C^(V)$ sono i covettori segnati del supporto minimo non vuoto: corrispondono alle funzioni lineari tali che i vettori $\mathbf{v} \in V$ che si annullano nella funzione definiscono un iperpiano in \mathbb{R}^r .*

Il risultato principale per i diagrammi di Gale che forniamo in questa tesi è il seguente:

Teorema 4. Configurazione duale

Sia $V \in \mathbb{R}^{r \times n}$ una configurazione di n vettori colonna in \mathbb{R}^r .

Esiste ed è unica una matrice $G \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ di n vettori riga in $(\mathbb{R}^{n-r})^$, tale che:*

$$Val(V) = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^n)^* : \mathbf{c}G = \mathbf{0}\}$$

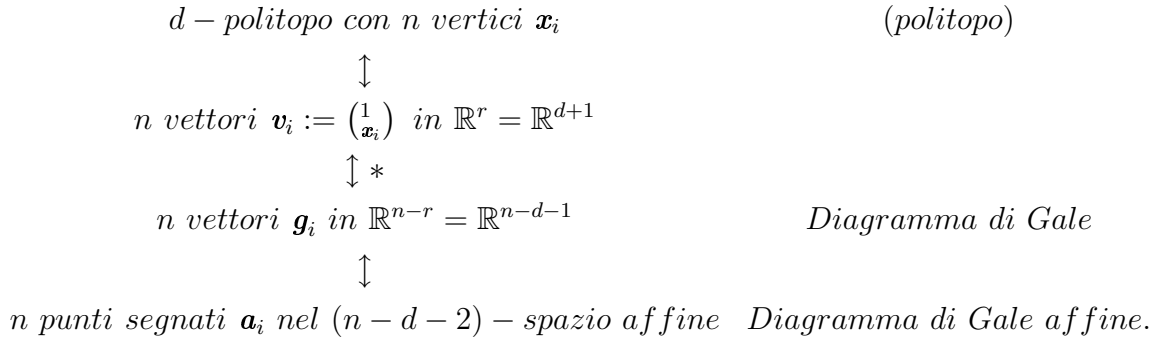
$$\text{Dep}(V) = \{G\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-r}\}$$

La configurazione G è unica a meno di trasformazioni lineari sulle coordinate in $(\mathbb{R}^{n-r})^*$, che corrispondono ad operazioni sulle colonne di G .

Questo teorema ci porta alla seguente definizione:

Definizione 16. Diagrammi di Gale lineari ed affini

Sia $P = \text{conv}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ un d -politopo in \mathbb{R}^d con n vertici. Un diagramma di Gale ed un diagramma di Gale affine sono ottenuti con la seguente sequenza di operazioni:



E' fondamentale per capire i diagrammi di Gale osservare che la riduzione da \mathbb{R}^d a $(\mathbb{R}^{n-d-2})^*$ non ci fa perdere alcuna informazione combinatoria su P : i circuiti ed i cocircuiti della configurazione di punti di partenza sono i cocircuiti ed i circuiti di quella d'arrivo. Questo risulta estremamente utile per politopi con "pochi vertici", cioè nei quali il numero di vertici supera la dimensione del politopo di poche unità.

In seguito forniamo una caratterizzazione dei diagrammi di Gale: esistono delle configurazioni di vettori che non sono diagrammi di Gale:

Teorema 5. Proprietà caratteristica dei diagrammi di Gale

Una matrice $G \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ di vettori riga è un diagramma di Gale di un d -politopo con n vertici se e solo se ogni cocircuito ha almeno due elementi positivi.

Nella sezione seguente forniamo degli esempi di diagrammi: il diagramma di un ottaedro regolare in \mathbb{R}^3 , di un d -politopo con $d+4$ vertici che non può

essere realizzato con coordinate razionali, di un d -politopo per il quale la forma delle celle non può essere descritta a priori, di un d -politopo che ha lo spazio di realizzazione non connesso.

Il Capitolo 4 è incentrato sui grafi costruiti su di un politopo, altro modo di studiare la struttura combinatoria di questi oggetti.

Definizione 17. *Un grafo è una coppia ordinata $G=(V,E)$, dove V è l'insieme dei nodi ed $E \subseteq V \times V$ l'insieme degli archi, ossia un insieme di coppie $(u,v) \in V \times V$. Due nodi connessi da un arco prendono il nome di estremi dell'arco. Un grafo sprovvisto di cappi e archi doppi si dice grafo semplice. Un grafo non orientato è un grafo in cui non si tiene conto dell'ordinamento delle coppie di nodi che costituiscono gli archi: se $(u,v) \in E$ allora anche $(v,u) \in E$.*

Definizione 18. *Sia P un politopo convesso. I vertici e gli spigoli di P formano un grafo $G(P)$ semplice, astratto, finito, non orientato.*

Nella seconda sezione diamo risalto ad un problema aperto della teoria dei grafi associati a politopi, quello del limite del diametro di un grafo, problema posto nell'ipotesi congetturata da Hirsch:

Definizione 19. *Sia G un grafo. Il diametro di G è il più piccolo numero $\delta(G)$ per il quale due qualsiasi nodi di G possono essere connessi con un percorso con al più $\delta(G)$ archi.*

Chiameremo il diametro massimo di un grafo su un d -politopo con al più n celle $\Delta(d,n)$, per $n > d \geq 2$.

Congettura 1. Congettura di Hirsch.

Sia $\Delta(d,n)$ il diametro massimo di un grafo su un d -politopo con n celle per $n > d \geq 2$. Allora

$$\Delta(d,n) \leq n - d$$

Nello sviluppo di questa congettura, definiamo $H_u(d,n)$ come il più piccolo numero tale che per ogni vertice \mathbf{v} di P esiste un percorso strettamente

monotono di lunghezza al più $H_u(d, n)$ da \mathbf{v} a \mathbf{u} . Di conseguenza per concludere la sezione enunciamo e dimostriamo un importante risultato dovuto a Kalai, che per primo trovò un limite pseudopolinomiale per il problema del diametro:

Teorema 6. *Sia $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un d -poliedro con al più n celle, e sia $\mathbf{c}\mathbf{x}$ una funzione lineare in posizione generale rispetto a P , che raggiunge il suo massimo in P nel vertice \mathbf{w} . Partendo da un vertice $\mathbf{v} \in \text{vert}(P)$, esiste un percorso monotono da \mathbf{v} a \mathbf{w} , la cui lunghezza è limitata da*

$$H_u(d, n) \leq 2n \binom{d + \lceil \lg_2 n \rceil - 1}{d-1} \leq 2n^{\lg_2(d)+1} = 2(2d)^{\lg_2(n)}$$

Il risultato seguente che dimostriamo è un teorema che prende spunto da una congettura che ipotizzò Perles, che poi Kalai riprese e dimostrò.

Teorema 7. *Sia P un politopo d -dimensionale semplice e sia $G(P)$ il grafo associato a P . Allora il grafo $G(P)$ determina l'intera struttura combinatoria di P .*

Infine forniamo i due risultati principali del capitolo e della tesi, il teorema di Balinski ed il teorema di Steinitz

Teorema 8. Teorema di Balinski

Sia P un politopo d -dimensionale e sia $G(P)$ il grafo associato a P . $G(P)$ è d -connesso.

Teorema 9. Teorema di Steinitz.

Sia G un grafo. G è il grafo relativo ad un 3-politopo se e solo se G è semplice, planare e 3-connesso.

Nella dimostrazione di quest'ultimo risultato, si devono introdurre nuovi concetti:

Definizione 20. *Un'operazione che trasforma un triangolo non separato in una 3-stella che connette gli stessi nodi, prende il nome di operazione $\Delta\Upsilon$.*

Quando contraiamo archi *in serie*, cioè adiacenti ad un nodo di grado 2 (che equivale alla rimozione di tale nodo), oppure eliminiamo archi in parallelo con altri (rendendo il grafo semplice) parleremo di *riduzioni SP*.

Definizione 21. *Una riduzione $\Delta\Upsilon$ semplice è una successione di operazioni $\Delta\Upsilon$ seguite da tutte le riduzioni SP possibili.*

Da ciò andiamo ad introdurre alcuni lemmi, utili alla dimostrazione del seguente corollario che implica il teorema di Steinitz:

Corollario 1. *Ogni grafo planare 3-connesso G può essere ridotto a K_4 da una sequenza di riduzioni semplici $\Delta\Upsilon$.*

dove K_4 è il più piccolo grafo 3-connesso realizzabile con 6 archi e 4 vertici, associato al tetraedro.

Nell'ultima sezione di questo capitolo diamo una seconda versione del teorema di Steinitz, che ci fa capire meglio la sua importanza, basata sul concetto di spazio di realizzazione di un politopo:

Definizione 22. *Sia P un d -politopo con $n > d$ vertici $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Sia il sottoinsieme di $\text{vert}(P)$ $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{d+1}\}$ una divisione di P , cioè dato $1 \leq k \leq d + 1$ abbiamo che $\text{aff}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}) \cap P$ è una $(k-1)$ -faccia di P .*

Definiamo lo spazio di realizzazione di P $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathbb{R}^{d \times n}$ come l'insieme di tutte le matrici $Y \in \mathbb{R}^{d \times n}$ tali che $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ per $1 \leq k \leq d + 1$ e tali che P è combinatoriamente equivalente a $Q := \text{conv}\{y_1, \dots, y_n\}$ sotto la corrispondenza $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{y}_i$.

Teorema 10. Teorema di Steinitz.

Per ogni 3-politopo P , lo spazio di realizzazione $\mathcal{R}(P)$ è contraibile, e quindi connesso.

Il Capitolo 5 riguarda la realizzazione di un filmato incentrato sui diagrammi di Schlegel e di Gale, creato allo scopo di mostrare la grande potenzialità della computer graphics come nuovo strumento di investigazione

matematica.

Dopo una descrizione del modello, approfondiamo la conoscenza con il linguaggio utilizzato, POV-Ray. POV è l'acronimo di Persistence Of Vision, mentre Ray sta per *raytracing*. Il raytracing è una simulazione della nostra visione del mondo circostante che crea immagini tridimensionali di qualità fotografica. La *scena* in POV-Ray è descritta da un file di testo.

Nella sezione successiva diamo una sommaria descrizione del linguaggio di programmazione, accennando i principali comandi e la struttura di un file in POV-Ray. In ultimo vengono forniti i listati dei file scena, i file di testo che descrivono le scene, insieme ad alcune spiegazioni sulle istruzioni più interessanti.

Riferimenti bibliografici

- [1] Günter M. Ziegler *Lectures on polytopes* Springer-Verlag GTM 152, Berlin, 1994.
- [2] Branko Grünbaum *Convex polytopes* Springer-Verlag GTM 221, Seattle, 2003.
- [3] H. S. M. Coxeter *Regular polytopes* Dover Publications, INC., New York, 1973.
- [4] H. S. M. Coxeter *Introduction to geometry* John Wiley and sons, INC., 1961.
- [5] Edoardo Sernesi *Geometria 2* Bollati Boringhieri, 1994.
- [6] Michele Emmer *Matematica e cultura 2001* Springer, 2001.
- [7] Michel L. Balinski *On the graph structure of convex polyhedra in n -space* Pacific J. Math., 1961.
- [8] Gil Kalai *A simple way to tell a simple polytope from its graph* J. Combinatorial Theory, 1988.
- [9] Gil Kalai *A subexponential randomized simplex algorithm* ACM Press, 1992.
- [10] Klaus Truemper *On the delta-wye reduction for planar graphs* J. Graph Theory 13, 1989.
- [11] Klaus Truemper *Matroid decomposition* Academic Press, San Diego 1992.
- [12] Consuelo Schiavone *Modelli virtuali. Un'introduzione a POV-Ray*. Tesi di Laurea. Università degli studi di Torino. Facoltà di S.M.F.N.

- [13] <http://www.liberliber.it/biblioteca/p/pov-ray-team/manuale-pov-ray-v3-01/html/index.htm> Su queste pagine è possibile trovare il manuale in italiano della versione 3.01 di POV-Ray.
- [14] <http://www.povray.org> Sito ufficiale di POV-Ray.
- [15] <http://www.toonz.com/personal/todesco/sis/3d.html> Sito personale di Gian Marco Todesco dove sono presenti molti esempi ed animazioni realizzate con POV-Ray.