

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

SINTESI DELLA TESI DI LAUREA IN MATEMATICA

presentata da

Sibilla Anticoli

**Introduzione ai topoi:
aspetti scientifici e didattici**

Relatore

Prof. Rosanna Cruciani

Nel loro libro “*Conceptual Mathematics. A first Introduction to Categories*” gli autori F.W. Lawvere e S.H. Schanuel presentano le nozioni fondamentali della teoria delle categorie rivolgendosi anche a coloro che non hanno ancora acquisito un’estesa conoscenza della matematica di base. C. Mangione così si esprime nella presentazione al libro: “Non è una specie di annacquato panorama divulgativo dello stato della matematica, quanto piuttosto un serio e rigoroso volume che richiede dal lettore attenzione e applicazione”.

La materia è presentata con cura e impegno didattici; la ricerca degli esempi che introducono le definizioni è fondata sulle conoscenze matematiche che si collezionano fin dall’infanzia per esperienza di vita, piuttosto che sulle nozioni acquisite in ambito scolastico. In effetti, i prerequisiti richiesti al lettore sono minimi; tuttavia è richiesto molto impegno e il volume può rappresentare una ottima via per giungere alla matematica superiore (in questo senso gli autori lo ritengono adatto non soltanto a studenti di scuola secondaria, ma anche a filosofi, informatici, linguisti, ...).

La teoria delle categorie è stata introdotta circa cinquanta anni fa e, secondo gli autori, “...da allora ha assunto un ruolo sempre più centrale in matematica, ha condotto in essa notevoli unificazioni e semplificazioni e si presenta con sempre maggior frequenza nelle applicazioni dalla matematica alla fisica, all’informatica, alla logica, alla linguistica ecc.. Si tratta insomma di una teoria estremamente potente e concettualmente molto ricca”.

A noi sembra che l’esposizione di Lawvere e Schanuel possa avere un buon successo a livello di scuola secondaria per quanto riguarda le prime parti, quelle che si riferiscono alla composizione di morfismi. Nasce invece qualche perplessità per quanto riguarda l’ultima parte concernente le proprietà più avanzate: l’esponenziazione, l’oggetto classificatore di sottoggetti e quindi la nozione di topos.

Nel libro è veramente lodevole l’impegno con cui si cerca di trasmettere l’aspetto concettuale di queste nozioni, tuttavia, gli autori proprio tenendo presente il livello dei discenti a cui si rivolgono, sono costretti a rinunciare

ad un'esposizione completa e rigorosa.

A noi sembra che il livello scolare adatto ad una tale esposizione e quindi alla comprensione approfondita di queste nozioni più avanzate, non possa essere inferiore a quello del primo biennio del corso di Laurea in Matematica.

In questa tesi ci siamo proposti lo scopo di presentare la nozione di topos a questo grado di scolarità. Abbiamo fondato quindi la nostra trattazione sul lavoro di Lawvere e Schanuel introducendo, per alcuni temi, dimostrazioni rigorose, esempi più avanzati, aspetti legati alla matematica di base universitaria.

Nel primo capitolo, vediamo inizialmente che gli insiemi costituiscono una *Categoria*, nel senso che abbiamo “oggetti”, gli insiemi stessi, e per ogni coppia di oggetti un insieme di “morfismi”, le funzioni; i morfismi si possono comporre e la composizione gode della proprietà associativa; inoltre per ogni oggetto A esiste un morfismo particolare, il morfismo identità 1_A da A ad A che verifica la legge: se f è un morfismo da A a B , $f \circ 1_A = f$ e $1_B \circ f = f$.

Da questo primo esempio arriviamo ad una definizione assiomatica di categoria.

In generale una categoria C comprende:

- 1) una collezione di cose chiamate C – oggetti
- 2) una collezione di cose chiamate morfismi di C o C -freccie;
- 3) delle operazioni che assegnano ad ogni C -freccia f un C -oggetto $\text{dom } f$ (il “dominio” di f) e un C -oggetto $\text{cod } f$ (il “codominio” di f). Se $a = \text{dom } f$ e $b = \text{cod } f$ si possono rappresentare nel seguente modo:

$$a \longrightarrow b \quad \text{o} \quad a \xrightarrow{f} b$$

- 4) una operazione che assegna ad ogni coppia (f, g) di C -freccie con $\text{dom } g = \text{cod } f$, una C -freccia $g \circ f$, la composizione di f e g , che avrà come dominio il dominio di f e come codominio il codominio di g .

*L'operazione di composizione gode della **Legge Associativa**:*

data la configurazione

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{s} c \xrightarrow{h} d$$

di C - oggetti e C -freccie allora abbiamo $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

5) ad ogni C -oggetto b viene assegnata una C -freccia $1_b : b \longrightarrow b$, chiamata identità su b , tale che:

Legge d'identità: Per ogni coppia di C -freccie $f : a \longrightarrow b$ e $g : b \longrightarrow c$ $1_b \circ f = f$ e $g \circ 1_b = g$.

Introduciamo così alcune semplici categorie: la categoria che ha soltanto un oggetto ed un'unica freccia, la categoria che ha due oggetti, tre morfismi, la categoria preordine e la categoria, associata ad un monoide, con un solo oggetto e una collezione infinita di morfismi; presentiamo poi categorie con una struttura più complessa quali: la categoria delle fibrazioni, la categoria degli endomorfismi di insiemi e la categoria dei grafi.

Una *fibrazione* di insiemi su I è essenzialmente una funzione con codominio I . Assegnato un insieme I , definiamo $F(I)$ la categoria delle fibrazioni su I , i cui oggetti sono le coppie (A, f) , con $f : A \rightarrow I$ funzione di insiemi e un morfismo tra due fibrazioni (A, f) e (B, g) è una funzione $k : A \rightarrow B$ tale che $g \circ k = f$; questo significa che se $f(x) = i$, per $x \in A$, allora $g(k(x)) = i$, cioè, posto $A_i = f^{-1}(i)$ e $B_i = g^{-1}(i)$, se $x \in A_i$, allora $k(x) \in B_i$:

FIGURA 1

Nella categoria degli *endomorfismi di insiemi* un oggetto è un sistema dinamico $X^{\leftarrow \alpha}$, cioè un insieme X con endofunzione α . X può essere inteso come l'insieme dei possibili stati di un sistema naturale o di una macchina e α come l'evoluzione naturale di tali stati nell'unità di tempo oppure come modificazione a seguito di un'azione esterna. Un semplice esempio di sistema dinamico è dato dall'azione di accendere e spegnere una lampadina.

Un sistema dinamico può essere rappresentato nel modo seguente:

FIGURA 2

Un morfismo

$$X \xleftarrow{\alpha} \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{\beta}$$

tra due oggetti è una funzione

$$X \xrightarrow{f} Y$$

che soddisfa: $f \circ \alpha = \beta \circ f$.

Nella categoria dei *grafi* un oggetto, cioè un grafo può essere descritto come un insieme di elementi chiamati *nodi* e un insieme di elementi chiamati *freccie*; per ogni freccia c'è un nodo di partenza e un nodo di arrivo;

FIGURA 3

In particolare un grafo consiste di una coppia di insiemi X e Y munita di una coppia di morfismi con lo stesso dominio X e codominio Y ;

$$\begin{array}{c} X \\ s \downarrow \quad \downarrow t \\ Y \end{array}$$

dove X è l'insieme delle freccie e Y l'insieme dei nodi del grafo. Se x è una freccia diremo che $s(x)$ è il punto di partenza di x e $t(x)$ il suo punto di arrivo.

Un morfismo, in questa categoria, manda nodi in nodi e frecce in frecce in modo che il nodo “partenza” di una freccia vada nel nodo “partenza” della freccia corrispondente e così per il nodo di “arrivo”. Più precisamente un morfismo tra due grafi

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow{t} \end{array} Y \quad e \quad X' \begin{array}{c} \xrightarrow{s'} \\ \xrightarrow{t'} \end{array} Y'$$

è una coppia di funzioni

$$f_x : X \rightarrow X' \quad e \quad f_y : Y \rightarrow Y'$$

tali che

$$s' \circ f_x = f_y \circ s \quad e \quad t' \circ f_x = f_y \circ t.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_x} & X' \\ s \downarrow \downarrow t & & s' \downarrow \downarrow t' \\ Y & \xrightarrow{f_y} & Y' \end{array}$$

Nel secondo capitolo introduciamo le proprietà “universali” dei morfismi; universali perchè descrivono la natura di un oggetto o di un morfismo in termini delle sue relazioni con tutti gli oggetti della categoria; esamineremo così diverse costruzioni di base della teoria degli insiemi e le riformuleremo nel linguaggio categoriale.

L’idea è che i concetti definiti guardando alla struttura “interna” di un insieme verranno caratterizzati “esternamente” dalle relazioni di connessione con gli altri insiemi; queste relazioni vengono stabilite per mezzo dei morfismi.

I morfismi iniettivi nella categoria degli insiemi sono precisamente quelli che godono della proprietà di “cancellabilità a sinistra” e tale proprietà da luogo alla definizione di *monomorfismo*:

*un morfismo $f : a \rightarrow b$ in una categoria C è detto **monomorfismo** in C se per ogni coppia $g, h : c \rightarrow a$ di C -morfismi, l’uguaglianza $f \circ g = f \circ h$ implica che $g = h$.*

Interpretiamo questa nozione nelle varie categorie introdotte; ad esempio nella categoria delle fibrazioni un morfismo $f : A \rightarrow B$ è un monomorfismo se per ogni indice i , $f_i : A_i \rightarrow B_i$ è un monomorfismo di insiemi.

Caratterizziamo in termini categoriali, cioè usando i morfismi, il prodotto cartesiano $A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \text{ e } y \in B\}$ di due insiemi A e B :
un prodotto in una categoria C di due oggetti a e b è un C -oggetto $a \times b$ insieme ad una coppia $(pr_a : a \times b \rightarrow a, pr_b : a \times b \rightarrow b)$ di C -morfismi tali che per ogni coppia di C -morfismi della forma $f : c \rightarrow a, g : c \rightarrow b$, esiste esattamente un morfismo $\langle f, g \rangle : c \rightarrow a \times b$ tale che $pr_a \circ \langle f, g \rangle = f$ e $pr_b \circ \langle f, g \rangle = g$.

Il prodotto è unico a meno di isomorfismi. Il prodotto di due fibrazioni è una fibrazione di prodotti nella categoria degli insiemi e il prodotto, nella categoria dei sistemi dinamici, di due insiemi dinamici $X^{\leftarrow\alpha}$ e $Y^{\leftarrow\beta}$, è un sistema dinamico $P^{\leftarrow\gamma}$, dove P è il prodotto di X e Y in Ins e $\gamma(a, b) = (\alpha(a), \beta(b))$ per ogni $a \in A, b \in B$.

Molte definizioni di oggetti o morfismi in una categoria possono essere “dualizzate” invertendo le frecce nella definizione formale. Ad esempio la nozione duale di monomorfismo è quella di *epimorfismo* (suriezione degli insiemi) e la nozione duale di prodotto è quella di somma.

Data una coppia $f, g : A \rightarrow B$ di funzioni parallele, in Ins , sia E il sottoinsieme di A negli elementi del quale f e g assumono lo stesso valore, cioè $E = \{x : x \in A \text{ e } f(x) = g(x)\}$ la funzione di inclusione $i : E \rightarrow A$ è chiamata *equalizzatore* di f e g .

In generale per una qualunque categoria C abbiamo la seguente definizione:

Un morfismo $i : e \rightarrow a$ in C è un'applicazione di una coppia $f, g : a \rightarrow b$ di C -morfismi se

1. $f \circ i = g \circ i$
2. *Dato un morfismo $h : c \rightarrow a$ tale che $f \circ h = g \circ h$ esiste uno ed un solo morfismo $k : c \rightarrow e$ tale che $i \circ k = h$*

Tutti gli equalizzatori sono morfismi; l'inverso della proposizione non è vero per tutte le categorie.

Per caratterizzare B^A , l'insieme delle funzioni aventi come dominio un insieme A e come codominio un insieme B , nel linguaggio categoriale, osserviamo che associato con B^A c'è un morfismo speciale, morfismo valutazione, che gode di una proprietà universale tra tutte le funzioni di insiemi del tipo $C \times A \xrightarrow{g} B$. In generale, allora diciamo che:

una categoria C ha l'esponenziale se ha un prodotto per due qualsiasi oggetti, e se per qualsiasi oggetto dato a e b esiste un oggetto b^a e un morfismo $ev : b^a \times a \rightarrow b$, chiamato valutazione, tale che per ogni oggetto c e morfismo $g : c \times a \rightarrow b$, c'è un'unica freccia $\hat{g} : c \rightarrow b^a$ tale che $ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$.

In $F(I)$, la categoria delle fibrazioni, date le fibrazioni $f : A \rightarrow I$ e $g : B \rightarrow I$ otteniamo il loro esponenziale come fascio di esponenziali $B_i^{A_i}$.

Nella categoria degli insiemi se abbiamo una parte A di un insieme X e un elemento x , esistono soltanto due possibili valori di verità per la proposizione “ x appartiene ad A ”, o è vera o è falsa; perciò se consideriamo l'insieme 2 con due elementi, che *vero* e *falso*, questo può essere considerato “classificatore di sottoggetti” nel senso che per qualunque sottoinsieme A di X esiste esattamente una funzione $\chi_A : X \rightarrow 2$, la funzione caratteristica di A tale che x appartiene ad A se e solo se $\chi_A(x) = \textit{vero}$.

Tutto ciò si può esprimere con il linguaggio delle categorie:
se C è una categoria con un oggetto terminale 1 , allora un classificatore di sottoggetti per C è un C -morfismo vero $1 \rightarrow \Omega$ che soddisfa la seguente proprietà:

Ω -Assioma. *Per ciascun monomorfismo $f : a \rightarrow d$ c'è uno ed un solo C -morfismo $\chi_a : d \rightarrow \Omega$ tale che il seguente diagramma è un pullback*

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & d \\ \downarrow ! & & \downarrow \chi_a \\ 1 & \xrightarrow{\textit{vero}} & \Omega \end{array}$$

Possiamo quindi considerare la nozione di oggetto classificatore di sottoggetti in altre categorie.

Vediamo, inoltre, come queste semplici nozioni conducono ad una logica nella quale esistono molti valori di verità e nel caso di sistemi dinamici addirittura infiniti valori di verità.

Assegnare una parte di un oggetto X nella categoria dei grafi (cioè un sottografo di un grafo X) consiste nel dare una parte S_A dell'insieme delle frecce di X e una parte S_D dell'insieme dei nodi di X in modo che la partenza e l'arrivo di ogni freccia di S_A sia un nodo di S_D . Ora vorremmo un grafo che assuma tra i grafi lo stesso ruolo che 2 assumeva tra gli insiemi. Cerchiamo un grafo Ω con un punto privilegiato $1 \xrightarrow{\text{vero}} \Omega$ che soddisfi la seguente proprietà: i morfismi da un qualunque grafo a Ω corrispondono alle parti S di X , in modo che per ogni figura $T \xrightarrow{x} X$ di X , $\chi_s(x) = \text{vero}_T$ se e solo se x è incluso nella parte S . Questo grafo esiste ed è il seguente $1 \xrightarrow{\text{vero}} \Omega$

FIGURA 4

Per i nodi la situazione è del tutto simile a quella degli insiemi, o un nodo appartiene o non appartiene al sottografo ma un grafo ha una struttura più ricca, dobbiamo tener conto delle frecce ed è chiaro che sarebbe riduttivo limitare a due soli valori di verità l'appartenenza delle frecce al sottografo. Ad esempio ecco il morfismo caratteristico del sottografo indicato in figura

FIGURA 5

definito sulle frecce da $\phi_s(x) = \phi_s(y) = \text{vero}$, $\phi_s(z) = r$, $\phi_s(u) = n$, $\phi_s(v) = m$, $\phi_s(p) = f$ e $\phi_s(q) = f$.

Anche la categoria dei sistemi dinamici ha un oggetto valori di verità Ω ed è sorprendente perché ha un numero infinito di “*valori di verità*”. tuttavia esso non è uguale all’insieme dei numeri naturali con l’endomorfismo successivo, piuttosto è il suo opposto nel senso che la dinamica va in direzione opposta.

Nella figura seguente è rappresentato un sottoggetto di un sistema dinamico:

FIGURA 6

gli elementi **a** e **b** non appartengono al soggetto ma **b** lo sarà fra un passo e **a** fra due passi; per **d** non ci sono possibilità, non entrerà mai nel soggetto; ad esempio (è un argomento di grande attualità) possiamo domandare ad una persona se è in pensione; la risposta potrebbe essere no ma ci andrò l’anno prossimo; ben diversa è la situazione di chi non è in pensione ma lo sarà fra dieci anni oppure di chi, per qualche ragione, non percepirà mai una pensione. Ora, così come nella categoria degli insiemi l’insieme con due elementi descriveva l’appartenenza al sottoinsieme mediante i due valori di verità, vero o falso, si comprende come l’oggetto classificatore dei sottoggetti nella categoria dei sistemi dinamici debba avere la seguente struttura:

FIGURA 7

abbiamo un insieme numerabile di stati che finiscono per trasformarsi nello stato di equilibrio 0 più uno stato di equilibrio isolato; la funzione carat-

teristica del sottoggetto S di X manda gli elementi contenuti in S in 0 e le frecce che li congiungono nel coppia indicato nella figura, diciamo il coppia vero; \mathbf{b} va in 1 perché entrerà in S dopo un passo, così \mathbf{a} è mandato dalla funzione caratteristica in 2 perché entrerà in S dopo due passi e chiaramente dobbiamo avere infiniti elementi dell'oggetto Ω ; \mathbf{d} e tutti gli elementi che non entreranno mai in S vanno nell'elemento denotato "infinito" e le frecce che li congiungono nel coppia falso; così si descrivono le proprietà degli stati del sottoggetto, proprietà che non sono perdute nell'applicare l'endomorfismo ed inoltre si dà la risposta alla domanda: quanti passi sono necessari perché la proprietà diventi vera? La risposta è uno stato di Ω .

Infine diamo la definizione di *Topos* e un cenno del fatto che in ogni topos, nell'insieme dei sottoggetti di un oggetto, possiamo definire le operazioni logiche $\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg$. Con queste operazioni si ottiene una logica non booleana poiché in essa non vale l'uguaglianza: $\neg\neg A = A$.

Bibliografia

- [1] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra*, Cambridge University Press, 1994
- [2] P. Freyd, *Aspect of topoi*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1972
- [3] R. Goldblatt, *Topoi. the categorial analysis of logic*, North Holland Pub. Comp., 1979
- [4] F.W. Lawvere, S.H. Schanuel, *Teoria delle categorie: un'introduzione alla matematica*, F. Muzzio, 1994
- [5] F.W. Lawvere, S.H. Schanuel, *Conceptual Mathematics. A first introduction to categories*, Cambridge University Press, 1997.