UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della
Tesi di Laurea in Matematica
di

Alfonso Sorrentino

Sulle soluzioni quasi-periodiche di sistemi hamiltoniani differenziabili

Relatore

Prof. Luigi Chierchia

ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
Febbraio 2003

Parole chiave : Sistemi hamiltoniani quasi-integrabili, Teoria KAM (caso analitico e differenziabile), Tecniche di regolarizzazione, Teorema KAM isoenergetico (caso analitico e differenziabile), Tori parzialmente iperbolici.
Classificazione AMS : 34C27, 34C30, 37D10, 37D30, 37J40, 41A17, 70H08, 70H12, 70K43.

Alfonso Sorrentino è nato a Roma il 27 Novembre 1979.
Nell'anno accademico 1998-99 si è immatricolato al Corso di Laurea in matematica presso l'Università degli Studi ROMA TRE.
E' risultato vincitore della borsa di studio erogata dall'A.D.I.S.U. negli anni accademici 1998-99, 1999-00, 2000-01 e 2001-02 ed ha collaborato (e sta ancora collaborando) in qualità di *Tutore Senior* alla didattica dei seguenti corsi:

- AM3 (Prof. Luigi Chierchia), a.a. 2000-01
- AM4 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2000-01
- AM3 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2001-02
- AM4 (Prof. Luigi Chierchia), a.a. 2001-02
- AC1 (Prof. Laura Geatti), a.a. 2001-02
- AM4 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2002-03
- AM3 (Prof. Luigi Chierchia), a.a. 2002-03
- AC1 (Prof. Ugo Bessi), a.a. 2002-03.

Ha inoltre collaborato nell'anno accademico 2001-02 alla realizzazione di problemi e soluzioni per la prova finale di tipo B, prevista dalla laurea triennale in matematica.
Nell'estate 2002 ha usufruito di una borsa di studio (concessa dall'Università degli studi ROMA TRE per la frequenza di scuole estive extra-curriculari) per frequentare un corso di *Academic English (advanced level)* presso la *Boston University.*
Ha superato la prova di qualificazione richiesta per accedere all'esame di laurea, presentando le seguenti tesine:

- "*Trasformata di Fourier e sue applicazioni* " (Tesina discussa)
- "*Disuguaglianza isoperimetrica nel piano*".

A l'alta fantasia qui mancò possa;
ma già volgeva il mio disio e 'l velle,
sì come rota ch'igualmente è mossa,
l'amor che move il sole e l'altre stelle.
(Dante, Pd XXXIII 142-145)

Una delle prime *regolarità* presenti in natura a meravigliare ed incuriosire il genere umano è stata sicuramente il moto dei corpi celesti, dal sorgere quotidiano del Sole, al mutare mensile delle fasi lunari. Osservando il cielo più attentamente l'uomo riuscì ad individuare dei comportamenti regolari anche nel moto degli altri 5 pianeti conosciuti fin dalle epoche più remote e a costruire elaborati metodi per prevederne la posizione futura. Questi metodi erano essenzialmente empirici e legavano i moti di tali pianeti a delle "*funzioni*" che, attraverso degli opportuni calcoli, erano in grado di restituire le informazioni richieste.
L'astronomia pian piano sviluppò metodi sempre più sofisticati che meglio si accordavano alle osservazioni sperimentali. Fu proprio questa maggiore conoscenza del mondo celeste che portò a nuovi e interessanti interrogativi: cominciò a maturare la convinzione di una possibile vulnerabilità (frutto di una sempre maggiore coscienza di una *non-centralità* della Terra all'interno del più grande sistema solare) e ben presto ci si cominciò a porre pressanti interrogativi che contribuirono a *catalizzare* la ricerca di mezzi e modi per escludere i fantasmi delle prospettive più catastrofiche. Quando precise osservazioni astronomiche misero in evidenza una non perfetta regolarità e periodicità dei moti della Terra e degli altri pianeti, la domanda che sorse spontanea fu: manterremo sempre la nostra orbita intorno al Sole? C'è il rischio in un futuro - speriamo non troppo prossimo - di ritrovarci lontano dall'attuale posizione nell'universo e dal sistema solare? Quale destino attende il nostro pianeta?
Fu la ricchezza di tali interrogativi e la scarsità di risposte che portò i matematici a sviluppare tecniche e nozioni che stanno alla base della "*teoria dei sistemi dinamici*", quali ad esempio il concetto di *stabilità*, un concetto fondamentale nello studio della natura.

Ma il sistema solare è stabile? Propriamente parlando, la risposta è ancora sconosciuta, ma tale interrogativo ha portato a profondi risultati che probabilmente sono molto più importanti della domanda originale (Jürgen Moser).

Come non condividere il giudizio di Moser? E' proprio la ricchezza di problematiche e prospettive presentata da tale domanda, che ha contribuito a sviluppare teorie e tecniche che stanno alla base della moderna teoria dei sistemi dinamici.

Da un punto di vista matematico il sistema solare può essere modellato come

un sistema a 10 corpi[1] - di cui una grande massa M (quella del Sole) e 9 masse minori (quelle dei pianeti) m_1, $m_2, \ldots$, m_9 - sottoposti alla loro reciproca attrazione gravitazionale.[2] Se ci limitiamo a considerare due corpi, il principio di gravitazione universale di Newton afferma che la forza agente su ciascun corpo è direttamente proporzionale al prodotto delle masse ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza dei loro centri, ed inoltre tale forza agisce lungo la congiungente tali centri. Una prima formulazione matematica completa di questo risultato apparve nel famoso *Principia* di Newton. Un fatto che Newton assunse inizialmente vero, era che i corpi celesti potessero essere schematizzati come masse puntiformi: cioè l'attrazione gravitazionale agisce su tali corpi (ritenuti dei solidi sferici) esattamente come se tutta la loro massa fosse concentrata nel loro centro (*centro di massa*). Newton sviluppò tutta la sua teoria su tale assunzione e, prima della pubblicazione, realizzò che necessitava di una giustificazione (infatti è tutt'altro che banale!) e fu proprio la ricerca di una dimostrazione matematica rigorosa di tale fatto a ritardarne la pubblicazione.
Se ci limitiamo a considerare l'interazione di un singolo pianeta con il Sole (*problema dei* 2 *corpi* o *problema di Keplero*), trascurando cioè l'attrazione gravitazionale esercitata dagli altri pianeti, le equazioni differenziali che vengono coinvolte sono abbastanza semplici da risolvere. Quello che si dimostra è che l'orbita seguita da uno dei corpi rispetto all'altro (cioè in un sistema di riferimento in cui quest'ultimo stia in quiete) è rappresentata da un'ellisse.
Cosa possiamo dire nel caso generale? Poichè la massa dei pianeti è circa la millesima parte della massa del Sole, in prima approssimazione potremmo trascurare la loro interazione e tener conto solo dell'attrazione esercitata su di essi da parte del Sole. Si ottiene così un problema esattamente integrabile, in cui ogni pianeta, indipendentemente dagli altri, descriverà la sua ellisse kepleriana. Indicando con ω_k le frequenze orbitali di rivoluzione del pianeta m_k intorno al Sole, il moto globale del sistema non sarà in generale periodico, ma *quasi-periodico*. Questo significa che può essere rappresentato attraverso una serie trigonometrica della forma

$$\sum_{j=(j_1,\ldots,j_9)\in\mathbb{Z}^9} c_j e^{2\pi i(j\cdot\omega)t} \tag{1}$$

dove $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_9)$.
La domanda cruciale sorge nel momento in cui passiamo a considerare l'inte-

[1] Ultimamente c'è stato l'annuncio di una delle più importanti scoperte degli ultimi 70 anni riguardante il sistema solare: un nuovo oggetto (il decimo pianeta?) dal diametro un decimo di quello terrestre è stato scoperto nella Fascia di Edgeworth-Kuiper. Quaoar (questo il nome proposto per questo corpo celeste) fa un giro intorno al sole in 288 anni terrestri ed è 1250 km di diametro, quindi tutt'altro che trascurabile.

[2] Stiamo trascurando degli effetti *non conservativi* piccoli, non considerati dalle equazioni di Newton, ma che possono far risentire fortemente gli effetti della loro presenza su tempi sufficientemente lunghi (dell'ordine di miliardi di anni)

razione reciproca fra i vari pianeti: *continuano ad esistere tali moti regolari (quasi-periodici) per piccoli valori positivi di* $m_1, \ldots, m_9$*?*
Purtroppo, a differenza del caso a 2 corpi, tale problema (e più in generale il problema ad n corpi, con $n > 2$) non può essere risolto completamente, fatto tutt'altro che banale, per la cui dimostrazione bisognerà attendere alcuni secoli. Nel frattempo finì col diventare un interessante argomento di conversazione tra la mondanità dei salotti parigini, eccitando l'attenzione e l'interesse di personaggi come Voltaire.
Molti dei più grandi matematici del XVIII e del XIX secolo cercarono di risolverlo, senza alcun esito positivo, anche se è indiscutibile il prezioso contributo che i loro tentativi ed approcci diedero alla moderna teoria delle equazioni differenziali.
Osserviamo che tale problema può essere affrontato da un altro punto di vista: può essere considerato come una perturbazione del sistema integrabile sopra discusso (i.e. con i pianeti non interagenti tra loro). Si apre la strada quindi ad un nuovo approccio: la teoria delle perturbazioni. Malgrado gli sforzi di generazioni di matematici illustri (Lagrange, Laplace, Weierstrass e soprattutto Poincaré, che a buon diritto può essere considerato il padre della teoria moderna) fino a tempi recenti la maggiorparte delle tecniche perturbative impiegate restavano prive di una giustificazione rigorosa. La particolarità di questi metodi, infatti, è che essi conducono a delle serie divergenti. Il motivo della divergenza di queste serie sono i cosiddetti *piccoli divisori* (anche detti *piccoli denominatori*): combinazioni lineari intere di frequenze dei moti non perturbati, che compaiono come denominatori nel calcolo dell'influenza delle perturbazioni. Infatti, il formalismo analitico che conduce alla soluzione (1) fallisce se le frequenze $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_9)$ sono in *risonanza* - cioè esiste un vettore intero $j = (j_1, \ldots, j_9)$ tale che $j \cdot \omega = 0$ - in quanto tale espressione compare al denominatore nei coefficienti c_j. Ci sono diverse configurazioni nel sistema solare le cui frequenza orbitali di rivoluzione sono in risonanza: per esempio nel caso di Giove e Saturno si ha che (indicando con ω_G la frequenza di Giove e con ω_S quella di Saturno) $5\omega_S - 2\omega_G \simeq 0$, cioè 5 giri di Giove sono accompagnati da 2 si Saturno[3]; nel caso di Urano e Nettuno il rapporto tra le rispettive frequenze è circa 2, mentre nel caso Giove, Marte e Terra l'espressione $3\omega_G - 8\omega_M + 4\omega_T$ è circa zero.
Quindi bisognerà assumere che le frequenze siano *non risonanti*. Anche in questo caso quando $j = (j_1, \ldots, j_9)$ varia su tutti gli interi, l'espressione $j \cdot \omega$ può diventare arbitrariamente vicina a zero: questo spiega l'espressione *piccoli divisori*. La comparsa di questi termini sembra allontanare ogni speranza di convergenza per la serie in (1).
La difficoltà indicata non è caratteristica solo dei problemi della meccanica cele-

[3]Ciò conduce ad una grande perturbazione reciproca di questi pianeti, con periodo lungo (il suo periodo è di circa 800 anni); lo studio da parte di Laplace di questo effetto è stato uno dei primi successi della teoria delle perturbazioni.

ste, ma di tutti i problemi vicini a problemi integrabili (per esempio, il problema del moto di una trottola pesante asimmetrica in rotazione rapida). La questione di fornire una dimostrazione della convergenza (o della non convergenza) delle serie perturbative impiegate, non è una pura necessità matematica, ma al contrario nasce dalla necessità di comprendere in profondità i domini di applicazione e i limiti di applicabilità delle tecniche perturbative ai problemi della fisica.

Incurante di tali difficoltà, Weierstrass tentò di dimostrare la convergenza di tali serie. La sua speranza di superare il problema dei piccoli divisori era basata in gran parte su un osservazione fatta da Dirichlet a Kronecker nel 1858 relativamente a un metodo di approssimazione successiva del problema degli n-corpi. Sfortunatamente Dirichlet morì presto senza lasciare alcuna nota di tale metodo. Weierstrass interpretò tale osservazione come una possibilità di convergenza per tali serie. Dopo molti tentativi privi di successo, egli suggerì tale problema al matematico svedese Gösta Mittag-Leffler; quest'ultimo convinse il re Oscar II di Svezia e Norvegia ad offrire un premio al risolutore, in occasione del suo 60mo compleanno. Una giuria internazionale (composta da Karl Weierstrass, Charles Hermite e Mittag-Leffler stesso) giudicò vincitore il lavoro di Poincaré: *Sur le problém des trois corps et les équations de la dynamique.* In realtà egli non fornì una soluzione al problema posto, ma provò che non era possibile integrare analiticamente le equazioni di Newton in tale caso. In particolare, studiando il problema dei tre corpi, si trovò ad affrontare la questione delle *orbite doppiamente asintotiche* (dette oggi *orbite omocline)* che lo portarono, per primo, ad imbattersi in una dinamica molto complicata. Egli scoprì, con questi studi, il cosiddetto *caos deterministico*, rendendosi conto che, nella dinamica delle soluzioni doppiamente asintotiche, era sufficiente una piccolissima perturbazione o una minima variazione delle condizioni iniziali per rendere imprevedibile l'evoluzione futura del sistema:[4] "*On sera frappé de la complexité de cette figure que je ne cherche meme pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème de trois corps...*"

Questi risultati causarono la perplessità di molti matematici circa la stabilità del sistema solare. Lo stesso Poincaré osservò che la presenza delle risonanze tra le frequenze era un forte segno della non esistenza di moti quasi periodici, cioè della divergenza della serie in (1): "*...nonostante ciò tali argomentazioni non sono sufficienti a fornire una dimostrazione rigorosa di tale fatto*".
Lo *status* del problema della stabilità del sistema solare alla fine del XIX secolo fu ben raffigurato da Poincaré in suo articolo del 1898:

"Le persone che sono interessate ai progressi della meccanica celeste

[4]Trad.: "Saremmo stupefatti della complessità di questa figura che non cerco neanche di disegnare. Nulla è meglio per darci un'idea della complicatezza del problema di 3 corpi."

> [...] *rimarrano sorprese nel vedere quante volte è stata dimostrata la stabilità del sistema solare. Lagrange l'ha stabilita per primo. Poisson l'ha dimostrata di nuovo e molte dimostrazioni sono pervenute da allora e continueranno ad arrivare. Erano le vecchie dimostrazioni insufficienti o sono le nuove superflue? La sorpresa di queste persone potrebbe addirittura raddoppiare, se dicessi loro che un giorno - forse - un matematico potrebbe mostrare, con argomentazioni rigorose, che il sistema solare è instabile. Questo potrebbe veramente accadere; non ci sarebbe niente di contraddittorio e le vecchie dimostrazioni conserverebbero il loro valore. La verità è che queste sono soltanto delle successive approssimazioni: cioè non pretendono di limitare in maniera rigorosa le orbite tra stretti confini da cui non è possibile più fuggire."*
>
> [H. Poincaré, *Sur la stabilité du système solaire*, 1898]

Sottolineiamo che, con il suo celeberrimo lavoro [52], Poincaré segnò l'inizio della teoria dei sistemi dinamici in senso moderno, sviluppando metodi qualitativi, topologici, probabilistici e globali per una loro analisi e guardando l'intero spazio delle fasi come un oggetto geometrico, spostando quindi l'attenzione allo studio delle cosiddette *varietà invarianti* (cioè varietà nello spazio delle fasi, che sono invarianti per l'azione del flusso del sistema). In particolare, egli riconobbe nello studio dei sistemi hamiltoniani[5] *quasi-integrabili* (cioè piccole perturbazioni di sistemi integrabili) il *problema fondamentale della dinamica* (lo studio di questo problema ha oggigiorno un grande interesse in molti campi della matematica, quali PDE, teoria ergodica, geometria differenziale etc...).

Da Poincaré in poi, fu generalmente accettato che, con poche ma notevoli eccezioni (quali problemi a una dimensione, moto di un punto di un campo centrale, moto euleriano e lagrangiano del corpo rigido, problema di due centri fissi, moto lungo una geodetica di un ellissoide), le soluzioni di un sistema dinamico non lineare non potessero essere trovate esplicitamente e di conseguenza una maggiore attenzione fu rivolta allo studio qualitativo del sistema. Tuttavia, per mezzo di questi casi integrabili, si può ottenere un'informazione piuttosto significativa sul moto di numerosi sistemi importanti, considerando il problema integrabile come una prima approssimazione.

[5] La nozione di *sistema hamiltoniano* (o *equazioni della dinamica*, usando la terminologia usata da Poincaré nel suo lavoro) è di fondamentale importanza nello studio della dinamica e della meccanica in generale. In realtà il nome "*hamiltoniano*" non è storicamente corretto, in quanto equazioni della stessa forma erano già state considerate da Lagrange e Poisson molti anni prima di Hamilton.

Un significativo passo in avanti si ebbe con la scoperta di Kolmogorov (1954) di un *grande* insieme di moti stabili (*quasi-periodici*) per sistemi hamiltoniani di tipo abbastanza generale (i sistemi quasi-integrabili non degeneri): l'insieme dei tori riempiti da tali orbite è generalmente molto complicato, tipicamente un insieme di Cantor con misura di Lebesgue positiva. Più grossolanamente, tale teorema afferma che la maggiorparte dei moti imperturbati con frequenze *sufficientemente irrazionali*[6] rimangono stabili sotto l'effetto di perturbazioni sufficientemente piccole (modulo opportune condizioni di non degenerazione[7] per il sistema imperturbato).
Tale lavoro era destinato a rivoluzionare completamente il punto di vista nella teoria generale dei sistemi dinamici, portando alla nascita e allo sviluppo di un nuovo approccio per lo studio di tali problemi: la teoria KAM, sviluppatasi principalmente sulle idee e sul lavoro di Kolmogorov, Arnol'd e Moser (da cui l'acronimo KAM) e successivamente ramificatasi in vari ambiti di ricerca.
Una delle caratteristiche peculiari di questo nuovo approccio, è la costruzione di un algoritmo iterativo convergente molto rapidamente (ispirato al metodo delle tangenti di Newton per la ricerca delle soluzioni di un'equazione algebrica). Una convergenza veloce è un fatto di straordinaria importanza per la riuscita di tale metodo, in quanto permette di neutralizzare l'influenza dei suddetti *piccoli denominatori*: assumendo delle opportune condizioni di regolarità per i termini perturbativi, anche i *numeratori* decrescono sufficientemente e quindi si può provare la convergenza della serie.

Questo teorema fornisce quindi un grande insieme di soluzioni stabili che rimangono *eternamente* vicine ai moti regolari e ordinati del sistema imperturbato. Purtroppo tale insieme forma un insieme sconnesso con *gaps* ovunque: un cambiamento assai piccolo delle condizioni iniziali può cambiare sostanzialmente il comportamento della soluzione, lasciando spazio alla possibile esistenza di traiettorie caotiche che si *allontanano* nello spazio delle fasi; questo fenomeno, la cui esistenza è stata mostrata da Arnol'd nel 1964 per un modello speciale, è chiamato "*diffusione di Arnol'd*". Inoltre, proprio per la complessità dell'insieme dei tori conservati è impossibile stabilire con assoluta precisione se un dato iniziale si trova o no su uno di tali tori.
Nonostante ciò è innegabile l'importanza di tale risultato, che ha aperto la strada a tutta una serie di metodi e prospettive che hanno cambiato radicalmente

[6]Tali frequenze ω, che chiameremo (γ,τ)-*diofantine*, soddisfano la seguente condizione:

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

[7]Non entreremo, in questa fase introduttiva, nei dettagli di tali condizioni. Analizzeremo in seguito due diverse condizioni di non degenerazione: *standard* e *isoenergetica*, che ci condurranno a risultati diversi per quanto riguarda l'insieme dei tori (i.e. moti quasi periodici) conservati.

il quadro moderno dei sistemi dinamici. Basti pensare - oltre all'applicazione delle tecniche KAM a vari ambiti di ricerca quali PDE, teoria ergodica, geometria differenziale etc... - a nuove teorie sviluppatesi a partire da tali risultati, quali la teoria di Nekhoroshev (cfr. [51] e [55]), la conservazione dei tori non massimali, cioè corrispondenti a frequenze risonanti (cfr. [35], [39] e [66]), la problematica (ancora aperta) associata alla diffusione di Arnol'd (cfr. [5], [9], [8] [10] [18], [22], [31], [32], [43], [68] e [70]), etc...

Risultati principali e schema della tesi

Lo scopo di questa tesi di laurea è quello di rivisitare ed estendere tali risultati, sia nel caso analitico che in quello differenziabile. In particolare abbiamo perseguito i seguenti obiettivi:

(i) CASO ANALITICO:
fornire una presentazione *auto-contenuta* dei principali risultati della teoria KAM nella classe delle hamiltoniane analitiche, seguendo principalmente le linee guida sviluppate da Kolmogorov nel suo lavoro [40] e riprese da Salamon in [60];

(ii) CASO DIFFERENZIABILE:
estendere i risultati ottenuti alla classe delle hamiltoniane sufficientemente differenziabili, utilizzando una tecnica di approssimazione sviluppata nei lavori di Jackson, Moser, Zehnder e Bernstein e cercando di dare particolare enfasi alla ricerca delle condizioni ottimali di regolarità da richiedere alla hamiltoniana.
In tale contesto è stato colmato un "gap" nella dimostrazione presentata nel lavoro di Salamon [60];

(iii) CASO ISOENERGETICO (ANALITICO E DIFFERENZIABILE):
adattare le tecniche utilizzate nel *caso standard*, per dimostrare dei risultati analoghi per il *caso isoenergetico*, cioè la conservazione dei tori corrispondenti a valori di energia fissata. Questi risultati sono molto più significativi dal punto di vista della stabilità del sistema, in quanto ci assicureranno - su ciascun livello energetico - la conservazione di una famiglia di tori invarianti. Il risultato nel caso isoenergetico differenziabile è nuovo;

(iv) TORI PARZIALMENTE IPERBOLICI:
rivisitare ed estendere la teoria di Fenichel per le *varietà invarianti normalmente iperboliche* (cfr. [28] e [69]) nel caso hamiltoniano, per dimostrare la conservazione dei tori parzialmente iperbolici di sistemi hamiltoniani sufficientemente differenziabili e dei loro *baffi stabili* e *instabili*. In particolare

abbiamo esteso tali risultati anche al caso isoenergetico, dimostrando la conservazione dei tori parzialmente iperbolici corrispondenti ad un fissato livello d'energia. Il risultato nel caso isoenergetico differenziabile è nuovo.

Cerchiamo di descrivere più dettagliatamente il lavoro svolto.

Capitolo 1 - Introduzione alla teoria KAM

In questo primo capitolo, dopo aver brevemente introdotto alcuni risultati preliminari (quali la natura topologica dei moti lineari su un toro in relazione alle proprietà aritmetiche della loro frequenza, i vettori diofantini e le loro proprietà, i concetti fondamentali della meccanica hamiltoniana e della struttura simplettica dello spazio delle fasi) analizzeremo la *geometria* dei sistemi integrabili, cioè mostreremo la foliazione dello spazio delle fasi in tori invarianti. La domanda spontanea che ci si pone (e che conduce alle interessanti problematiche analizzate dalla teoria KAM) è la seguente: come cambia tale geometria se perturbiamo leggermente il nostro sistema (cioè consideriamo i cosiddetti sistemi quasi-integrabili)? Il teorema di Kolmogorov (1954) - che in questa prima fase enunceremo soltanto in una forma qualitativa - fornirà una risposta a tale interrogativo: *sotto opportune ipotesi di non degenerazione per il sistema imperturbato e di piccolezza per la taglia della perturbazione, la maggioranza dei tori non risonanti non viene distrutta, ma si deforma leggermente.*
Tale risultato verrà discusso ampiamente nei capitoli successivi, sia nel caso analitico che differenziabile. Concluderemo il capitolo esponendo - in forma *divulgativa* - alcuni sviluppi e prospettive aperte da tali risultati, connessi al problema della stabilità e della instabilità dei sistemi quasi-integrabili. In particolare introdurremo la *teoria di Nekhoroshev* (cioè la stabilità su periodi esponenzialmente lunghi delle variabili di azioni di sistemi hamiltoniani che soddisfano delle opportune condizioni di *trasversalità*, dette *steepness conditions*) e un affascinante fenomeno (la cui esistenza fu provata da Arnol'd nel 1964 per un modello speciale) noto come *diffusione di Arnold* (cioè il possibile comportamento caotico delle orbite che originariamente giacevano sui tori distrutti dalla perturbazione).

Capitolo 2 - Teorema KAM: caso analitico (schema di Kolmogorov, versione di Salamon)

In questo capitolo dimostreremo una *versione quantitativa* del teorema KAM nel caso analitico, cioè la persistenza dei tori diofantini sotto opportune condizioni di non degenerazione della hamiltoniana.
Il risultato principale che dimostreremo è il seguente:

Teorema 1. (Kolmogorov, Arnol'd, Moser)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$ *e* $M \geq 1$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che

$$c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$$

e che valga quanto segue.
Sia $H(x,y)$ *una hamiltoniana reale analitica nella striscia*

$$\Sigma_r \equiv \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r,\ |y| \leq r\,\}$$

con $0 < r \leq 1$, *periodica di periodo* 1 *nelle componenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *e tale da soddisfare le seguenti condizioni per* $(x,y) \in \Sigma_r$ *e per un qualche* $\delta \leq \delta^*$*:*[8]

$$\begin{aligned}
&|H(x,0) - \langle H(\cdot,0)\rangle| \leq \delta r^{2\tau+2}\\
&|H_y(x,0) - \omega| \leq \delta r^{\tau+1}\\
&|H_{yy}(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M}
\end{aligned}$$

dove $Q(x,y) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *è una matrice simmetrica (non necessariamente analitica) nella striscia* Σ_r, *tale che*

$$|Q(x,y)| \leq M \qquad e \qquad \left|\langle Q(\,\cdot\,,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,.$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ *(dove* $z = (x,y)$ *e* $\zeta = (\xi, \eta)$*), dalla striscia* $\Sigma_{\theta r}$ *nella striscia* Σ_r, *della forma:*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + \left(u_\xi^T(\xi)\right)^{-1}\eta \end{cases}$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *entrambe periodiche di periodo* 1 *e tale che la hamiltoniana trasformata* $K = H \circ \phi$ *soddisfi*

$$K_\xi(\xi, 0) = 0, \quad K_\eta(\xi, 0) = \omega\,.$$

[8] Data una funzione

$$f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$$

denoteremo con $\langle f(\cdot)\rangle$ la sua media su $\mathbb{T}^n$, cioè:

$$\langle f(\cdot)\rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f(x)\, dx\,.$$

Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r}$*:*

$$\begin{aligned}
&|\phi(\zeta)-\zeta| \le \frac{c\delta}{30M^3}(1-\theta)r\\
&|\phi_\zeta(\zeta)-\mathbb{I}| \le \frac{c\delta}{15M^3}\\
&|K_{\eta\eta}(\zeta)-Q(\zeta)| \le \frac{c\delta}{2M}\\
&|v\circ u^{-1}(x)| \le \frac{c\delta}{15M^3}r^{\tau+1}\,.
\end{aligned}$$

Il teorema precedente ci fornisce quindi una soluzione quasi-periodica vicina al toro (non invariante) $\mathbb{T}^n \times \{0\}$, che viene preso come "*soluzione approssimata iniziale*". Tale soluzione è data da:

$$\begin{cases} x(t) = u(\omega t)\\ y(t) = v(\omega t)\,. \end{cases}$$

Osserviamo come il risultato dimostrato sia fortemente *quantitativo*, nel senso che comprende tutta una serie di stime che risulteranno necessarie per applicare tale teorema per la dimostrazione del caso differenziabile.
Questo contesto è più generale del caso di un sistema hamiltoniano quasi-integrabile: ci limitiamo infatti a considerare soltanto la perturbazione di un singolo toro, cioè un toro che è sufficientemente vicino al toro di un sistema integrabile e mostriamo come, sotto opportune condizioni di non degenerazione per l'hamiltoniana H (espresse attraverso le richieste sulla matrice Q), partendo da tale soluzione approssimata sia possibile ricavare una soluzione quasi-periodica per il nostro sistema, cioè un toro invariante vicino al toro iniziale (i.e. $\mathbb{T}^n \times \{0\}$). Il caso di un sistema hamiltoniano quasi-integrabile è chiaramente un caso particolare, poichè tutti i tori massimali invarianti per il sistema integrabile corrispondono a soluzioni approssimate per il sistema perturbato (per l'enunciato relativo al caso quasi-integrabile si veda il corollario 2.2.2 nella Tesi).
La tecnica adottata segue sostanzialmente lo schema delineato da Kolmogorov nel suo lavoro del 1954 [40] (che nonostante l'estrema chiarezza espositiva, manca di dettagli tecnici) e ripreso da Salamon in [60]: costruiremo una successione di hamiltoniane reale analitiche $H^{(\nu)}$ nelle strisce Σ_{r_ν}, con

$$\begin{cases} r_0 = r\\ r_\nu = \dfrac{1+\theta}{2}r + \dfrac{1-\theta}{2^{\nu+1}}r\,, \end{cases}$$

in modo che l'errore commesso nella scelta della soluzione approssimata, decresca in maniera quadratica ad ogni passo dell'iterazione (è questo lo schema *superconvergente* che garantirà la convergenza dell'intero algoritmo). La condizione di non degenerazione imposta è indispensabile, in quanto ci permetterà, ad ogni passo, di trovare una trasformazione simplettica che lasci invariata la frequenza ω; questo fatto verrà pagato con una variazione del livello energetico (cioè dell'energia del toro perturbato). Vedremo nel capitolo 4 come il voler lasciare invariato il livello energetico richieda una diversa condizione di non degenerazione (che chiameremo *condizione di non degenerazione isoenergetica* per distinguerla da quella *standard* che abbiamo sopra considerato): in tal caso ad ogni passo (a meno di non richiedere ulteriori condizioni analoghe a quella richiesta nel caso *standard*) avremo una variazione (piccola) della frequenza, che si tradurrà in una variazione della frequenza finale del toro perturbato (anche questa sufficientemente piccola).

Capitolo 3 - Teorema KAM: caso differenziabile (versione di Salamon)

In questo capitolo vogliamo dimostrare un teorema analogo a quello del capitolo precedente, ma in un contesto diverso: non supporremo più l'analiticità della hamiltoniana, ma ci limiteremo a supporre che sia sufficientemente differenziabile (in termini che poi discuteremo più dettagliatamente). Non è possibile applicare direttamente lo schema di Kolmogorov in tale contesto, in quanto l'iterazione sarebbe destinata a "*morire*" dopo un numero finito di passi, a causa si una perdita di differenziabilità cui si assiste inevitabilmente ad ogni *step* dell'iterazione. La tecnica che seguiremo consiste invece nel trovare una successione di hamiltoniane analitiche convergenti alla nostra hamiltoniana ed applicare il teorema dimostrato nel caso analitico a tale successione. Per far ciò dovremo innanzitutto introdurre uno *smoothing operator*, cioè sviluppare una tecnica di approssimazione di funzioni C^l con una successione di funzioni analitiche, rifacendoci ai lavori di Moser, Jackson, Zehnder e Bernstein e cercando di relazionare le proprietà qualitative relative alla differenziabilità della funzione, in termini di stime quantitative per tale successione approssimante.
L'approccio che seguiremo è quello sviluppato da Salamon in [60]: osserviamo che in queste note (non pubblicate, ma reperibili sulla pagina web dell'autore) lo stesso autore segnala (con una nota aggiunta a mano) un'errore relativo alla tecnica di approssimazione sopra menzionata e ad alcune stime connesse allo *smoothing operator* introdotto, ma non fornisce dettagli relativi alla correzione. Il passo successivo è stato apportare le modifiche necessarie alla dimostrazione del teorema KAM (caso differenziabile) presente in [60], tenendo conto delle correzioni sopra effettuate. E' bene sottolineare che nonostante tali variazioni, le idee e le tecniche alla base della dimostrazione di Salamon continuano a rimanere sostanzialmente valide.

Il capitolo è strutturato nel seguente modo:

- Nella prima parte introduciamo gli *spazi hölderiani* e dimostriamo alcune proprietà, quali ad esempio delle interessanti stime di interpolazione (in alcuni casi particolari) che legano tra loro le norme hölderiane con esponenti diversi e che ci serviranno per dimostrare alcune stime relative all'operatore di regolarizzazione che andremo a definire.

- Il passo successivo sarà proprio introdurre tale operatore di regolarizzazione e dimostrare alcune stime che legano la funzione regolarizzata con un opportuno polinomio di Taylor della funzione originaria. Tali stime risulteranno indispensabili per poter dimostrare il teorema KAM in questo nuovo contesto.
  Il lemma che dimostreremo è il seguente:

  Lemma. (Jackson, Moser, Zehnder)
  Esiste una famiglia di operatori "regolarizzanti" S_r (con $0 < r \leq 1$) dallo spazio $C^0(\mathbb{R}^n)$ allo spazio delle funzioni intere su $\mathbb{C}^n$, tali che per ogni $l \geq 0$ esista una costante $C = C(l,n)$ in modo che valgano le seguenti stime. Se $f \in C^l(\mathbb{R}^n)$ allora per $|\alpha| \leq l$ e $|\mathrm{Im}\, x| \leq r$ si ha:

$$\left| \partial^\alpha S_r f(x) - \sum_{|\beta| \leq l - |\alpha|} \partial^{\alpha+\beta} f(Re x) \frac{(i \,\mathrm{Im}\, x)^\beta}{\beta!} \right| \leq C \, |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|}$$

  ed in particolare per $\rho \leq r$

$$|\partial^\alpha S_r f - \partial^\alpha S_\rho f|_\rho \leq C \, |f|_{C^l} r^{l-|\alpha|} \; .$$

  Inoltre, nel caso reale abbiamo:

$$\begin{aligned} |S_r f - f|_{C^s} &\leq C |f|_{C^l} r^{l-s} \qquad & s \leq l \\ |S_r f|_{C^s} &\leq C |f|_{C^l} r^{l-s} \qquad & l \leq s \; . \end{aligned}$$

  Infine, se f è periodica rispetto a qualcuna delle sue variabili, allora anche le funzioni approssimanti $S_r f$ lo sono rispetto alle stesse variabili.

- Fatto ciò, cercheremo di legare le proprietà di differenziabilità di una funzione in termini di stime quantitative per la successione di funzioni analitiche approssimante. Tale risultato può in un certo senso essere interpretato come un "viceversa" del lemma precedente. Una sua versione classica è dovuta a Bernstein e lega le proprietà di differenziabilità di una funzione periodica con delle stime quantitative per una successione approssimante di polinomi trigonometrici. Dimostreremo il seguente risultato:

  Lemma. (Bernstein, Moser)
  Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ il limite di una successione di funzioni reali analitiche $f_\nu(x)$ definite nella striscia complessa

$$\left\{ x \in \mathbb{C}^n : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r_\nu = 2^{-\nu} r_0 \right\} \; ,$$

con $0 < r_0 \leq 1$ *e tali che*

$$f_0 = 0 \quad e \quad |f_\nu(x) - f_{\nu-1}(x)|_{r_\nu} \leq A r_\nu^l \; ,$$

con A *costante. Allora* $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ *per ogni* $s \leq l$ *non intero ed inoltre*

$$|f|_{C^s} \leq \frac{\hat{C} A}{\mu(\mu - 1)} r_0^{l-s}$$

dove $0 < \mu = s - [s] < 1$ *è la parte frazionaria di* s *e* $\hat{C} = \hat{C}(l, n) > 0$ *è un'opportuna costante.*
Inoltre, se le f_ν *sono periodiche nelle variabili* x_i*, allora anche la funzione limite* f *lo è.*

- A questo punto abbiamo sviluppato tutti gli strumenti per poter estendere il teorema KAM al caso differenziabile. Il teorema che dimostreremo è il seguente:

Teorema 2. (Moser)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n - 1$, $\gamma > 0$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ *e* $\rho > 0$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall \, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \, .$$

Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto contenente* $B_\rho(0)$ *e sia* $F \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *tale che*

$$\begin{cases} F_x(x, 0) = 0 \\ F_y(x, 0) = \omega \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{T}^n$*; supponiamo inoltre che soddisfi le seguenti stime per* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \in G$ *:*

$$\begin{aligned} &|F|_{C^l} \leq M \\ &\left| \langle F_{yy}(\cdot, 0) \rangle^{-1} \right| \leq M \, . \end{aligned}$$

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma, \tau, l, m, M, n, \rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, l, m, M, n, \rho) > 0$$

in modo che valga quanto segue.
Se $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *è una funzione hamiltoniana tale che per qualche* $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ *si abbia*

$$|H - F|_{C^s} \leq M \varepsilon^{l-s} \qquad \text{per ogni } \; 0 \leq s \leq l \, ,$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\ \\ Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases}$$

tali che:

i) $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono entrambe periodiche con periodo* 1*;*

ii) $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \circ u^{-1} \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$ *, per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*.*

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{aligned} |u - \mathrm{id}\,|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+1-s} \qquad && 0 < s \leq m+1 \\ |v \circ u^{-1}|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+\tau+1-s} \qquad && 0 < s \leq m+\tau+1\,, \end{aligned}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$ *.*

Osserviamo che stiamo richiedendo alla nostra hamiltoniana di essere C^l con $l > 2\tau + 2 > 2n$ (in quanto $\tau > n-1$). Queste condizioni (nettamente migliori rispetto a quelle trovate da Moser nel suo lavoro originale sulle *twist maps* - corrispondenti a due gradi di libertà - dove il numero di derivate richiesto era piuttosto eccessivo: 333), coincidono con quanto dimostrato da Pöschel (cfr. [53] e [54]). Osserviamo inoltre che tale *lower bound* sembra essere ottimale, come mostrano diversi esempi esistenti in letteratura, quali [37], [65] o [42]. Inoltre maggiore è la regolarità della hamiltoniana, maggiore sarà la regolarità delle soluzioni trovate.

La tecnica che abbiamo seguito, come già accennato in precedenza, si basa su un'idea di Moser che viene ripresa nelle note di Salamon (con opportune correzioni): approssimeremo la nostra hamiltoniana con una successione di hamiltoniane reali analitiche, usando le tecniche sopra discusse ed otterremo quindi una successione di hamiltoniane, definite su *strisce sempre più sottili*, ciascuna delle quali soddisferà, all'interno della propria striscia, le condizioni richieste dal teorema KAM analitico. Quindi troveremo una successione di trasformazioni simplettiche reali analitiche (vedi teorema 1) e questo ci permetterà di costruire uno schema iterativo convergente, che ci fornirà i risultati richiesti.
Per l'enunciato relativo ai sistemi quasi-integrabili si veda il corollario 3.3.2 nella Tesi.

- Nell'ultima parte del capitolo, mostreremo alcuni risultati relativi all'unicità e alla regolarità delle soluzioni trovate. In particolare mostreremo che, con le stesse condizioni di regolarità richieste nel teorema 2, si può dimostrare un risultato di unicità (locale) per i tori invarianti con un'assegnata frequenza diofantina ω. In un contesto più generale tale problema è stato ampiamente discusso - nel caso analitico - da Zehnder (cfr. [71]) e le idee e le tecniche da noi riprese (vedi [60]) sono profondamente ispirate a tale lavoro. In particolare dimostreremo il seguente risultato:

Teorema 3. *Siano* $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, $0 < \lambda < 1$, $M \geq 1$ *ed* $l = \tau + \lambda + 1$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto contenente lo zero e sia* $H \in C^{l+2}(\mathbb{T}^n \times G)$ *una hamiltoniana tale che*

$$\begin{cases} H_x(x,0) = 0 \\ H_y(x,0) = \omega \end{cases}$$

ed in modo che le seguenti condizioni siano soddisfatte:

$$|H|_{C^{l+2}} \leq M \qquad e \qquad \left|\langle H_{yy}(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,.$$

Allora esiste una costante

$$0 < \delta = \delta(\gamma, \tau, \lambda, n, M) < 1$$

in modo che valga quanto segue.
Se $u \in C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \in C^l(\mathbb{R}^n, G)$ *soddisfano*

$$\begin{cases} Du = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\[2ex] Dv = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v)\,, \end{cases}$$

le funzioni $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono periodiche di periodo* 1, $v \circ u^{-1} \in C^l(\mathbb{T}^n, G)$ *e valgono le seguenti stime*

$$|u_\xi - \mathbb{I}|_{C^0} \leq \delta \qquad e \qquad |v \circ u^{-1}|_{C^l} \leq \delta\,,$$

allora

$$u_\xi \equiv \mathbb{I} \qquad e \qquad v \equiv 0\,.$$

Questo risultato di unicità, insieme al teorema KAM differenziabile, ci permetterà di mostrare che le soluzioni di un sistema hamiltoniano C^∞ sono anch'esse C^∞:

Teorema 4. *Siano* $n \geq 2$, $\gamma > 0$, $\tau > n-1$, *ed* $l > 2\tau + 2$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,.$$

Sia inoltre $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto e sia* $H \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times G)$ *una funzione hamiltoniana.*
Consideriamo $u \in C^{l+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \in C^l(\mathbb{R}^n, G)$*, tali che*

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) \end{cases}$$

sia una soluzione del sistema hamiltoniano associato, con $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *siano periodiche di periodo* 1 *ed* u *diffeomorfismo del toro* $\mathbb{T}^n$*. Supponiamo infine che*

$$\det\big(\langle u_\xi(\xi)^{-1}\, H_{yy}(u(\xi), v(\xi))\, u_\xi^T(\xi)^{-1}\rangle\big) \neq 0\,.$$

Allora $u \in C^\infty$ *e* $v \in C^\infty$.

Capitolo 4 - Teorema KAM: caso isoenergetico

Abbiamo discusso nei capitoli precedenti la conservazione dei tori invarianti massimali corrispondenti a frequenze diofantine, sia nel caso di sistemi hamiltoniani analitici, che di sistemi sufficientemente differenziabili. I risultati che abbiamo fin qui provato (cfr. teorema 1 e teorema 2) ci hanno permesso di concludere che, sotto opportune ipotesi di non degenerazione sulla hamiltoniana imperturbata e sulla taglia del fattore perturbativo, i tori invarianti non risonanti associati ad una frequenza diofantina ω, sopravvivono per il sistema perturbato, i.e. il sistema perturbato continua ad ammettere un toro invariante corrispondente alla stessa frequenza diofantina ω, ma - in generale - su un differente livello energetico.
Il problema che vorremo affrontare ora è il seguente:
E' possibile dimostrare la conservazione dei tori invarianti massimali corrispondenti a valori di energia fissati? Cosa possiamo dire in tal caso relativamente alle frequenze di tali tori perturbati?
Questo problematica trova le sue motivazioni oltre che in una *irrefrenabile curiosità matematica*, in molti problemi fisici, dove è essenziale il controllo del valore energetico delle soluzioni di un problema assegnato; inoltre, promette risultati potenzialmente più significativi per lo studio della stabilità di tali sistemi: infatti in tal caso la conservazione di tali tori verrebbe garantita su ciascun livello energetico.
Purtroppo tale risultato - in generale - non è valido, se imponiamo condizioni

analoghe a quelle richieste nel caso standard: si riescono infatti a trovare dei controesempi che ne negano la validità. Dobbiamo trovare quindi una condizione che ci garantisca la *non degenerazione isoenergetica* della nostra hamiltoniana integrabile, cioè una condizione che ci permetta di dimostrare il risultato in questione.

Nel primo paragrafo discuteremo la natura di tale condizione di non degenerazione ed i suoi legami con la condizione di *non degenerazione standard*: mostreremo (con degli esempi) che tali condizioni sono indipendenti e che conducono a risultati differenti nell'ambito della teoria KAM e della conservazione dei tori invarianti diofantini.

Nei paragrafi successivi dimostreremo delle versioni *quantitative* del teorema KAM isonergetico, nella classe delle hamiltoniane analitiche e in quella delle hamiltoniane differenziabili: le condizioni di regolarità che otterremo in quest'ultimo caso, sono esattamente le stesse del caso *standard*.

Le tecniche che useremo si rifanno agli schemi discussi nei capitoli precedenti, opportunamente modificati per adattarli a questo nuovo contesto: infatti, nonostante l'*originalità* dei risultati di questo capitolo, non può essere negato il notevole contributo fornito da quanto discusso in precedenza e dalle note di Salamon (nonché da alcune osservazioni in [23], dove però viene considerato solo il caso analitico). Osserviamo che la *condizione di non degenerazione isoenergetica* ci permetterà ad ogni passo dello schema di lasciare invariato il livello energetico, ma tutto ciò comporterà una variazione (seppur minima) della frequenza, comportando una variazione delle frequenza finale, dipendente dalla taglia della perturbazione; la nuova frequenza sarà della forma $\omega' = (1+k)\omega$ con k sufficientemente piccolo (di cui forniremo delle precise stime), e quindi i rapporti tra le componenti delle frequenze (*frequency ratios*) rimarranno costanti (cioè le frequenze rimangono costanti se viste nello spazio proiettivo).

Enunciamo i risultati principali che dimostreremo. Cominciamo dal caso analitico:

Teorema 5. (Teorema KAM isoenergetico, caso analitico)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$, $E \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ e supponiamo che $\omega \in \mathbb{R}^n$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino, cioè

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,,$$

tale che $|\omega| \leq M$.
Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0 \qquad e \qquad c = c(\gamma, \tau, \theta, M, n) > 0$$

in modo che $c\delta^* \leq 2^{-(2\tau+4)}$ e che valga quanto segue.
Sia $H(x,y)$ una hamiltoniana reale analitica nella striscia

$$\Sigma_r = \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n} : \quad |\mathrm{Im}\, x| \leq r,\ |y| \leq r\,\}$$

con $0 < r \leq 1$, periodica di periodo 1 nelle componenti $x_1, x_2, \dots, x_n$ e tale da soddisfare le seguenti condizioni per $(x, y) \in \Sigma_r$ e per qualche $\delta \leq \delta^*$:

$$
\begin{aligned}
&|H(x,0) - E| \leq \delta r^{2\tau+2} \\
&|H_y(x,0) - \omega| \leq \delta r^{\tau+1} \\
&|H_{yy}(x,y) - Q(x,y)| \leq \frac{c\delta}{4M}
\end{aligned}
$$

dove $Q(x, y) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica (non necessariamente analitica) nella striscia Σ_r; definiamo, inoltre

$$
A(x,y) = \begin{pmatrix} Q(x,y) & -\omega^T \\ \omega & 0 \end{pmatrix}
$$

e supponiamo che in Σ_r si abbia:

$$
|Q(z)| \leq M \qquad e \qquad \left|\langle A(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M \,.
$$

Allora esiste una trasformazione simplettica, reale analitica $z = \phi(\zeta)$ (dove $z = (x, y)$ e $\zeta = (\xi, \eta)$) della forma

$$
\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi) + (u_\xi^T(\xi))^{-1}\eta \end{cases}
$$

con le funzioni $u(\xi) - \xi$ e $v(\xi)$ entrambe periodiche di periodo 1 e tale che la hamiltoniana trasformata $K = H \circ \phi$ soddisfi:

$$
K(\xi,0) = E\,, \quad K_\xi(\xi,0) = 0, \quad K_\eta(\xi,0) = (1+k)\omega
$$

dove $|k| \leq 2^{2\tau+3} c\delta r^{\tau+1}$.
Inoltre valgono le seguenti stime in $\Sigma_{\theta r}$:

$$
\begin{aligned}
&|\phi(\zeta) - \zeta| \leq \frac{c\delta}{34M^3}(1-\theta)r \\
&|\phi_\zeta(\zeta) - \mathbb{I}| \leq \frac{c\delta}{17M^3} \\
&|K_{\eta\eta}(\zeta) - Q(\zeta)| \leq \frac{c\delta}{2M} \\
&|v \circ u^{-1}(x)| \leq \frac{c\delta}{19M^3} r^{\tau+1} \,.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che le condizioni di non degenerazione isoenergetica si traducono nelle condizioni imposte sulla matrice A.

Analogamente a quanto già fatto nel caso standard, estenderemo tali risultati al caso differenziabile:

Teorema 6. (Teorema KAM isoenergetico, caso differenziabile)
Siano $n \geq 2$, $\tau > n-1$, $\gamma > 0$, $E \in \mathbb{R}$, $m > 0$, $l > 2\tau + 2 + m$, $M \geq 1$ *e* $\rho > 0$, *e supponiamo che* $\omega \in \mathbb{R}^n$ *sia un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}\,,$$

tale che $|\omega| \leq M$. *Sia inoltre* $G \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio aperto contenente* $B_\rho(0)$ *e sia* $F \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *tale da soddisfare:*

$$\begin{cases} F_x(x,0) = 0 \\ F_y(x,0) = \omega \\ F(x,0) = E \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{T}^n$.
Supponiamo, inoltre, che soddisfi le seguenti stime per $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $y \in G$*:*

$$\begin{aligned} &|F|_{C^l} \leq M \\ &\left|\langle A(\cdot,0)\rangle^{-1}\right| \leq M\,, \end{aligned}$$

dove

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} F_{yy}(x,y) & -\omega^T \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora esistono delle costanti

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0 \qquad e \qquad \tilde{c} = \tilde{c}(\gamma,\tau,l,m,M,n,\rho) > 0$$

in modo che valga quanto segue.
Se $H \in C^l(\mathbb{T}^n \times G)$ *è una funzione hamiltoniana tale che per qualche* $\varepsilon \leq \varepsilon^*$ *si abbia:*

$$|H - F|_{C^s} \leq M\varepsilon^{l-s} \qquad \text{per ogni } \ 0 \leq s \leq l\,,$$

allora esistono

$$\begin{cases} x = u(\xi) \\ y = v(\xi)\,, \end{cases}$$

soluzioni del problema

$$\begin{cases} D_{(1+k)\omega} u = \dfrac{\partial H}{\partial y}(u,v) \\ \\ D_{(1+k)\omega} v = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(u,v) \end{cases}$$

dove $|k| \leq 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}$ *(per un'opportuna costante* $\tilde{c}_2$*), tali che:*

1. $u(\xi) - \xi$ *e* $v(\xi)$ *sono entrambe periodiche con periodo 1;*

2. $u \in C^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $v \circ u^{-1} \in C^{s+\tau}(\mathbb{R}^n, G)$ *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*;*

3. $H(u(\xi), v(\xi)) = E$ *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$
\begin{aligned}
|u - \mathrm{id}\,|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+1-s} & \qquad 0 < s \leq m+1\,,\\
|v \circ u^{-1}|_{C^s} &\leq \frac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\varepsilon^{m+\tau+1-s} & \qquad 0 < s \leq m+\tau+1\,,
\end{aligned}
$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$.

Per gli enunciati relativi ai sistemi quasi-integrabili si vedano i corollari 4.2.2 e 4.3.2 nella Tesi.

Capitolo 5 - Tori parzialmente iperbolici (caso differenziabile)

Abbiamo visto nei capitoli precedenti l'eccezionalità e la novità dell'utilizzo delle tecniche KAM per la dimostrazione della sopravvivenza dei tori non risonanti di sistemi hamiltoniani, sia nel caso analitico che in quello differenziabile. In questo capitolo vogliamo spostare la nostra attenzione sul destino dei tori risonanti parzialmente iperbolici, che svolgono un ruolo di cruciale importanza nello studio della cosiddetta *diffusione di Arnol'd.* Questi particolari tori furono inizialmente studiati da Poincaré; fu Arnol'd in [5] a denominare tali tori *whiskered* (cioè *coi baffi*) e ad utilizzarli nel suo famoso esempio di un fenomeno di diffusione, che oggi porta il suo nome.
Risultati di tipo KAM relativi alla sopravvivenza dei tori parzialmente iperbolici, per effetto di piccole perturbazioni del sistema, sono stati ottenuti e ampiamente discussi in [35] e [71], dove vengono analizzate hamiltoniane analitiche. In questo nostro lavoro vogliamo invece soffermare la nostra attenzione su hamiltoniane sufficientemente differenziabili, ma non necessariamente analitiche. Il metodo che seguiremo consisterà nel combinare una versione del teorema KAM (caso differenziabile standard e isoenergetico), con degli schemi propri della teoria delle *varietà normalmente iperboliche*, sviluppata da Fenichel (cfr. [28] e [69]), e dimostreremo dei risultati di conservazione per i tori parzialmente iperbolici differenziabili, sia nel caso standard che nel caso isoenergetico (quest'ultimo risultato è nuovo).
Entriamo nei dettagli del metodo che seguiremo. Considereremo una hamiltoniana della forma:

$$H_0(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I)$$

con

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\
y & = & (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\
I & = & (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\
\varphi & = & (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k
\end{array}
$$

dove U è un insieme aperto di $\mathbb{R}^k$ ed A una matrice definita positiva.
Mostreremo che tale hamiltoniana possiede una varietà invariante $2k$-dimensionale:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, I, \varphi) : \ x = y = 0 \, , \ I \in U \, , \ \varphi \in \mathbb{T}^k\} \, ,$$

consistente in una famiglia k-parametrica di tori k-dimensionali, cioè:

$$\mathbb{M} = \bigcup_{I \in U} \mathbb{T}(I) \, ,$$

dove

$$\mathbb{T}(I) \equiv \{(0, 0, I, \varphi) \, , \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\}.$$

Inoltre, $\mathbb{M}$ possiede delle varietà stabili e instabili $(2k + l)$-dimensionali, date rispettivamente da:

$$
\begin{array}{rcl}
W^s(\mathbb{M}) & \equiv & \{(0, y, I, \varphi) : \ y \in \mathbb{R}^l, \ I \in \mathbb{R}^k, \ \varphi \in \mathbb{T}^k \} = \{x = 0\} \\
W^u(\mathbb{M}) & \equiv & \{(x, 0, I, \varphi) : \ x \in \mathbb{R}^l, \ I \in \mathbb{R}^k, \ \varphi \in \mathbb{T}^k \} = \{y = 0\} \, .
\end{array}
$$

Più precisamente, $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ sono anch'esse delle varietà invarianti contenenti $\mathbb{M}$ (in particolare $W^s(\mathbb{M}) \cap W^u(\mathbb{M}) = \mathbb{M}$) e costituite da traiettorie che le si avvicinano asintoticamente per $t \to +\infty$ e $t \to -\infty$ rispettivamente. Ancora più precisamente, a ciascun toro k-dimensionale in $\mathbb{M}$

$$\mathbb{T}(I_0) = \{(0, 0, I_0, \varphi) \, , \quad \varphi \in \mathbb{T}^k\},$$

possiamo associare delle varietà $(k + l)$-dimensionali, dette rispettivamente *baffi stabili* e *baffi instabili*:

$$
\begin{array}{rcl}
W^s(I_0) & \equiv & \{(0, y, I_0, \varphi) : \ y \in \mathbb{R}^l, \ I \in \mathbb{R}^k, \ \varphi \in \mathbb{T}^k \} = \{x = 0, \ I = I_0\} \\
W^u(I_0) & \equiv & \{(x, 0, I_0, \varphi) : \ x \in \mathbb{R}^l, \ I \in \mathbb{R}^k, \ \varphi \in \mathbb{T}^k \} = \{y = 0, \ I = I_0\} \, ,
\end{array}
$$

che costituiscono una foliazione di $W^s(\mathbb{M})$ e $W^u(\mathbb{M})$ e sono tali che:

$$W^s(I_0) \cap W^u(I_0) = \mathbb{T}(I_0) \, .$$

Quello che vorremmo mostrare è il seguente risultato (che in seguito enunceremo in una formulazione più quantitativa):

Sia $I_0 \in U$ tale che $\omega(I_0)$ sia un vettore (γ, τ)-diofantino. Allora, sotto opportune ipotesi di non degenerazione per h, il toro invariante $\mathbb{T}(I_0)$ per la hamiltoniana H_0, con r sufficientemente grande, sopravvive insieme ai suoi baffi stabili e instabili, ad una perturbazione sufficientemente piccola e regolare del sistema.

Lo schema che useremo per dimostrare tale risultato è il seguente:

1. Mostreremo innanzitutto la conservazione (locale) di $W^u(\mathbb{M})$, cioè l'esistenza di una varietà che denoteremo con $W^{u,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$, C^{r-1} - diffeomorfa a $W^u(\mathbb{M})$. Per far questo utilizzeremo delle tecniche proprie della teoria geometrica dei sistemi dinamici, rifacendoci a quanto sviluppato da Fenichel per le *varietà normalmente iperboliche*. Descriviamo più dettagliatamente il procedimento che seguiremo:

   - Considereremo un *intorno* N_λ della nostra varietà (costruito in maniera opportuna a partire dalla dinamica del sistema) e prenderemo in esame lo spazio delle sue *sezioni*, cioè applicazioni definite su $W^u(\mathbb{M})$ a valori in N_λ.
   - Rifacendoci ad un idea già usata da Hadamard (per dimostrare l'esistenza delle varietà stabile e instabile associate ad un punto fisso di un diffeomorfismo), definiremo una *trasformazione grafico* da un *sottospazio* dello spazio delle sezioni in se stesso; faremo vedere che tale applicazione è una contrazione e dedurremo l'esistenza di un punto fisso. Per come abbiamo definito la *trasformazione grafico*, i suoi punti fissi coincideranno con delle varietà *lipschitziane* invarianti (localmente) rispetto al flusso perturbato.
   - Il passo successivo sarà dimostrare la regolarità di tale varietà: dimostreremo che è più che lipschitziana; faremo vedere infatti che è C^{r-1}. Per far ciò, utilizzeremo un procedimento iterativo:

     a) Innazitutto faremo vedere che è C^1: ricaveremo un'equazione *formale* che la funzione deve soddisfare per essere C^1 ed utilizzando un procedimento iterativo mostreremo che una soluzione di tale equazione esiste e coincide proprio con la derivata della nostra funzione.

     b) Iterando lo schema arriveremo a dimostrare che è C^{r-1}.

2. In maniera analoga si dimostra la conservazione (locale) della varietà $W^s(\mathbb{M})$: infatti basta osservare che attraverso un'inversione temporale, tale varietà diventa proprio la varietà instabile del sistema così ottenuto.

3. Utilizzando tali risultati mostreremo la conservazione (sempre locale) della varietà $\mathbb{M}$, cioè l'esistenza di una varietà $\mathbb{M}_\varepsilon$, C^{r-1}-diffeomorfa ad $\mathbb{M}$ e

localmente invariante per il flusso perturbato.
I risultati fin qui dimostrati possono essere così riassunti:

Teorema 7. *Sia $n = l + k \geq 2$ (con $k \geq 1$ e $l \geq 1$), $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq 3$, ρ_1, $\rho_2 > 0$.*
Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ della forma:

$$H_0(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I)$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k \end{aligned}$$

con U aperto di $\mathbb{R}^k$.

Assumiamo, inoltre, che valgano le seguenti proprietà:

(a) A è una matrice definita positiva;

(b) $|h|_{C^r} \leq M$.

Allora esistono

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(l, k, M, A, r, \rho_1, \rho_2) \qquad e \qquad C = C(l, A, k, M, r, \rho_1, \rho_2)$$

tali che valga quanto segue. Se consideriamo una perturbazione hamiltoniana del nostro sistema

$$\begin{aligned} H(x, y, I, \varphi) &= H_0(x, y, I, \varphi) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi) = \\ &= x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi) \end{aligned}$$

con

$$H_1 \in C^r(B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_1}(0) \times B_{\rho_2}(I_0) \times \mathbb{T}^k)$$

tale che $B_{\rho_2}(I_0) \subset U$ e $\varepsilon \leq \varepsilon^*$, allora le varietà $\mathbb{M}$, $W^u(\mathbb{M})$ e $W^s(\mathbb{M})$ sopravvivono localmente a tale perturbazione; in particolare:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_\varepsilon &= \left\{ x = \tilde{w}(I, \varphi),\, y = \tilde{u}(I, \varphi) : \quad I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \right\} \\ W^{u,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}) &= \left\{ y = u(x, I, \varphi) : \quad x \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \right\} \\ W^{s,\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}) &= \left\{ x = w(y, I, \varphi) : \quad y \in B_{\frac{\rho_1}{4}}(0),\ I \in B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0),\ \varphi \in \mathbb{T}^k \right\}, \end{aligned}$$

con $\tilde{u}$, $\tilde{w}$, u e w funzioni C^{r-1} nel loro dominio di definizione tali che

$$\begin{aligned} |\tilde{u}|,\ |\tilde{w}|,\ |u|,\ |w| &\leq \varepsilon \\ |D\tilde{u}|,\ |D\tilde{w}|,\ |Du|,\ |Dw| &\leq C\varepsilon\,. \end{aligned}$$

4. Restringeremo il sistema hamiltoniano a tale varietà $\mathbb{M}_\varepsilon$: dimostreremo innanzitutto un lemma tecnico che ci permetterà di concludere che il sistema così ottenuto è ancora hamiltoniano e che la sua hamiltoniana coincide proprio con l'hamiltoniana ristretta ad $\mathbb{M}_\varepsilon$. Otterremo quindi un sistema hamiltoniano (dipendente solo dalle I e dalle φ) quasi-integrabile, a cui sarà possibile applicare i risultati discussi nei capitoli 3 e 4, deducendo la conservazione dei tori parzialmente iperbolici sia nel caso standard che nel caso isoenergetico. Per quanto riguarda la conservazione dei loro *baffi*, questa è conseguenza della conservazione di $W^u(\mathbb{M})$ e $W^s(\mathbb{M})$.
   In particolare dimostreremo i seguenti due risultati:

   Teorema 8. (Conservazione tori parzialmente iperbolici, caso differenziabile)
   Sia $n = l + k \geq 2$ *(con* $k \geq 1$ *e* $l \geq 1$*),* $\tau > k - 1$*,* $\gamma > 0$*,* $m > 0$*,* $r > 2\tau + m + 3$ *(con* $r \in \mathbb{N}$*),* $M \geq 1$*,* ρ_1*,* $\rho_2 > 0$ *e* $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ *un vettore* (γ, τ)*-diofantino, cioè*

$$|\omega_0 \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\,.$$

   Sia inoltre $U \subset \mathbb{R}^k$ *un dominio aperto contenente* $B_{\rho_2}(I_0)$.
   Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ *della forma:*

$$H(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi)$$

   dove

$$\begin{array}{rcl} x & = & (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y & = & (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I & = & (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi & = & (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k\,. \end{array}$$

   Assumiamo, inoltre, che:

   (a) A *sia una matrice definita positiva;*

   (b)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial I}(I_0) = \omega_0 \\ |h|_{C^r} \leq M \\ \left| \left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I_0) \right)^{-1} \right| \leq M\,. \end{cases}$$

   Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0\,,$$

in modo che se

$$\tilde{c}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}$$

e per qualche $\delta \leq \delta^*$ *si ha*

$$|\varepsilon\, H_1|_{C^s} \leq M\delta^{r-s} \qquad \textit{per ogni } \; 0 \leq s \leq r\,,$$

allora esiste una soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H*,*

$$\begin{cases} I = \hat{I}(\xi) \\ \varphi = \hat{\varphi}(\xi) \\ x = \hat{x}(\xi) = u(\hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi)) \\ y = \hat{y}(\xi) = v(\hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi))\,, \end{cases}$$

dove

$$u,\ v \ \in C^{r-1}(B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k)\,,$$

tale che:

(a)

$$\begin{cases} D_{\omega_0}\hat{\varphi} = -\dfrac{\partial H}{\partial I}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi)) \\ \\ D_{\omega_0}\hat{I} = \ \ \dfrac{\partial H}{\partial \varphi}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi))\,; \end{cases}$$

b) $\hat{\varphi}(\xi) - \xi$ *e* $\hat{I}(\xi)$ *sono periodiche con periodo* 1 *;*

c) $\hat{\varphi} \in C^s(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ *e* $\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1} \in \mathbb{C}^{s+\tau}(\mathbb{R}^k, B_{\rho_2}(I_0))$ *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*.*
Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\hat{\varphi} - \mathrm{id}\,|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+1-s} & 0 < s \leq m+1\,, \\ |\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1}|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+\tau+1-s} & 0 < s \leq m+\tau+1\,, \end{cases}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$ *.*

d) u *e* v *soddisfano le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} |u|,\ |w| \ &\leq \ \varepsilon \\ |Du|,\ |Dw| \ &\leq \ \tilde{c}\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Teorema 9. (Conservazione tori parzialmente iperbolici, caso differenziabile - isoenergetico)
Sia $n = l + k \geq 2$ *(con* $k \geq 1$ *e* $l \geq 1$*),* $\tau > k - 1$*,* $\gamma > 0$*,* $m > 0$*,*

$r > 2\tau + m + 3$ (con $r \in \mathbb{N}$), $M \geq 1$, ρ_1, $\rho_2 > 0$, $E \in \mathbb{R}$ e $\omega_0 \in \mathbb{R}^k$ un vettore (γ, τ)-diofantino, cioè

$$|\omega_0 \cdot j| \geq \frac{\gamma}{|j|^\tau} \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}\,,$$

tale che $|\omega_0| \leq M$. Sia inoltre $U \subset \mathbb{R}^k$ un dominio aperto contenente $B_{\rho_2}(I_0)$.
Consideriamo una hamiltoniana $C^r(\mathbb{R}^{2l} \times U \times \mathbb{T}^k)$ della forma:

$$H(x, y, I, \varphi) = x \cdot Ay + h(I) + \varepsilon H_1(x, y, I, \varphi)$$

dove

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_l) \in \mathbb{R}^l \\ I &= (I_1, I_2, \ldots, I_k) \in U \subset \mathbb{R}^k \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \in \mathbb{T}^k\,. \end{aligned}$$

Assumiamo, inoltre, che:

(a) A sia una matrice definita positiva;

(b)

$$\begin{cases} h(I_0) = E \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I_0) = \omega_0 \\ |h|_{C^r} \leq M \\ \left|(\mathcal{A}(I_0))^{-1}\right| \leq M\,, \end{cases}$$

dove

$$\mathcal{A}(I) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 h}{\partial I^2}(I) & -\left(\dfrac{\partial h}{\partial I}(I)\right)^T \\ \dfrac{\partial h}{\partial I}(I) & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora esistono delle costanti

$$\delta^* = \delta^*(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0$$

e

$$\tilde{c} = \tilde{c}(\gamma, \tau, r, m, A, M, l, k, \rho_1, \rho_2) > 0\,,$$

in modo che se

$$\tilde{c}\varepsilon < \min\{1, \rho_1, \rho_2\}$$

e per qualche $\delta \leq \delta^*$ si ha

$$|\varepsilon\, H_1|_{C^s} \leq M\delta^{r-s} \qquad \text{per ogni } \ 0 \leq s \leq r\,,$$

allora esiste una soluzione del sistema hamiltoniano associato ad H,

$$\begin{cases} I = \hat{I}(\xi) \\ \varphi = \hat{\varphi}(\xi) \\ x = \hat{x}(\xi) = u(\hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi)) \\ y = \hat{y}(\xi) = v(\hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi))\,, \end{cases}$$

dove

$$u,\ v\ \in C^{r-1}(B_{\frac{\rho_2}{4}}(I_0) \times \mathbb{T}^k)\,,$$

tale che:

(a)

$$\begin{cases} D_{(1+\theta)\omega_0}\hat{\varphi} = -\dfrac{\partial H}{\partial I}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi)) \\ \\ D_{(1+\theta)\omega_0}\hat{I} = \ \ \dfrac{\partial H}{\partial \varphi}(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi))\,, \end{cases}$$

con $|\theta| \leq 2^{\tau+8-m}\tilde{c}_2\varepsilon^{m+\tau+1}$ *(per un'opportuna costante* $\tilde{c}_2$*).*

b) $\hat{\varphi}(\xi) - \xi$ *e* $\hat{I}(\xi)$ *sono periodiche con periodo* 1 *;*

c) $H(\hat{x}(\xi), \hat{y}(\xi), \hat{I}(\xi), \hat{\varphi}(\xi)) = E$*, per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^k$*.*

d) $\hat{\varphi} \in C^s(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ *e* $\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1} \in \mathbb{C}^{s+\tau}(\mathbb{R}^k, B_{\rho_2}(I_0))$ *per ogni* $s \leq m+1$ *tale che* $s \notin \mathbb{N}$ *e* $s + \tau \notin \mathbb{N}$*.*
Valgono inoltre le seguenti stime:

$$\begin{cases} |\hat{\varphi} - \mathrm{id}\,|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+1-s} & 0 < s \leq m+1\,, \\ |\hat{I} \circ \hat{\varphi}^{-1}|_{C^s} \leq \dfrac{\tilde{c}}{\mu(1-\mu)}\delta^{m+\tau+1-s} & 0 < s \leq m+\tau+1\,, \end{cases}$$

con $0 < \mu = s - [s] < 1$ *.*

e) u *e* v *soddisfano le seguenti stime:*

$$\begin{aligned} |u|,\ |w| \quad &\leq \quad \varepsilon \\ |Du|,\ |Dw| \quad &\leq \quad \tilde{c}\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che - in un modo o nell'altro - hanno contribuito alla realizzazione di questa tesi di Laurea. Un ringraziamento particolare va alla mia famiglia, per avermi sempre sostenuto nelle mie scelte; al mio relatore il prof. Luigi Chierchia per moltissimi buoni motivi che vanno oltre questo lavoro; al prof. Ugo Bessi per la costante disponibilità e pazienza dimostrata; ed infine, "*last but not the least*", al dott. Luca Biasco per l'insostituibile e impagabile aiuto mostrato nella fase di revisione di questa tesi.

Bibliografia

[1] N. I. Achieser. *Vorlesungen über Approximationstheorie.* Akademie-Verlag, Berlin, 1953.

[2] V. I. Arnol'd. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25 : 21–86, 1961.

[3] V. I. Arnol'd. Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian. *Uspehi Mat. Nauk*, 18 (5 (113)): 13–40, 1963.

[4] V. I. Arnol'd. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Uspehi Mat. Nauk*, 18 (6 (114)): 91–192, 1963.

[5] V. I. Arnol'd. Instability of dynamical systems with many degrees of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156 : 9–12, 1964.

[6] V.I. Arnol'd. *Metodi matematici della meccanica classica.* Edizioni MIR, Mosca, 1979.

[7] V.I. Arnol'd. *Dynamical sistems III.* Encyclopaedia of mathematical sciences. Springer-Verlag, New York, 1988.

[8] M. Berti, L. Biasco, and P. Bolle. Drift in phase space: a new variational mechanism with optimal diffusion time. *J. Math. Pures Appl., to appear.*

[9] M. Berti and P. Bolle. A functional analysis approach to Arnold diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 19 (4): 395–450, 2002.

[10] U. Bessi. An approach to Arnold's diffusion through the calculus of variations. *Nonlinear Anal.*, 26(6):1115–1135, 1996.

[11] U. Bessi. An analytic counterexample to the KAM theorem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(2):317–333, 2000.

[12] L. Biasco. Stime analitiche sui tempi di instabilità per perturbazioni di sistemi hamiltoniani integrabili. Master's thesis, Università degli studi Roma Tre, Febbraio 1999.

[13] S. V. Bolotin and D. V. Treschev. Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems. *Regul. Chaotic Dyn.*, 5 (4): 401–412, 2000.

[14] J. B. Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnol'd, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel,...). *Astérisque*, (133-134): 113–157, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.

[15] A. Celletti and L. Chierchia. On the stability of realistic three-body problems. *Comm. Math. Phys.*, 186(2): 413–449, 1997 .

[16] L. Chierchia. *Lezioni di analisi matematica 2.* Aracne, Roma, 1997.

[17] L. Chierchia. Kam lectures, Dicembre 2002.

[18] L. Chierchia and G. Gallavotti. Drift and diffusion in phase space. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 60 (1): 1–144, 1994. *Erratum* Ann. Inst. Poincaré, Phys. Théor., 68 (1): 135, 1998.

[19] S. N. Chow and J. K. Hale. *Methods of bifurcation theory*, volume 251 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* [*Fundamental Principles of Mathematical Science*]. Springer-Verlag, New York, 1982.

[20] R. De la Llave and R. Obaya. Regularity of the composition operator in spaces of Hölder functions. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 5 (1): 157–184, 1999.

[21] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[22] A. Delshams, R. De La Llave, and T. M. Seara. Unbounded growth of energy in periodic perturbations of geodesic flows of the torus. In *Hamiltonian systems and celestial mechanics* (*Pátzcuaro, 1998*), volume 6 of *World Sci. Monogr. Ser. Math.*, pages 90–110. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.

[23] A. Delshams and P. Gutiérrez. Effective stability and KAM theory. *J. Differential Equations*, 128 (2): 415–490, 1996.

[24] F. Diacu and P. Holmes. *Celestial encounters: the origin of chaos and stability.* Princeton Science Library. Princeton University Press, 1996.

[25] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis.* Pure and Applied Mathematics, Vol. X. Academic Press, New York, 1960.

[26] L. H. Eliasson. Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 15 (1): 115–147, 1988.

[27] A. Fasano and S. Marmi. *Meccanica analitica.* Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[28] N. Fenichel. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana Univ. Math. J.*, 21 : 193–226, 1971/1972.

[29] N. Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, 23 : 1109–1137, 1973/74.

[30] G. Gallavotti. Quasi periodic motions from Hipparchus to Kolmogorov. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, 12 (1): 125–152 (2002), 2001.

[31] G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro. Mel'nikov's approximation dominance. Some examples. *Rev. Math. Phys.*, 11 (4): 451–461, 1999.

[32] G. Gallavotti, G. Gentile, and V. Mastropietro. On homoclinic splitting problems. *Phys. D*, 137 (1-2):202–204, 2000.

[33] E. Giusti. *Analisi matematica. 1.* Editore Boringhieri, Torino, 1988.

[34] E. Giusti. *Analisi matematica. 2.* Editore Boringhieri, Torino, 1989.

[35] S. M. Graff. On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems. *J. Differential Equations*, 15 : 1–69, 1974.

[36] S. M. Graff. Invariant tori for a class of Hamiltonian differential equations. In *Global analysis–analysis on manifolds*, volume 57 of *Teubner-Texte Math.*, pages 111–125. Teubner, Leipzig, 1983.

[37] M. R. Herman. *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau. Vol. 1*, volume 103 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1983.

[38] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[39] D. Huang and Z. Liu. On the persistence of lower-dimensional invariant hyperbolic tori for smooth Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 13 (1): 189–202, 2000.

[40] A. N. Kolmogorov. On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 98 : 527–530, 1954.

[41] P. Lochak. Hamiltonian perturbation theory: periodic orbits, resonances and intermittency. *Nonlinearity*, 6 (6): 885–904, 1993.

[42] J. N. Mather. Nonexistence of invariant circles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 4 (2): 301–309, 1984.

[43] J. N. Mather. Variational construction of connecting orbits. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), 43 (5): 1349–1386, 1993.

[44] J. Moser. A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 47 : 1824–1831, 1961.

[45] J. Moser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1962 : 1–20, 1962.

[46] J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Math. Ann.*, 169 : 136–176, 1967.

[47] J. Moser. On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations. In *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics* (*Tokyo, 1969*), pages 60–67. Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[48] J. Moser. Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3 (3): 229–272, 1986.

[49] J. Moser. Recent developments in the theory of Hamiltonian systems. *SIAM Rev.*, 28 (4): 459–485, 1986.

[50] J. Moser. *Stable and random motions in dynamical systems.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. Reprint of the 1973 original.

[51] N. N. Nehorošev. An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. *Uspehi Mat. Nauk*, 32(6): 5–66, 1977.

[52] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1987.

[53] J. Pöschel. *Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Systemen*, volume 120 of *Bonner Mathematische Schriften* [*Bonn Mathematical Publications*]. Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 1980. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1979, Beiträge zur Differentialgeometrie [Contributions to differential geometry], 3.

[54] J. Pöschel. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (5): 653–696, 1982.

[55] J. Pöschel. Nekhoroshev estimates for quasi-convex Hamiltonian systems. *Math. Z.*, 213 (2): 187–216, 1993.

[56] J. Pöschel. A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), 23 (1): 119–148, 1996.

[57] J. Pöschel. A lecture on the classical KAM theorem. In *Smooth ergodic theory and its applications* (*Seattle, WA, 1999*), pages 707–732. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[58] H. Rüssmann. Kleine Nenner. I. Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1970 : 67–105, 1970.

[59] H. Rüssmann. On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus. In *Dynamical systems, theory and applications* (*Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1974*), pages 598–624.Lecture Notes in Phys., Vol. 38. Springer, Berlin, 1975.

[60] D. Salamon. The Kolmogorov-Arnold-Moser theorem. Forschungininstitut für Mathematik ETH Zürich (http://www.math.ethz.ch/ salamon/PREPRINTS/KAM.htm), Settembre 1986.

[61] D. Salamon and E Zehnder. KAM theory in configuration space. *Comment. Math. Helv.*, 64 (1): 84–132, 1989.

[62] E. Sernesi. *Geometria 2.* Bollati Boringhieri, Torino, 1994.

[63] C. L. Siegel. *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* Springer-Verlag, Berlin, 1956.

[64] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[65] F. Takens. A C^1 counterexample to Moser's twist theorem. *Indag. Math.*, 33 : 378–386, 1971.

[66] D. V. Treshchëv. A mechanism for the destruction of resonance tori in Hamiltonian systems. *Mat. Sb.*, 180 (10): 1325–1346, 1439, 1989.

[67] E. Valdinoci. Tori di transizione nella teoria KAM. Master's thesis, Università degli studi Roma Tre, Febbraio 1998.

[68] E. Valdinoci. Families of whiskered tori for a-priori stable/unstable Hamiltonian systems and construction of unstable orbits. *Math. Phys. Electron. J.*, 6 : Paper 2, 31 pp. (electronic), 2000.

[69] S. Wiggins. *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems.* Springer-Verlag, New York, 1994.

[70] Z. Xia. Arnold diffusion: a variational construction. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II* (*Berlin, 1998*), number Extra Vol. II, pages 867–877 (electronic), 1998.

[71] E. Zehnder. Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems. I-II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 : 91–140, 1975; 29(1): 49-111, 1976.