UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Pamela Toticchi

Superfici a curvatura Gaussiana costante e superfici minime via Mathematica

Relatore
Prof. Massimiliano Pontecorvo

Il Candidato

Il Relatore

ANNO ACCADEMICO 1997 - 1998
MAGGIO 1999

Classificazione AMS : 53A05
Parole Chiave : Superficie in $\mathbb{R}^3$, Curvatura di Gauss, Curvatura Media.

Pamela Toticchi è nata a Roma il 30 Maggio 1975.
Ha conseguito il Diploma di Maturità scientifica presso il Liceo Scientifico statale “B. Croce” di Roma nel luglio 1994.
Si è immatricolata al Corso di Laurea in Matematica presso l'Università degli Studi di Roma Tre nell'anno accademico 1994 - 1995.
Ha presentato per la prova di qualificazione all'esame di laurea le seguenti tesine orali :
“Triangolazioni delle matrici e delle applicazioni lineari” e “L'assiomatica della geometria secondo G. Choquet”.
Ha vinto negli anni 94-95 e 96-97 la borsa di studio per merito assegnata dall'ADISU. Ha vinto negli anni 95-96, 96-97 e 97-98 la borsa di studio di collaborazione studenti presso la Biblioteca d'area scientifico-tecnologica dove ha collaborato con il personale per l'attivazione di sistemi informatizzati di ricerca bibliografica.

Lo studio della geometria differenziale è avanzato per molto tempo senza validi supporti per la realizzazione di rappresentazioni grafiche che, soprattutto per le curve e le superfici in $\mathbb{R}^3$, aiutano nell'analisi di numerose problematiche.
Attualmente siamo in possesso di numerosi strumenti moderni che permettono la risoluzione di problemi computazionali e la visualizzazione di grafici anche molto complicati. Uno dei programmi più all'avanguardia da questo punto di vista è **Mathematica** che verrà utilizzato in questa tesi sia per la rappresentazione grafica delle curve e superfici studiate, sia nelle dimostrazioni dei Teoremi riportati. In tutti i casi si è trattato di elaborare dei programmi che permettessero di calcolare delle particolari funzioni da valutare nel problema specifico. Ad esempio, dopo aver implementato il programma per il calcolo della curvatura Media, lo abbiamo utilizzato per ottenere l'equazione differenziale associata alle superfici minime. Inoltre, una volta realizzati i programmi per il calcolo della curvatura Gaussiana, la verifica del fatto che le superfici rigate rientrano nella classe delle superfici a curvatura Gaussiana costante nulla, viene fatta utilizzando esclusivamente **Mathematica**.
Per quanto riguarda le rappresentazioni grafiche delle superfici abbiamo realizzato dei programmi che permettono di dare a tali superfici colorazioni corrispondenti ai valori massimi e minimi di alcune funzioni ad esse associate. In particolare, studiando l'andamento della curvatura Gaussiana di una superficie, abbiamo ricavato i giusti parametri per elaborare un programma di grafica che valuti, con colorazioni dal rosso al violetto, i valori massimi e minimi assunti sulla superficie da tale funzione.
Inoltre, nel caso di superfici particolarmente complicate come quella di Costa, dato che **Mathematica** include nella rappresentazione anche delle poligonali molto distanti dall'origine mostrando un grafico non corretto, si è reso necessario utilizzare un sottoprogramma che permette di visualizzare un grafico più omogeneo della superficie in questione.

Lo studio delle superfici in $\mathbb{R}^3$ che verrà fatto nei prossimi capitoli si baserà sull'analisi dei vari tipi di curvature (normale, principali, Gaussiana, Media e totale) e delle proprietà dell'applicazione di Gauss associata.

Nel **Capitolo 1** consideriamo superfici a curvatura Gaussiana $K =$costante e studiamo separatamente i casi $K > 0$, $K = 0$ e $K < 0$.
Per quanto riguarda le superfici a curvatura Gaussiana costante positiva, facciamo una ulteriore distinzione fra superfici di rotazione e non.
Nel primo caso basta considerare la generica parametrizzazione di una su-

perficie ottenuta ad esempio dalla rotazione attorno all'asse z di una curva $\alpha = (\varphi, \psi)$ contenuta nel piano $y = 0$

$$x(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$$

e, imponendo $K = 1/a^2$ con a costante non nulla, ci si riduce a risolvere una equazione differenziale da cui trovare l'espressione di α. Tale espressione dipende da una costante b che, a seconda dei possibili valori che assume, dà luogo a diversi tipi di curve e quindi di superfici.

Figura 1: $K =$ costante $> 0:$ Caso $a \leq b$, curve al profilo e una delle superfici corrsipondenti.

Invece, per quanto riguarda le superfici non di rotazione, riportiamo come esempio la superficie di Sievert.

Per quanto riguarda le superfici a curvatura Gaussiana costante nulla facciamo una distinzione tra: superfici di rotazione, superfici che si possono ottenere a partire dall'*elicoide generalizzato* generato da una curva piana $\alpha = (\varphi, \psi)$ (si tratta di una superfici ottenute dalla rotazione e traslazione lungo una direzione parallela all'asse z di tale curva) e superfici rigate.
Nel caso delle superfici di rotazione otteniamo un'equazione differenziale la cui sonuzione, a seconda delle possibili scelte delle costanti, determina un cono, un piano oppure un cilindro.
Nel caso delle superfici ottenute dall'elicoide generalizzato la condizione $K = 0$ si riduce ad una equazione differenziale in φ e ψ che, una volta risolta, ci

Figura 2: $K =$ costante $> 0 :$ Caso $a \geq b$, curve al profilo e una delle superfici corrispondenti.

permette di ottenere la parametrizzazione e, utilizzando **Mathematica**, la rappresentazione grafica di tale superficie.

Figura 3: $K =$ costante $= 0 :$ Elicoide generalizzato.

Nel caso delle superfici rigate, quindi con parametrizzazione del tipo

$$x(u, v) = \alpha(u) + v\gamma(u)$$

dove α e γ sono curve in $\mathbb{R}^3$ con α' mai nulla, faremo una ulteriore distinzione tra i tre tipi di superfici: *cono generalizzato* (corrispondente alla scelta $\alpha(u) = P$ con P fissato), *cilindro generalizzato* (corrispondente alla scelta $\gamma(u) = Q$ con Q fissato) e *tangente sviluppabile* di una curva α (corrispondente alla scelta $\gamma(u) = \alpha'(u)$). In tutti e tre i casi il calcolo della curvatura Gaussiana viene fatto con **Mathematica** e si ottiene effettivamente sempre 0. Proviamo inoltre un parziale viceversa cioè
Teorema. *Sia $x(u, v) = \beta(u) + v\delta(u)$ con $\|\delta'(u)\| = 1$ la parametrizzazione di una superficie rigata $\mathcal{M}$ a curvatura Gaussiana nulla.*
(i) Se $\beta'(u) \equiv 0$, allora $\mathcal{M}$ è un cono.
(ii) Se $\delta'(u) \equiv 0$, allora $\mathcal{M}$ è un cilindro.
(iii) Se sia β' che δ' non si annullano mai, allora $\mathcal{M}$ è la superficie tangente sviluppabile della curva β.

Figura 4: K = costante = 0 : Cilindro e cono generalizzato costruiti sulla curva *otto*.

Figura 5: $K = \text{costante} = 0$: Tangente sviluppabile di un'elica.

Per quanto riguarda le superfici a curvatura Gaussiana costante negativa facciamo una distinzione, come nel primo caso, tra superfici di rotazione e non. Per le superfici di rotazione la condizione $K = -1/a^2$, con a costante non nulla, porta di nuovo ad una equazione differenziale che, a seconda delle possibili scelte delle costanti, dà luogo a tre tipi diversi di curve e quindi di superfici: *conico, iperbolico* e *pseudosfera*. Quest'ultima ha una parametrizzazione che, come vedremo, coincide con quella di una superficie ottenuta dalla rotazione attorno all'asse z della curva piana *tractrix*, soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Tra le superfici non di rotazione abbiamo la superficie di Kuen e la superficie di Dini la cui parametrizzazione si può ottenere considerando un elicoide generalizzato costruito su una *tractrix*. Anche questa volta la verifica che in entrambi i casi K è costante e negativa è un semplice calcolo se fatto con **Mathematica**.

Figura 6: $K =$ costante < 0 : Curve al profilo e superficie di tipo conico.

Figura 7: $K =$ costante < 0 : Curve al profilo e superficie di tipo iperbolico.

Figura 8: $K =$ costante < 0 : Pseudosfera.

Nel **Capitolo 2** facciamo uno studio di quelle che, fino al 1866, furono gli unici esempi di superfici minime conosciute: il *catenoide*, l'*elicoide* e la *superficie di Scherk*.
Il catenoide si ottiene dalla rotazione di una curva particolare, la *catenaria*, soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

In particolare dimostriamo che il catenoide è essenzialmente l'unica superficie minima di rotazione:
Teorema. *Se $\mathcal{M}$ è una superficie di rotazione minima allora è contenuta in un piano oppure in un catenoide.*
Fino al 1766, anno in cui Meusnier scoprì l'elicoide, il catenoide era l'unica superficie minima conosciuta. In particolare l'elicoide è una superficie minima rigata e, anche in questo caso, dimostriamo che è essenzialmente l'unica:
Teorema. *Se $\mathcal{M}$ è una superficie rigata minima allora è contenuta in un piano oppure in un elicoide.*
I seguenti grafici mostrano l'elicoide e il catenoide con colorazione corrispondente alla curvatura Gaussiana:

Figura 9: Superfici minime: l'elicoide e il catenoide colorati in base alla curvatura Gaussiana.

Si dovettero aspettare oltre 50 anni dal 1766 prima che Scherk scoprisse le superfici che portano il suo nome. Utilizzando il particolare tipo di parametrizzazione

$$x(u,v) = (u, v, h(u,v)) \tag{1}$$

si ottiene che l'espressione della curvatura media è

$$H = \frac{(1+h_v^2)h_{uu} - 2h_u h_v h_{uv} + (1+h_u^2)h_{vv}}{2(1+h_u^2+h_v^2)^{3/2}}.$$

In particolare scegliendo

$$h(u,v) = f(u) + g(v) \tag{2}$$

si ottiene la superficie di Scherk. Anche in questo caso dimostriamo che tale superficie è essenzialmente l'unica con una parametrizzazione del tipo (1) con scelta della funzione h come in (2).

Teorema. *Se $\mathcal{M}$ è una superficie minima con parametrizzazione del tipo (1) e h scelta come in (2), allora è contenuta in un piano oppure in una superficie di Scherk.*

Figura 10: Superfici minime: la superficie di Scherk.

Nel **Capitolo 3** introduciamo un tipo particolare di parametrizzazione x in coordinate dette *isoterme* che soddisfa

$$x_u \cdot x_u = x_v \cdot x_v = \lambda^2, \qquad x_u \cdot x_v = 0$$

dove λ è una funzione differenziabile a valori reali. Abbozzeremo la dimostrazione del classico risultato sull'esistenza di un sistema di coordinate di questo tipo per una superficie qualsiasi. Inoltre in questo caso la curvatura Media assume una forma particolarmente utile

$$H = \frac{(x_{uu} + x_{vv}) \cdot (x_u \wedge x_v)}{2\lambda^4}.$$

Da tale espressione si deduce infatti che una sistema di coordinate isoterme x, con x *armonica*, definisce una superfie minima.
Inoltre definiamo la famiglia ad un parametro di parametrizzazioni associate a due sistemi di coordinate isoterme x e y *coniugati* (cioè tali che $x_u = y_v$ e $x_v = -y_u$) come

$$z[t] = \cos(t)x + \sin(t)y = \Re e(e^{-it}(x + iy)) \tag{3}$$

e la *derivata in senso complesso* di x

$$\frac{dx}{dz}(z) = \frac{1}{2}(x_u - ix_v)(u,v) := (\Phi_1[x], \Phi_2[x], \Phi_3[x]).$$

Sfruttando quest'ultima definizione dimostramo che x definisce un sistema di coordinate isoterme se e solo se

$$\sum_{k=1}^{3} \Phi_k[x]^2 = 0.$$

Nel 1866 Weierstrass introdusse un particolare tipo di sistemi di coordinate isoterme coniugate:

$$x(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$$

$$y(u,v) = (y_1(u,v), y_2(u,v), y_3(u,v))$$

con:

$$x_1(z) = \Re e\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{f(w)}{2}(1-g(w)^2)dw\right\}; \quad y_1(z) = \Im m\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{f(w)}{2}(1-g(w)^2)dw\right\};$$

$$x_2(z) = \Re e\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{if(w)}{2}(1+g(w)^2)dw\right\}; \quad y_2(z) = \Im m\left\{\int_{z_0}^{z} \frac{if(w)}{2}(1+g(w)^2)dw\right\};$$

$$x_3(z) = \Re e\left\{\int_{z_0}^{z} f(w)g(w)dw\right\}; \quad y_3(z) = \Im m\left\{\int_{z_0}^{z} f(w)g(w)dw\right\}$$

dove $z = u + iv$ e f e g sono due funzioni rispettivamente olomorfa e meromorfa tale che in ogni punto in cui g ha un polo di ordine m allora f ha uno zero di ordine almeno $2m$.
Dimostriamo che si tratta di sistemi di coordinate isoterme coniugati che definiscono, a seconda delle possibili scelte di f e g, diversi tipi di superfici minime. In particolare abbiamo che:
1) scegliendo $f(z) = 1/z^2$ e $g(z) = z$ otteniamo una riparametrizzazione del catenoide;
2) scegliendo $f(z) = 1 - 1/z^4$ e $g(z) = z$ otteniamo la superficie di Henneberg;
3) scegliendo $f(z) = 1/z^2$ e $g(z) = z^2$ otteniamo la superficie di Richmond.
Anche in questo caso si definisce una famiglia ad un parametro di superfici associate come in (3). Ad esempio, scegliendo $f(z) = -e^{-z}$ e $g(z) = -e^{z}$ si dimostra che il catenoide e l'elicoide sono superfici minime coniugate.

Figura 11: $z[0](u,v)$ $z[\pi/32](u,v)$ $z[\pi/16](u,v)$.

Figura 12: $z[\pi/8](u,v)$ $z[\pi/4](u,v)$ $z[\pi/2](u,v)$.

Infatti, considerando tutta la famiglia ad un parametro t di superfici associate al catenoide, quindi con parametrizzazione $z[t](u,v)$, vediamo come $z[0](u,v)$ coincide con il catenoide e $z[\pi/2](u,v)$ coincide con l'elicoide. Inoltre dimostriamo che l'elicoide è localmente isometrico al catenoide.

Per quanto riguarda la curvatura Gaussiana delle superfici con parametrizzazione di Weierstrass si ottiene la seguente espressione

$$K = \frac{-16|g'|^2}{|f|^2(1+|g|^2)^4}$$

da cui si deduce che la curvatura Gaussiana di una superficie minima ha sempre zeri isolati.

Figura 13: Superfici minime: la superficie di Henneberg e la superficie di Richmond.

Nel caso della superficie di Henneberg dimostriamo, sempre utilizzando **Mathematica**, che

Teorema. *La famiglia ad un parametro t di superfici associate alla superficie di Henneberg definisce, $\forall\ t$, una riparametrizzazione della superficie stessa.*

Nel **Capitolo 4** studiamo un esempio di superficie molto importante che è la superficie di Costa, di genere 3 e 3 *planar ends*. Questa superficie fu scoperta nel 1984 e la sua parametrizzazione è data in termini delle funzioni $\wp$ e ζ di Weierstrass (disponibili solo nella versione **3.0** di **Mathematica**). In termini di parametrizzazione di Weierstrass questa superficie si ottiene scegliendo

$$f(z) = \mathbf{P}(z) \qquad g(z) = \frac{A}{\mathbf{P}'(z)}$$

dove $A \approx 34.46707$, $\mathbf{P}(z) = \wp(z, \{c, 0\})$, $\mathbf{Z}(z) = \zeta(z, \{c, 0\})$, $c \approx 189.07272$.

Dimostriamo che si può ottenere una parametrizzazione (equivalente a quella fornita da Barbosa e Colares) in cui compare la sola funzione ζ. Questa scelta aumenta la velocità di rappresentazione della superficie da parte di **Mathematica** di un fattore circa 50.

Nel **Capitolo 5** studieremo il comportamento dell'applicazione di Gauss di una superficie minima. Tale applicazione associa ad ogni punto P sulla superficie $\mathcal{M}$ il punto su S^2 che, visto come vettore applicato nell'origine, è parallelo alla normale in P ad $\mathcal{M}$. In un certo senso si tratta dunque di stimare, in ogni intorno di un punto, quanto la superficie differisce dall'essere una sfera.
Nel caso di una parametrizzazione di Weierstrass tale applicazione è data da

$$U(z) = \frac{1}{1 + |g(z)|^2}\{2\Re e(g(z)), 2\Im m(g(z)), |g(z)|^2 - 1\}$$

da cui si deduce che U è data dalla composizione di g con l'inversa della proiezione stereografica e si tratta quindi di un'applicazione olomorfa. Dimostriamo anche un parziale viceversa ossia, nel caso di una superficie senza punti ombelicali, se l'applicazione di Gauss è olomorfa allora la superficie è minima.
Dimostriamo inoltre che una superficie minima $\mathcal{M}$ è contenuta in un piano oppure la sua applicazione di Gauss assume tutte le direzioni possibili tranne al massimo due.
Un altro risultato interessante che proviamo è il seguente: assegnati fino a 4 punti su S^2 esiste una superficie minima regolare completa la cui immagine

tramite l'applicazione di Gauss omette esattamente quei punti.

Definiamo la curvatura *totale* nel modo seguente

$$\int_{\triangle} KdA$$

e dimostriamo che coincide con l'opposto dell'area dell'immagine di $\triangle$ attraverso l'applicazione di Gauss di x.
Nel caso di una superficie $\mathcal{M}$ minima, regolare, completa e a curvatura totale finita si dimostra che esistono una superficie compatta $\mathcal{M}'$ e un numero finito di punti $p_1...p_k$ in $\mathcal{M}'$ tale che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}' \setminus \{p_1...p_k\}$ siano isometriche.
L'immagine inversa di ognuno di questi punti è chiamata *planar end*.
Sfruttando il fatto che per una superficie minima completa la curvatura totale assume i valori $-4\pi m$, con m intero non negativo, oppure $-\infty$ diamo cenni della dimostrazione del fatto che la superficie di Enneper e il catenoide sono le uniche superfici minime complete con curvatura totale pari a -4π e applicazione di Gauss iniettiva. Si dimostra che la superficie di Enneper è non embedded di genere 2 e ha una *planar end*. Generalizzeremo questa superficie rappresentando graficamente le superfici di Enneper di grado n.

Figura 14: Superfici minime: la superficie di Costa.