UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N

Sintesi della Tesi di Laurea in Matematica
di
Valeria Troise

Da Euclide a Lobacevskij

Relatore
Prof. Andrea Bruno

ANNO ACCADEMICO 2004-2005
Luglio 2005

Classificazione 01A05-51M10
Parole chiave:
V postulato, geometria neutrale, formulazioni equivalenti, geometria iperbolica.

Sintesi

"*La geometria è l'unica scienza che finora sia piaciuto a Dio offrire all'umanità.*" Thomas Hobbes (1588-1679)

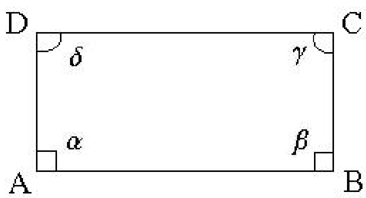
C'era una volta, intorno al 600 a.C., un uomo di nome Talete di Mileto, che inventò ciò che chiamiamo "scienza".
Prima di Talete, gli studiosi invece di cercare i princìpi celati dietro gli eventi insoliti che la natura poneva loro di fronte, ritenevano che la natura operasse in seguito alle vicende fantastiche di personaggi ultraterreni, gli Dei.
In particolare, Talete introdusse l'astrazione in *geometria*, ossia in quella disciplina che fino ad allora era stata studiata per misurare (*metrein*) la terra (*geo*) ed in cui le figure erano oggetti particolari, come recinti o campi. Egli invece concepì la geometria come un'attività puramente speculativa, cosicché analizzando le regole pratiche e le formule empiriche tramandate da Egizi e Babilonesi, vi scoprì un ordine, ossia notò che alcuni fatti geometrici erano deducibili a partire da altri.
Le teorie scientifiche di Talete diedero l'avvio allo studio, da parte degli antichi greci, della matematica come chiave di lettura della natura, cosicché, già nel V secolo a.C., i matematici avevano elaborato lunghe serie di teoremi geometrici in cui ogni teorema veniva dedotto, in modo non formale, da quelli precedenti.
Il più antico trattato di geometria a noi pervenuto è gli *Elementi* di Euclide (circa 300 a.C.), che costituiscono un unico sistema deduttivo di 465 teoremi inerenti non solo alla geometria elementare, ma anche all'algebra ed alla teoria di numeri. Sono strutturati in 13 libri, ognuno dei quali si apre con i termini che definiscono

l'argomento trattato nella specifica sezione. Solo all'inizio del libro I compaiono, oltre ai termini che hanno funzione definitoria, 5 *assiomi* (proposizioni primitive che enunciano affermazioni che si ritengono evidentemente vere in generale) e 5 *postulati* (proposizioni primitive che enunciano affermazioni che si ritengono evidentemente vere, limitatamente al campo specifico della scienza che li assume); a partire da essi si dimostrano 48 teoremi sui triangoli, sulle parallele e sui poligoni.
Riportiamo ora la definizione di parallelismo e la formulazione del V postulato, così come Euclide li espone:
Definizione 23: Diconsi *parallele* rette giacenti nello stesso piano che, prolungate illimitatamente in entrambe le direzioni, non si incontrino fra loro da nessuna delle due parti.
V. *(Postulato delle parallele)* Ogni volta che una retta, intersecando altre due rette forma con esse angoli interni da una medesima parte (coniugati interni), la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette prolungate indefinitamente si incontrano da quella parte nella quale gli angoli coniugati interni formano insieme meno di due retti.

L'insieme dei termini primitivi, le definizioni antecedenti il V, le nozioni comuni, i postulati tranne il V, nonchè tutti i teoremi che da essi possono essere dedotti prendono il nome di *geometria neutrale.*
Tra i teoremi della geometria neutrale ricordiamo: i tre criteri di congruenza dei triangoli (nella dimostrazione dei quali abbiamo dovuto eliminare il concetto di "sovrapposizione", poiché non era giustificato da alcun concetto primitivo), il teorema dell'angolo esterno, la disuguaglianza triangolare, il teorema che enuncia che in ogni triangolo ad angolo maggiore è opposto lato maggiore e viceversa.
Tra i teoremi dimostrati con il V postulato (quindi *non* appartenenti alla geometria neutrale) ricordiamo i seguenti:
Teorema 29. *In un piano,una retta che intersechi due rette parallele forma con esse angoli alterni uguali fra loro, angoli esterni uguali agli angoli interni e opposti, e da una medesima parte angoli interni la cui somma è uguale a due retti.*
Teorema 30. *Rette parallele a una stessa retta sono parallele fra loro.*

Teorema 32. *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati : (a) l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni opposti; (b) la somma dei tre angoli interni del triangolo è pari a due retti.*
Teorema 47 (Teorema di Pitagora). *Nei triangoli rettangoli il quadrato costruito sul lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati che comprendono l'angolo retto.*

Nei 2100 anni successivi alla pubblicazione degli *Elementi* di Euclide filosofi e matematici di riconosciuto genio intellettivo, si sono chiesti se il V postulato si dovesse effettivamente includere tra gli assunti fondamentali o se non fosse possibile una sua dimostrazione; è opportuno ribadire che controversa non era la questione se il V postulato fosse o no vero, bensì se non fosse possibile una sua dimostrazione a partire da tutti quegli enunciati che appartengono alla *geometria neutrale.*
Tra i matematici che affrontarono lo spinoso quesito, la nostra attenzione si è soffermata su *Gerolamo Saccheri*(1667-1733), *Johann Lambert*(1728-1777) e *Adrien Legendre*(1752-1833).
Il fatto nuovo in Saccheri, rispetto ai suoi predecessori, è il procedimento logico da lui scelto per affrontare l'impossibile dimostrazione; si tratta di un ragionamento in base al quale, assumendo che ciò che si vuol dimostrare non sia vero, si ottiene la proposizione stessa che si vuole provare, sicché quest'ultima viene ad essere ottenuta come una conseguenza della sua propria negazione. Questo tipo di ragionamento deve quindi essere tenuto distinto dal processo di riduzione all' assurdo nel quale, assunta la negazione della proposizione da dimostrare, si giunge a contraddire una "diversa"proposizione già dimostrata o comunque postulata.



La figura fondamentale di Saccheri è il *quadrilatero birettangolo isoscele*, cioè il quadrilatero che si ottiene, dato un segmento $\overline{AB}$, innalzando le perpendicolari ad esso negli estremi e considerando, su tali perpendicolari, due segmenti uguali $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Il quadrilatero birettangolo gode della proprietà che se è isoscele, allora l'angolo in $\widehat{C}$ è uguale all'angolo in $\widehat{D}$.

Sia $ABCD$ un quadrilatero birettangolo (dove $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$) ed isoscele (dove $\overline{AD} = \overline{BC}$); nell'ipotesi euclidea anche gli angoli $\widehat{C}, \widehat{D}$ sono retti, quindi ammettendo che questi angoli possano essere entrambi *ottusi* (**ipotesi angolo ottuso**) oppure entrambi *acuti* (**ipotesi angolo acuto**), si nega implicitamente il V postulato.

Partendo dalla negazione del V postulato e approfondendo le due ipotesi dell' angolo ottuso e acuto, Saccheri ha dimostrato nel XVIII secolo teoremi che verranno formalizzati solo più di cento anni più tardi; infatti, l'ipotesi dell' angolo ottuso conduce alla *geometria non-euclidea ellittica* di Bernhard Riemann e l'ipotesi dell' angolo acuto conduce alla *geometria non-euclidea iperbolica* di Nikolaj Lobacevskij.

Fra i primi interessanti risultati che ricava dalla sua analisi ricordiamo:

Teorema 2. *A seconda che si trovi verificata l'ipotesi dell'angolo retto, l'ipotesi dell'angolo ottuso o l'ipotesi dell'angolo acuto, la somma degli angoli interni di un triangolo è rispettivamente uguale, maggiore o minore di due angoli retti.*

Saccheri riesce a dimostrare che *l'ipotesi angolo ottuso* è falsa poichè in questa ipotesi vale il *postulato euclideo* e conseguentemente valgono gli ordinari teoremi che da questo postulato si deducono.

Osserviamo che per confutare l' ipotesi dell'angolo ottuso Saccheri presuppone la lunghezza infinita della retta; tuttavia, se si ammette che ogni retta abbia lunghezza finita r (proprio come facciamo nella geometria ellittica), osserviamo non solo che il V postulato non è più valido, ma che anche il postulato I della geometria neutrale non è più verificato.

Volendo provare che il V postulato è valido incondizionatamente, Saccheri si accinge quindi a distruggere anche *l'ipotesi angolo acuto*; per confutare tale ipotesi la tecnica dimostrativa utilizzata è l' usuale *dimostrazione per assurdo*, ossia vuole dedurre che nell'*ipotesi angolo acuto* si giunge ad una contraddizione.

Purtroppo l'impresa si rivela più ardua del previsto cosicché, non riuscendo a concludere, Saccheri, affidandosi più che alla logica, solo alla fede nella validità del V postulato, afferma che: "l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perchè ripugna alla natura della linea retta."La conclusione del Saccheri si basa sul fatto che due rette asintotiche (ossia rette che vanno sempre più accostandosi e tali che la loro distanza diventi minore di un segmento piccolo a piacere) avrebbero una perpendicolare comune in un punto comune all'infinito, mentre egli ha precedentemente dimostrato che *al finito* tali rette non si intersecano e non possono avere perpendicolare comune.
La pretesa dimostrazione di Saccheri è dunque fondata sull' *estensione all'infinito* di certe proprietà, valide per figure situate a distanza finita.

Un altro protagonista della nostra trattazione è il famoso matematico svizzero Johann Lambert; la sua figura fondamentale è un *quadrilatero trirettangolo*, ossia con tre angoli retti, e le analoghe ipotesi del Saccheri vengono fatte sulla natura del quarto angolo: **ipotesi angolo retto** se esso è pari a 90°, **ipotesi angolo acuto** se è minore di 90° e **ipotesi angolo ottuso** se è maggiore di 90°.
Lambert riuscì ad andare molto più in là di Saccheri nello sviluppare le conseguenze delle ultime due ipotesi; egli infatti (dopo aver rigettato l'ipotesi dell'angolo ottuso con un ragionamento analogo a quello del Saccheri) scoprì che, in una geometria fondata sull'ipotesi dell'angolo acuto, è possibile assegnare un'unità assoluta di lunghezza, a differenza di quanto avviene nella geometria ordinaria dove la misura, ad esempio, di un segmento è relativa all'unità di misura scelta. Lambert, inoltre, osservò che affermare l'esistenza di una unità di misura assoluta per le lunghezze equivaleva ad ammettere che *non possono esistere figure simili e non uguali.*
E' facile osservare che tutto ciò non si accorda con l'ordinaria intuizione dello spazio, cosicché *negando l'esistenza dell'unità assoluta per i segmenti, l'ipotesi dell'angolo acuto deve essere rifiutata.*
In realtà, Lambert *non* fu soddisfatto da queste considerazioni e si rese pienamente conto di quanto fosse arbitraria la precedente affermazione.

Il più noto studioso francese che si interessò del V postulato fu Adrien Legendre; egli non aveva nessun dubbio in merito alla dimostrabilità del postulato euclideo e voleva ottenere tale risultato dalla proposizione che la somma degli angoli interni di un triangolo fosse uguale a due angoli retti.
Egli intanto cominciò con il dimostrare che:
Proposizione 8. *In qualsiasi triangolo la somma degli angoli interni è minore od uguale di due angoli retti.*
Proposizione 9. *Se in solo triangolo la somma degli angoli interni è minore od uguale di due angoli retti, è rispettivamente minore od uguale di due angoli retti in ciascun altro triangolo.*
Poichè nell'ipotesi dell'angolo ottuso la somma degli angoli interni di un triangolo può essere maggiore di due angoli retti, attraverso queste due proposizioni, Legendre riuscì a refutare tale ipotesi.
Dimostrati questi teoremi, egli refutò anche l'ipotesi dell'angolo acuto asserendo che:
Lemma 7. *La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti.*
La dimostrazione di quest'ultimo lemma si basa su un'argomentazione già sostenuta da Lambert, ossia sull'impossibilità dell'esistenza di un' unità assoluta di lunghezza; per sostenere tale teoria, Legendre si basò sul cosiddetto:
Principio di omogeneità: *grandezze eterogenee, quali gli angoli ed i segmenti, non possono essere in dipendenza biunivoca l'una dall'altra.*
Stabilita quindi la validità dell'ipotesi dell'angolo retto, Legendre derivò facilmente la dimostrazione del V postulato.
Con quest'opera così elegante Legendre credette finalmente risolta l'inestricabile difficoltà annidata nel principio della geometria. In sostanza però non aggiunse nulla di veramente nuovo al materiale ed alle convinzioni guadagnate dai suoi predecessori. Il suo maggior merito sta nella forma sobria ed elegante che seppe dare ai suoi studi, cosicché essi raggiusero una diffusione tale che spronò notevolmente le ricerche verso le geometrie non euclidee.

Venti secoli di inutili sforzi ed, in particolare, le ultime infruttuose ricerche sul V postulato, indussero molti geometri, sul principio del XIX secolo, a convincersi che l'assetto definitivo della teoria delle parallele costituisse un problema irrisolubile. Nondimeno l'interesse per il nostro argomento fu sempre vivo e, pur non cessando di affaticare inutilmente i ricercatori della presunta dimostrazione del V, guidò finalmente alla scoperta di nuovi sistemi geometrici indipendenti dal postulato euclideo.

Fu *Karl Friedrich Gauss*(1777-1855) il primo ad avere una chiara visione di questa nuova geometria (1813), visione che per ben cinquant'anni rimase chiusa nella mente del sommo geometra e che venne alla luce soltanto dopo le opere di *N. Lobacevskij* e *J. Bolyai.*

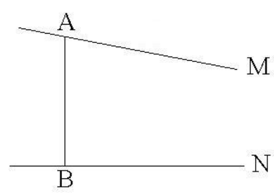
L'idea del *princeps mathematicorum* era maturata dopo circa vent'anni di sporadici tentativi di dimostrare il V postulato, come attesta la seguente citazione tratta da una lettera a W. Bolyai (17 dicembre 1799):

"Quanto a me, i miei lavori sono già molto avanzati; ma la via nella quale sono entrato non conduce al fine che si cerca, e che tu affermi aver raggiunto, ma conduce piuttosto a mettere in dubbio l'esattezza della geometria stessa."

Negli anni immediatamente successivi, egli si dedicò allo studio della nuova geometria (che sarà proprio da lui chiamata *non euclidea*):

"L'assunzione che la somma dei 3 angoli [di un triangolo] sia più piccola di 180° ci conduce ad una curiosa geometria, piuttosto differente dalla nostra, [l'Euclidea], ma perfettamente coerente."

Gli appunti trovati fra i manoscritti di Gauss contengono un rapido cenno riguardo ad una nuova teoria delle parallele:



Definizione secondo Gauss: date due rette complanari e non incidenti AM e

BN, la retta AM si dice *parallela* alla retta BN se è tale che ogni retta per il punto A compresa nell' angolo $\widehat{BAM}$, incontri la retta BN.
Gauss si rese pienamente conto del valore rivoluzionario delle sue scoperte ed il timore di entrare in aperta lotta con il conformismo della filosofia imperante lo trattenne dal pubblicarle; nel XIX secolo, infatti, la riflessione sulla natura della verità geometrica era dominata dal pensiero di uno tra i più importanti filosofi di tutti i tempi: *Immanuel Kant* (1724-1804).
La dottrina kantiana dello spazio sosteneva che spazio e tempo sono intuizioni pure, e la geometria euclidea, in quanto traduce correttamente ed esattamente la struttura del nostro spazio fisico, non può che essere una costruzione assoluta, fondata su principi altrettanto indubitabili e assoluti. Inoltre per Kant la geometria costituiva un esempio paradigmatico di conoscenza sintetica a priori; infatti essa è complessivamente certa in un modo che non richiede di essere giustificato dall'esperienza (ossia è a priori)e dall'altra parte i suoi teoremi ci dicono qualcosa intorno al mondo, allo spazio fisico che ci circonda (e cioè è sintetica).
Kant aveva in questo modo sistemato filosoficamente una concezione che si era tramandata fin dall'antichità greca, ossia l'assunzione della geometria come interprete fedele e assoluta della struttura dello spazio fisico.

"Parecchie cose hanno un'epoca nella quale esse sono trovate allo stesso tempo in più luoghi, precisamente come in primavera le violette da ogni parte vengono alla luce."
Con queste parole Wolfgang Bolyai esortava il figlio *Janos Bolyai* (1802-1860) a pubblicare al più presto le sue rivoluzionarie scoperte in merito ad una nuova geometria che, scrisse Janos al padre, gli aveva permesso di creare "un universo completamente nuovo dal nulla."
Janos mandò al padre un primo estratto del suo lavoro nel 1825 e il manoscritto completo nel 1829; il lavoro in questione venne inserito da Wolfgang Bolyai come appendice al primo volume del suo *Tentamen* del 1832.
Nello stesso anno il lavoro di Janos venne inviato a Gauss per averne un giudizio.
La risposta che sei mesi più tardi Gauss inviò a Wolfgang Bolyai, riportava:

"[...] l'intero contenuto dell'opera, la via seguita da tuo figlio, i risultati ai quali egli è pervenuto, coincidono praticamente con le mie meditazioni che, tra le altre, hanno occupato la mia mente negli ultimi trenta o trentacinque anni. [...] Così sono estremamente sorpreso che io venga risparmiato di tale sforzo [di pubblicare le mie scoperte] e sono contentissimo che ciò accada grazie al figlio del mio vecchio amico, che mi ha preceduto in modo così rimarchevole."
E' importante sottolineare che il *Tentamen* fu pubblicato nel 1832, tuttavia la priorità in merito alla prima opera stampata sulla geometria non euclidea spetta al matematico russo *Nikolay Lobacevskij*, che pubblicò nel 1829 il suo *Saggio sui principi della geomeria.*

Arriviamo ora alla parte matematicamente più consistente della nostra trattazione. Tra le tante opere pubblicate da Lobacevskij la nostra attenzione si è focalizzata su *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele* pubblicata nel 1835. Il motivo di tale scelta è l'innovativa descrizione, affrontata nei primi 6 capitoli, della geometria neutrale (da lui denominata "geometria assoluta"); Lobacevskij sosteneva che i cosiddetti "concetti primitivi"e i procedimenti su cui si basa la geometria descritta da Euclide sono in realtà frutto di un cammino didattico molto complesso e non possono quindi essere alla base dell'insegnamento, anche elementare, della matematica. In questo modo Lobacevskij fornisce un innovativo strumento didattico rispetto all'impostazione euclidea, tuttora utilizzata nelle moderne scuole primarie.
Ma quali sono questi "nuovi principi"in base ai quali Lobacevskij fondò la sua geometria? Egli sosteneva che la "geometria assoluta"è il complesso delle deduzioni derivanti da quei concetti "che sono immediatamente congiunti nella nostra mente con la rappresentazione dei corpi, ai quali la nostra immaginazione è avvezza, che possiamo controllare direttamente nella natura, senza prima ricorrere ad altri concetti, artificiali ed estranei", ad "ammissioni arbitrarie"; il postulato euclideo è un'ammissione arbitraria e punto, retta e piano non sono concetti primitivi. Per Lobacevskij i concetti primitivi sono quelli di "corpo", "contatto tra i corpi"e "movimento rigido".

Definizione 1. Sia un *corpo* un qualsiasi solido che una deformazione (senza lacerazioni né duplicazioni) possa ridurre ad un disco chiuso in R^3: in termini moderni, ogni solido "omeomorfo"ad un disco chiuso in R^3 (anche i punti della superficie sono considerati appartenenti al solido).
Definizione 2. Il concetto di *contatto* equivale alla possibilità di dividere un corpo in parti (sezioni di vario tipo) e di comporre le parti nuovamente: i vari tipi di contatto definiscono le superfici, le linee, i punti.
Definizione 3. Definiamo *una sezione* come quel particolare contatto che scompone un corpo in 2 parti che si toccano.
Partendo da questi concetti primitivi, Lobacevskij arriva a *costruire* quei principi che sono alla base della geometria come noi la conosciamo, ossia punto, retta, superficie, distanza, sfera, poligoni, cerchio,angoli etc... Inoltre riesce a dimostrare, utilizzando procedimenti estremamente diversi da quelli euclidei (ad esempio usando il concetto di "sovrapposizione"), quei postulati e teoremi che sono propri della geometria neutrale e che abbiamo approfondito nel I capitolo della nostra trattazione: angoli alla base uguali in un triangolo isoscele, teorema dell'angolo esterno, in un triangolo a lato maggiore si oppone angolo maggiore e viceversa, disuguaglianza triangolare, congruenza tra triangoli, etc...
Conseguenza diretta di questa nuova formulazione della geometria è la rigorosa confutazione di tutte quelle proposizioni equivalenti al V postulato di Euclide con l'aiuto delle quali i matematici si erano sforzati di dimostrare il V postulato stesso. Tra tali proposizioni quella che maggiormente affaticò Lobacevskij fu il *principio di omogeneità* sostenuto da Legendre; comunque, egli riuscì a dimostrare che se il V postulato non è valido, un triangolo è pienamente definito dai suoi angoli, ossia:
Teorema 7. *Triangoli rettilinei sono congruenti se sono uguali i tre angoli,quando si supponga che la somma di essi sia* $\neq \pi$.
In altre parole, se la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di π (ossia mi trovo nella geometria iperbolica) non esistono triangoli simili che non siano addirittura congruenti.
Questo teorema, la cui dimostrazione è interamente riportata, confuta in modo definitivo le tesi sostenute da Lambert e Legendre e apre uno scenario sulla geome-

tria assolutamente innovativo rispetto alle concezioni precedenti.
La nostra trattazione prosegue con "la teoria delle parallele" nella quale Lobacevskij enuncia una diversa definizione di parallelismo e dimostra che la teoria delle parallele euclidea è un *caso particolare* di un concetto molto più esteso.

Definizione 30. Si definiscono *rette parallele* ad una retta data, quelle rette che passano per un fissato punto esterno alla retta data e che:
1) non intersecano la retta data;
2) sono il limite di una successione di rette che invece intersecano la retta data in un qualunque punto appartenente ad essa.

Questa sorprendente definizione rivaluta vigorosamente le scoperte che il matematico italiano Saccheri aveva compiuto più di un secolo prima; infatti la teoria delle parallele di Lobacevskij riprende (inconsapevolmente!) ed approfondisce quell'ipotesi dell'angolo acuto che tanto aveva affaticato il matematico italiano.
La nostra trattazione termina con l'enunciazione di alcuni teoremi propri della *geometria iperbolica.*
Per concludere è importante sottolineare quanto la lettura dell'*intero* libro di Lobacevskij sia avvenuta seguendo il percorso logico proposto dall'autore, ma commentandolo alla luce della moderna concezione di geometria; inoltre, pur preservando l'autenticità della trattazione, abbiamo riformulato il testo originale attraverso una terminologia più attuale e abbiamo verificato e comparato il testo inserendolo nel quadro storico descritto nei capitoli precedenti.
Il fine che ci proponevamo di raggiungere con la nostra trattazione era di illuminare la lunga problematica connessa al V postulato di Euclide, cosicchè siamo stati costretti a non inserire alcune parti del testo originale di Lobacevskij ritenute poco attinenti; in ogni caso l'*intero* libro è stato studiato ed approfondito in modo tale da permetterci una revisitazione critica del contenuto.